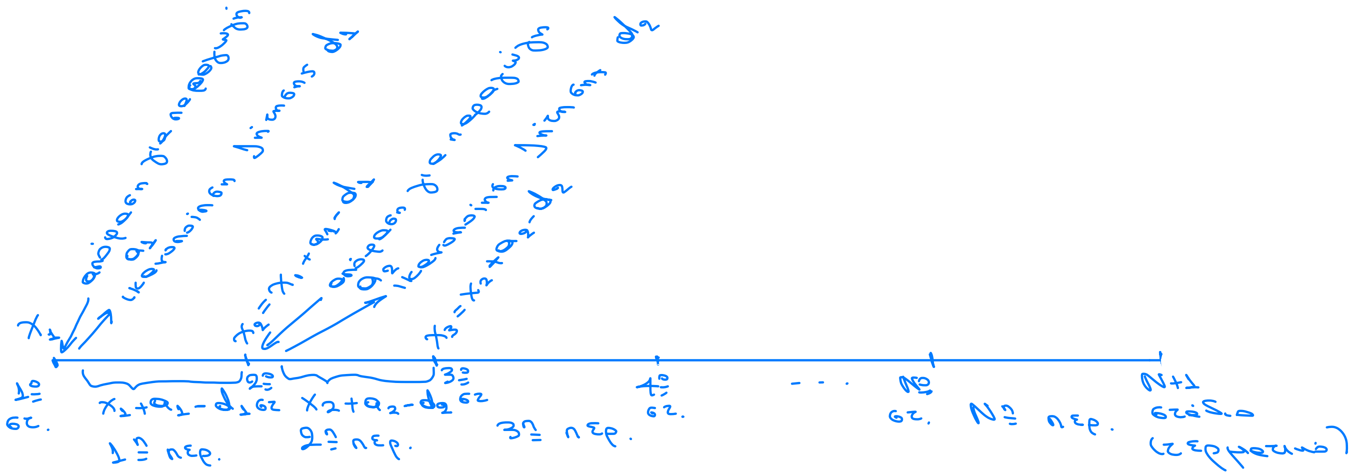
Πρόβλημα Ελέγχου Αποθεμάτων

- Εταιρεία παράγει ένα προϊόν και πρόκειται να λειτουργήσει τις επόμενες N χρονικές περιόδους.
- Στην αρχή κάθε περιόδου, η εταιρεία αποφασίζει την ποσότητα προϊόντος που θα παράξει για να καλύψει τη ζήτηση της περιόδου ή να χρησιμοποιηθεί σαν απόθεμα για επόμενες περιόδους.
- Μετά την παραγωγή προϊόντων ικανοποιείται η ζήτηση, η οποία θεωρείται γνωστή. Το απόθεμα αποθηκεύεται για μελλοντική χρήση.
- Θέλουμε να βρούμε τον βέλτιστο προγραμματισμό παραγωγής (αριθμό μονάδων που θα παραχθούν σε μια περίοδο), ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος (κόστος παραγωγής και αποθήκευσης).

Πρόβλημα Ελέγχου Αποθεμάτων

Δεδομένα:

- N = μήκος χρονικού ορίζοντα
- d_t = ζήτηση την περίοδο t, $t = 1, 2, \ldots, N$
- m = μέγιστη δυνατή παραγωγή σε ~~ένα στάδιο~~ μία περίοδο
- M = χωρητικότητα αποθήκης
- $k_t(a)$ = κόστος για παραγωγή a μονάδων την περίοδο t, $t = 1, 2, \ldots, N$
- h_t = μοναδιαίο κόστος αποθήκευσης για την περίοδο t, $t = 1, 2, \ldots, N$
- x_1 = αρχικό απόθεμα


x_1
απόφαση για παραγωγή a_1
ικανοποίηση ζήτησης d_1
$x_2 = x_1 + a_1 - d_1$
απόφαση για παραγωγή a_2
ικανοποίηση ζήτησης d_2
$x_3 = x_2 + a_2 - d_2$
1ο στ.
$x_1 + a_1 - d_1$
2ο στ
$x_2 + a_2 - d_2$
3ο στ
4ο στ.
. . .
Νο στ.
N+1 στάδιο (τερματικό)
1η περ.
2η περ.
3η περ.
Νη περ.

Πρόβλημα Ελέγχου Αποθεμάτων

1. Να διατυπωθεί το πρόβλημα ως π.δ.π.
2. Να βρεθεί βέλτιστος προγραμματισμός παραγωγής για το πρόβλημα με τα παρακάτω δεδομένα:

$$N = 3,\ m = 4,\ M = 3,\ x_1 = 1,$$

$$d_t = 3,\ h_t = 1,\ t = 1, 2, 3,$$

a_t	0	1	2	3	4
$k_t(a_t)$	0	5	9	13	14

(1) Διατύπωση προβλήματος ως π.Δ.π.

