

Επιχειρησιακή Έρευνα Ενότητες 1 & 2 - Ασκήσεις

Άσκηση 1: Μία εταιρεία παράγει 3 προϊόντα: P_1, P_2 και P_3 . Το κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος P_j είναι k_j , $j = 1, 2, 3$. Η ζήτηση είναι τόσο μεγάλη που όλες οι ποσότητες που θα παραχθούν μπορούν να πωληθούν. Η παραγωγή κάθε προϊόντος γίνεται σε 3 στάδια και οι απαιτούμενες ώρες εργασίας στο στάδιο i για την παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος P_j είναι a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Οι διαθέσιμες ώρες εργασίας στο στάδιο i είναι b_i , $i = 1, 2, 3$. Τα k_j, a_{ij} και b_i , $i, j = 1, 2, 3$, δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

	ώρες εργασίας (a_{ij})			
στάδιο $i \setminus$ προϊόν P_j	P_1	P_2	P_3	διαθ. ώρες (b_i)
1	2	1	3	1800
2	0	2	4	2000
3	5	3	0	2300
κέρδος (k_j)	4	5	7	

Η εταιρεία θέλει να προσδιορίσει τις ποσότητες που θα παραχθούν από κάθε προϊόν ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος.

Διατυπώστε το πρόβλημα αυτό σαν πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού και έπειτα διατυπώστε το πρόβλημα στην AMPL, παρέχοντας όσο το δυνατόν πιο δομημένη διατύπωση του προβλήματος.

Άσκηση 2: Μια εταιρεία ετοιμάζεται να εισαγάγει στην αγορά ένα νέο προϊόν. Έχει επιλέξει για τη διαφημιστική εκστρατεία της 4 διαφημιστικά μέσα: τηλεόραση, ραδιόφωνο, περιοδικά και εφημερίδες. Το μοναδιαίο κόστος διαφήμισης και ο αντίστοιχος δείκτης αποτελεσματικότητας - ακροαματικότητας (ανά παρουσίαση) δίνεται στον επόμενο πίνακα

	Τηλεόραση	Ραδιόφωνο	Περιοδικά	Εφημερίδες
Κόστος	1000	100	600	400
Ακροαματικότητα	100	22	70	50

Η εταιρεία θέλει να μεγιστοποιήσει την ακροαματικότητα της εκστρατείας της αποφασίζοντας σε ποια διαφημιστικά μέσα θα κάνει διαφήμιση και το πλήθος των διαφημίσεων στα διάφορα μέσα λαμβάνοντας υπόψη τους ακόλουθους περιορισμούς:

- (1) Το συνολικό κόστος της εκστρατείας δεν μπορεί να υπερβαίνει τις 30000 ευρώ.
- (2) Λόγω της συχνότητας της έκδοσης των περιοδικών δεν μπορούν να τοποθετηθούν περισσότερες από 12 διαφημίσεις σε περιοδικά.
- (3) Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 10 διαφημίσεις στην τηλεόραση και τουλάχιστον 10 διαφημίσεις στο ραδιόφωνο.
- (4) Μπορεί να κάνει διαφήμιση το πολύ σε 3 διαφημιστικά μέσα.

Διατυπώστε το πρόβλημα αυτό σαν πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού και έπειτα διατυπώστε το πρόβλημα στην AMPL, παρέχοντας όσο το δυνατόν πιο δομημένη διατύπωση του προβλήματος.

Άσκηση 3: Ένας επιχειρηματίας θέλει να επενδύσει σε μία περιοχή φτιάχνοντας γκαρσονιέρες, μονοκατοικίες, διαμερίσματα και πάρκα. Η μέγιστη ζήτηση από τους εν δυνάμει ενοικιαστές είναι 50 γκαρσονιέρες, 30 μονοκατοικίες και 25 διαμερίσματα. Τα μηνιαία έσοδα από τα ενοίκια υπολογίζονται στα 400 Ευρώ για κάθε γκαρσονιέρα, 800 Ευρώ για κάθε μονοκατοικία και 600 Ευρώ για κάθε διαμέρισμα. Για κάθε γκαρσονιέρα που χτίζει πρέπει να φτιάχνει και 20 τ.μ. πάρκο. Αντίστοιχα, για κάθε μονοκατοικία θα πρέπει να φτιάχνει 70 τ.μ. πάρκο και για κάθε διαμέρισμα 40 τ.μ. πάρκο. Η συνολική έκταση στην οποία μπορεί να φτιαχτεί πάρκο δεν ξεπερνά τα 2000 τ.μ. Ο επιχειρηματίας θέλει να προσδιορίσει

τον αριθμό γκαρσονιερών, μονοκατοικιών και διαμερισμάτων που πρέπει να φτιάξει ώστε να μεγιστοποιηθούν τα συνολικά μηνιαία έσοδα.

Διατυπώστε το πρόβλημα αυτό σαν πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού και έπειτα διατυπώστε το πρόβλημα αυτό στην AMPL παρέχοντας όσο το δυνατόν πιο δομημένη διατύπωση.

Άσκηση 4: Μία εταιρεία διαθέτει 3 αποθήκες (A_1 , A_2 και A_3) και 4 καταστήματα (K_1 , K_2 , K_3 και K_4). Η εταιρεία θέλει να μεταφέρει ένα προϊόν από τις αποθήκες στα καταστήματα. Η διαθεσιμότητα της αποθήκης A_i , συμβολίζεται με s_i , $i = 1, 2, 3$, και δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

Αποθήκη (A_i)	A_1	A_2	A_3
Διαθεσιμότητα (s_i)	150	200	350

Η ζήτηση του καταστήματος K_j , συμβολίζεται με d_j , $j = 1, 2, 3, 4$, και δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

Αποθήκη (K_j)	K_1	K_2	K_3	K_4
Ζήτηση (d_j)	100	200	250	150

Το κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος από την αποθήκη A_i στο κατάστημα K_j , συμβολίζεται με c_{ij} , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$, και δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

Κόστος μεταφοράς σε Ευρώ (c_{ij})

	K_1	K_2	K_3	K_4
A_1	2	3	4	3
A_2	1	1	2	2
A_3	4	5	3	4

Η κατανάλωση πετρελαίου για τη μεταφορά μιας μονάδας προϊόντος από την αποθήκη A_i στο κατάστημα K_j , συμβολίζεται με p_{ij} , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$, και δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

Κατανάλωση πετρελαίου σε λίτρα (p_{ij})

	K_1	K_2	K_3	K_4
A_1	0.4	0.3	0.4	0.2
A_2	0.1	0.4	0.2	0.5
A_3	0.3	0.1	0.1	0.4

Μπορούν να καταναλωθούν μέχρι 240 λίτρα πετρελαίου για τη μεταφορά.

Η εταιρεία θέλει να προσδιορίσει τις ποσότητες που θα μεταφερθούν από κάθε αποθήκη σε κάθε κατάστημα ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος μεταφοράς.

Διατυπώστε το πρόβλημα αυτό σαν πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού και έπειτα διατυπώστε το πρόβλημα αυτό στην AMPL παρέχοντας όσο το δυνατόν πιο δομημένη διατύπωση.

Άσκηση 1: Μία εταιρεία παράγει 3 προϊόντα: P_1, P_2 και P_3 . Το κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος P_j είναι k_j , $j = 1, 2, 3$. Η ζήτηση είναι τόσο μεγάλη που όλες οι ποσότητες που θα παραχθούν μπορούν να πωληθούν. Η παραγωγή κάθε προϊόντος γίνεται σε 3 στάδια και οι απαιτούμενες ώρες εργασίας στο στάδιο i για την παραγωγή μίας μονάδας προϊόντος P_j είναι a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Οι διαθέσιμες ώρες εργασίας στο στάδιο i είναι b_i , $i = 1, 2, 3$. Τα k_j, a_{ij} και b_i , $i, j = 1, 2, 3$, δίνονται από τον παρακάτω πίνακα.

	ώρες εργασίας (a_{ij})			
στάδιο $i \backslash$ προϊόν P_j	P_1	P_2	P_3	διαθ. ώρες (b_i)
1	2	1	3	1800
2	0	2	4	2000
3	5	3	0	2300
κέρδος (k_j)	4	5	7	

Η εταιρεία θέλει να προσδιορίσει τις ποσότητες που θα παραχθούν από κάθε προϊόν ώστε να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος.

Διατυπώστε το πρόβλημα αυτό σαν πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού και έπειτα διατυπώστε το πρόβλημα στην AMPL, παρέχοντας όσο το δυνατόν πιο δομημένη διατύπωση του προβλήματος.

Διατύπωση ως π.μ.π.

Μεταβλητές απόφασης

x_j = μονάδες που θα παραχθούν από το προϊόν $P_j, j=1,2,3$.