Στάδια: $t = 1, 2, \dots, N$ $\;N+1 \rightarrow$ τερματικό στάδιο

Στην αρχή κάθε περιόδου αποφασίζουμε την ποσότητα προϊόντος που θα παραχθεί.

N = μήκος χρονικού ορίζοντα.

Καταστάσεις: x_t = απόθεμα στην αρχή της περιόδου t.

Αποφάσεις: a_t = # μονάδων προϊόντος που θα παραχθούν την περίοδο t

$D_t(x_t)$

$a_t \in \mathbb{N}$

$a_t \geq 0$

$a_t \leq m$ (δυναμικότητα παραγωγής)

$\underbrace{x_t + a_t - d_t}_{\text{ποσότητα που αποθηκεύεται την περίοδο } t} \leq M$ (χωρητικότητα αποθήκης)

$\Leftrightarrow a_t \leq M + d_t - x_t$

$x_t + a_t \geq d_t$ (ικανοποίηση ζήτησης)

$\Leftrightarrow a_t \geq d_t - x_t$

$$D_t(x_t) = \{a_t \in \mathbb{N} : \max\{0, d_t - x_t\} \leq a_t \leq \min\{m, M + d_t - x_t\}\}$$

Δυναμική συστήματος

$$x_{t+1} = g_t(x_t, a_t)$$

$$x_{t+1} = x_t + a_t - d_t$$

Άμεσο κόστος

$$c_t(x_t, a_t) = \underbrace{k_t(a_t)}_{\text{κόστος παραγωγής}} + \underbrace{h_t \cdot (x_t + a_t - d_t)}_{\text{κόστος αποθήκευσης}}$$

Τερματικό κόστος

$$\hat{c}(x_{N+1}) = 0$$

Εξισώσεις βελτιστοποίησης

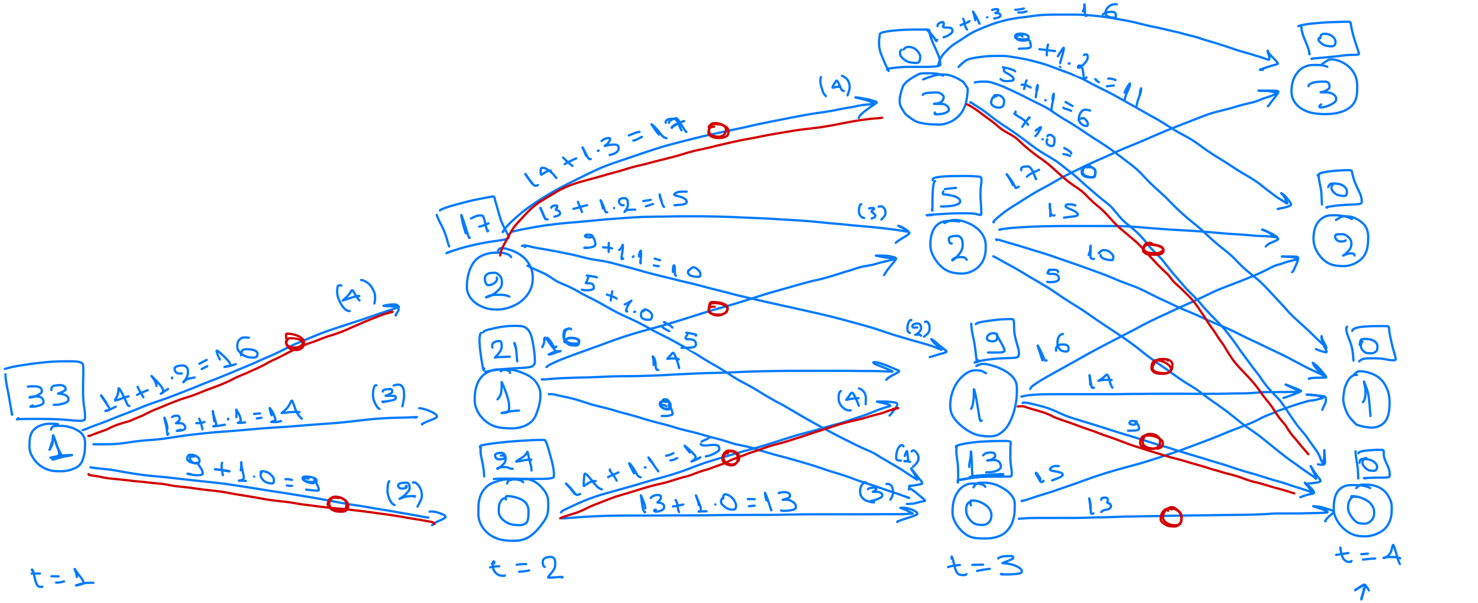
$$v(t, x_t) = \cancel{\max/} \min_{a_t \in D_t(x_t)} \{c_t(x_t, a_t) + v(t+1, g_t(x_t, a_t))\}, \ t = 1, 2, \ldots, N$$