Π.μ.π.

$$\max \sum_{j=1}^3 k_j x_j$$

$$\text{υπό } \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1,2,3$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,3$$

Apxeio Production.mod

```
set Products;  
set Stages;
```

```
param profit{j in Products};  
param max_time{i in Stages};  
param production_time{i in Stages, j in Products};
```

```
var amount{j in Products} >= 0;
```

```
maximize Profit:
```

```
sum{j in Products} profit[j] * amount[j];
```

```
subject to Max_time{i in Stages}:
```

```
sum{j in Products} production_time[i,j] * amount[j] <= max_time[i];
```

Apxeio Production.dat

```
set Products := P1 P2 P3;  
set Stages := S1 S2 S3;
```

```
param profit := P1 4  
                P2 5  
                P3 7;
```

```
param max_time := S1 1800  
                  S2 2000  
                  S3 2300;
```

```
param production_time:      P1    P2    P3 :=  
    S1      2      1      3  
    S2      0      2      4  
    S3      5      3      0 ;
```

Άσκηση 2: Μια εταιρεία ετοιμάζεται να εισαγάγει στην αγορά ένα νέο προϊόν. Έχει επιλέξει για τη διαφημιστική εκστρατεία της 4 διαφημιστικά μέσα: τηλεόραση, ραδιόφωνο, περιοδικά και εφημερίδες. Το μοναδιαίο κόστος διαφήμισης και ο αντίστοιχος δείκτης αποτελεσματικότητας - ακροαματικότητας (ανά παρουσίαση) δίνεται στον επόμενο πίνακα

	Τηλεόραση	Ραδιόφωνο	Περιοδικά	Εφημερίδες
Κόστος	1000	100	600	400
Ακροαματικότητα	100	22	70	50

Η εταιρεία θέλει να μεγιστοποιήσει την ακροαματικότητα της εκστρατείας της αποφασίζοντας σε ποια διαφημιστικά μέσα θα κάνει διαφήμιση και το πλήθος των διαφημίσεων στα διάφορα μέσα λαμβάνοντας υπόψη τους ακόλουθους περιορισμούς:

- (1) Το συνολικό κόστος της εκστρατείας δεν μπορεί να υπερβαίνει τις 30000 ευρώ.
- (2) Λόγω της συχνότητας της έκδοσης των περιοδικών δεν μπορούν να τοποθετηθούν περισσότερες από 12 διαφημίσεις σε περιοδικά.
- (3) Πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 10 διαφημίσεις στην τηλεόραση και τουλάχιστον 10 διαφημίσεις στο ραδιόφωνο.
- (4) Μπορεί να κάνει διαφήμιση το πολύ σε 3 διαφημιστικά μέσα.

Διατυπώστε το πρόβλημα αυτό σαν πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού και έπειτα διατυπώστε το πρόβλημα στην AMPL, παρέχοντας όσο το δυνατόν πιο δομημένη διατύπωση του προβλήματος.

Διατύπωση ως π.μ.π

Θα χρησιμοποιήσουμε τον δείκτη j για τα διαφημιστικά μέσα

$j = 1 \rightarrow TV$

$j = 2 \rightarrow Radio$

$j = 3 \rightarrow Magazines$

$j = 4 \rightarrow Newspapers$

Παράμετροι: C = το μέγιστο χρηματικό ποσό που μπορεί να δοθεί για την εκστρατεία.

$m_j = 0$ ελάχιστος επιτρεπόμενος # διαφημίσεων στο μέσο j , $j=1,2,3,4$.

$M_j = 0$ μέγιστος επιτρεπόμενος # διαφημίσεων στο μέσο j , $j=1,2,3,4$.

N = το μέγιστο πλήθος μέσων στα οποία επιτρέπεται να γίνει διαφήμιση.

c_j = κόστος μιας διαφήμισης στο μέσο j , $j=1,2,3,4$.

e_j = αποτελεσματικότητα διαφήμισης στο μέσο j , $j=1,2,3,4$.

Στο συγχερίτι έιν προβλήτα:

$$C = 30.000$$

$$N = 3$$

j	m_j	M_j	C_j	e_j
1	10	100	1000	100
2	10	12	100	22
3	0	100	600	70
4	0	100	400	50

στα πέτανα
δεν έχουν
περιορισμό
βάστα 0

στα πέτανα
δεν έχουν
περιορισμό βάστα 0
μετά από ένα περπάτημα

Μεταβλητές απόφασης

$x_j = \begin{cases} 1 & \text{αν γίνει διαφημισμός στο πέτανο } j, j=1,2,3,4, \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$y_j = \# \text{ διαφημισεων στο πέτανο } j, j=1,2,3,4.$

Π.μ.ν.

$$\max \sum_{j=1}^4 e_j \cdot y_j$$

$$\text{υπό} \sum_{j=1}^4 C_j \cdot y_j \leq C$$

$$\sum_{j=1}^4 x_j \leq N$$

$$M_j \leq y_j \leq M_j \cdot x_j, j=1,2,3,4.$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j=1,2,3,4,$$

$$y_j \geq 0, j=1,2,3,4,$$

$$y_j \in \mathbb{Z}, j=1,2,3,4.$$

Apexio Advertisement.mod

set Media;

param cost {j in Media};

param efficiency {j in Media};

param min_advert {j in Media};

param max_advert {j in Media};

param max_cost;

param max_media;

var activate {j in Media} binary;

var number_advert {j in Media} >= 0 integer;

maximize Efficiency

sum {j in Media} efficiency[j] * number_advert[j];

subject to Cost:

sum {j in Media} cost[j] * number_advert[j] <= max_cost;

Subject to Max-media:

sum {j in Media} activate[j] <= max_media;

subject to Max_Min_advert {j in Media}:

min_advert[j] <= number_advert[j] <= max_advert[j] * activate[j];

Agxio Advertisement.dat

set Media:=TV Radio Magazines Newspapers;

param:	cost	efficiency	min_advert	max_advert:=
TV	1000	100	10	100
Radio	100	22	10	12
Magazines	600	70	0	100
Newspapers	400	50	0	100;

param max_cost:=30000;
param max_media:=3;

Άσκηση 3: Ένας επιχειρηματίας θέλει να επενδύσει σε μία περιοχή φτιάχνοντας γκαρσονιέρες, μονοκατοικίες, διαμερίσματα και πάρκα. Η μέγιστη ζήτηση από τους εν δυνάμει ενοικιαστές είναι 50 γκαρσονιέρες, 30 μονοκατοικίες και 25 διαμερίσματα. Τα μηνιαία έσοδα από τα ενοίκια υπολογίζονται στα 400 Ευρώ για κάθε γκαρσονιέρα, 800 Ευρώ για κάθε μονοκατοικία και 600 Ευρώ για κάθε διαμέρισμα. Για κάθε γκαρσονιέρα που χτίζει πρέπει να φτιάχνει και 20 τ.μ. πάρκο. Αντίστοιχα, για κάθε μονοκατοικία θα πρέπει να φτιάχνει 70 τ.μ. πάρκο και για κάθε διαμέρισμα 40 τ.μ. πάρκο. Η συνολική έκταση στην οποία μπορεί να φτιαχτεί πάρκο δεν ξεπερνά τα 2000 τ.μ. Ο επιχειρηματίας θέλει να προσδιορίσει τον αριθμό γκαρσονιερών, μονοκατοικιών και διαμερισμάτων που πρέπει να φτιάξει ώστε να μεγιστοποιηθούν τα συνολικά μηνιαία έσοδα.

Διατυπώστε το πρόβλημα αυτό σαν πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού και έπειτα διατυπώστε το πρόβλημα αυτό στην AMPL παρέχοντας όσο το δυνατόν πιο δομημένη διατύπωση.

Διατύπωση ως n.m.p.

Χρησιμοποιούμε τον δείκτη j για τον τύπο κατοικίας:

$j=1 \rightarrow \text{studio}$

$j=2 \rightarrow \text{detached}$

$j=3 \rightarrow \text{flat}$

Παράμετροι

M_j = μέγιστος # κατοικιών τύπου j , $j=1,2,3$,

r_j = μηνιαία έσοδα από ενοίκια κατοικίας τύπου j , $j=1,2,3$,

p_j = έκταση πάρκου που πρέπει να φτιαχτεί για μία κατοικία τύπου j , $j=1,2,3$,

P = μέγιστη διαθέσιμη έκταση για πάρκο.

Στο συγμεινόμενο πρόβλημα

j	M_j	r_j	p_j
1	50	400	20
2	30	800	70
3	25	600	40

$$P = 2000$$

Μεταβλητές απόφασης:

$x_j = \text{πλάνθος κατοικιών τύπου } j \text{ να } \text{be} \text{ φτιαχτούν, } j=1,2,3.$

Π.Μ.Π.

$$\max \sum_{j=1}^3 r_j x_j$$

$$\text{υπό } x_j \leq M_j, j=1,2,3$$

$$\sum_{j=1}^3 p_j x_j \leq P,$$

$$x_j \geq 0, j=1,2,3$$

$$x_j \in \mathbb{Z}, j=1,2,3$$

Απειρο construction. mod

set Buildings;

param max-number {j in Buildings};

param rent {j in Buildings};

param perk {j in Buildings};

param max-perk;

var number {j in Buildings} >= 0 integer;

maximize Rent:

sum {j in Buildings} rent[j] * number[j];

Subject to Max-number {j in Buildings}:

number[j] <= max-number;

Subject to Perk:

sum {j in Buildings} perk[j] * number[j] <= max-perk;

Apexio construction.dat

set Buildings := studio detached flat;

param:	max-number	rent	park :=
studio	50	400	20
detached	30	800	70
flat	25	600	40;

param max-park := 2000;

Άσκηση 4: Μία εταιρεία διαθέτει 3 αποθήκες (A_1 , A_2 και A_3) και 4 καταστήματα (K_1 , K_2 , K_3 και K_4). Η εταιρεία θέλει να μεταφέρει ένα προϊόν από τις αποθήκες στα καταστήματα. Η διαθεσιμότητα της αποθήκης A_i , συμβολίζεται με s_i , $i = 1, 2, 3$, και δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

Αποθήκη (A_i)	A_1	A_2	A_3
Διαθεσιμότητα (s_i)	150	200	350

Η ζήτηση του καταστήματος K_j , συμβολίζεται με d_j , $j = 1, 2, 3, 4$, και δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

Αποθήκη (K_j)	K_1	K_2	K_3	K_4
Ζήτηση (d_j)	100	200	250	150

Το κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος από την αποθήκη A_i στο κατάστημα K_j , συμβολίζεται με c_{ij} , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$, και δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

Κόστος μεταφοράς σε Ευρώ (c_{ij})

	K_1	K_2	K_3	K_4
A_1	2	3	4	3
A_2	1	1	2	2
A_3	4	5	3	4

Η κατανάλωση πετρελαίου για τη μεταφορά μιας μονάδας προϊόντος από την αποθήκη A_i στο κατάστημα K_j , συμβολίζεται με p_{ij} , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$, και δίνεται από τον παρακάτω πίνακα.

Κατανάλωση πετρελαίου σε λίτρα (p_{ij})

	K_1	K_2	K_3	K_4
A_1	0.4	0.3	0.4	0.2
A_2	0.1	0.4	0.2	0.5
A_3	0.3	0.1	0.1	0.4

Μπορούν να καταναλωθούν μέχρι 240 λίτρα πετρελαίου για τη μεταφορά.

Η εταιρεία θέλει να προσδιορίσει τις ποσότητες που θα μεταφερθούν από κάθε αποθήκη σε κάθε κατάστημα ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος μεταφοράς.

Διατυπώστε το πρόβλημα αυτό σαν πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού και έπειτα διατυπώστε το πρόβλημα αυτό στην AMPL παρέχοντας όσο το δυνατόν πιο δομημένη διατύπωση.

Διατύπωση ως π.μ.π

Μεταβλητές απόφασης:

x_{ij} = ποσότητα που θα μεταφερθεί από την αποθήκη i στο κατάστημα j , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned}
 \text{n.p.n : } \quad & \min \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} \\
 \text{una} \quad & \sum_{j=1}^4 x_{ij} \leq s_i, \quad i=1,2,3 \\
 & \sum_{i=1}^3 x_{ij} \geq d_j, \quad j=1,2,3,4 \\
 & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 p_{ij} x_{ij} \leq 240 \\
 & x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3,4.
 \end{aligned}$$

Agexio transportation.mod

set Warehouses;

set Shops;

param supply {i in Warehouses};

param demand {j in Shops};

param cost {i in Warehouses, j in Shops};

param fuel {i in Warehouses, j in Shops};

param max_fuel;

var amount {i in Warehouses, j in Shops} >= 0;

minimize Cost:

sum {i in Warehouses, j in Shops} cost [i, j] * amount [i, j];

subject to Supply {i in Warehouses}:

sum {j in Shops} amount [i, j] <= supply [i];

subject to Demand {j in Shops}:

sum {i in Warehouses} amount [i, j] >= demand [j];

subject to Fuel:

sum {i in Warehouses, j in Shops} fuel [i, j] * amount [i, j] <= max_fuel;

Apx io transportation.dat

set Warehouses := A1 A2 A3;

set Shops := S1 S2 S3 S4;

param supply := A1 150
A2 200
A3 350;

param demand := S1 100
S2 200
S3 250
S4 150;

param cost: S1 S2 S3 S4 :=
A1 2 3 4 3
A2 1 1 2 2
A3 4 5 3 4;

param fuel: S1 S2 S3 S4 :=
A1 0.4 0.3 0.4 0.2
A2 0.1 0.4 0.2 0.5
A3 0.3 0.1 0.1 0.4;

param max-fuel := 240;