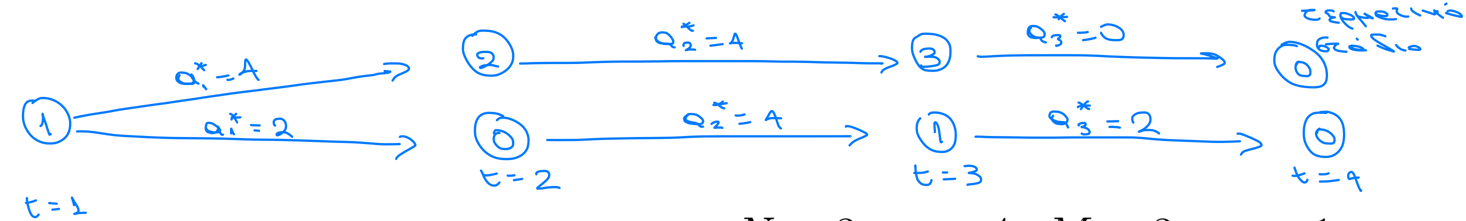
με τερματικές συνθήκες

$$v(N+1, x_{N+1}) = \hat{c}(x_{N+1}),$$

όπου

$v(t, x_t)$ = ελάχιστο κόστος ~~ή μέγιστο κέρδος~~ από το στάδιο t μέχρι το τέλος, αν στην αρχή του σταδίου t ~~το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση x_t.~~ έχω απόθεμα x_t





Ελάχιστο κόστος = 33

$$N = 3,\ m = 4,\ M = 3,\ x_1 = 1,$$

$$d_t = 3,\ h_t = 1,\ t = 1, 2, 3,$$

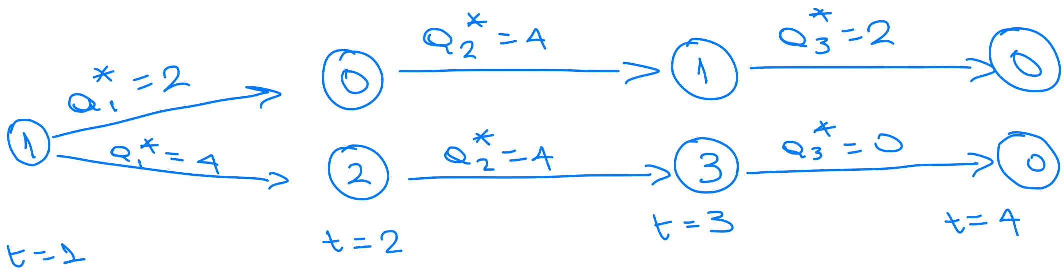
a_t	0	1	2	3	4
$k_t(a_t)$	0	5	9	13	14

Επίλυση με πίνακα

t	x_t	a_t	$C_t(a_t, x_t)$	x_{t+1}	$v(t, x_t)$
1	1	2	9	0	$9+24=33$*
		3	14	1	$14+21=35$
		4	16	2	$16+17=33$*
2	0	3	13	0	$13+13=26$
		4	15	1	$15+9=24$*
	1	2	9	0	$9+13=22$
		3	14	1	$14+9=23$
		4	16	2	$16+5=21$*
	2	1	5	0	$5+13=18$
		2	10	1	$10+9=19$
		3	15	2	$15+5=20$
		4	17	3	$17+0=17$*
3	0	3	13	0	$13+0=13$ *
		4	15	1	$15+0=15$
	1	2	9	0	$9+0=9$ *
		3	14	1	$14+0=14$
		4	16	2	$16+0=16$
	2	1	5	0	$5+0=5$ *
		2	10	1	$10+0=10$
		3	15	2	$15+0=15$
		4	17	3	$17+0=17$
	3	0	0	0	$0+0=0$ *
		1	6	1	$6+0=6$
		2	11	2	$11+0=11$
		3	16	3	$16+0=16$

t	x_t	a_t	$C_t(x_t, a_t)$	x_{t+1}	$V(t, x_t)$
4	0				0
	1				0
	2				0
	3				0

Ελάχιστο κόστος = 33



Πρόβλημα Κατανομής Πόρων ή Φόρτωσης Φορτίου

- Υπάρχουν b μονάδες κάποιου αγαθού (π.χ. κεφάλαιο χρημάτων, ώρες εργασίας, μονάδες πρώτης ύλης) οι οποίες πρέπει να κατανεμηθούν σε N δραστηριότητες.
- Έστω:
  - a_t = ένταση δραστηριότητας t, $t = 1, 2, \ldots, N$
  - $\pi_t(a_t)$ = η ποσότητα του αγαθού που απαιτείται για να κάνουμε τη δραστηριότητα t με ένταση a_t, $t = 1, 2, \ldots, N$
  - $R_t(a_t)$ = απόδοση δραστηριότητας t αν γίνει με ένταση a_t, $t = 1, 2, \ldots, N$
- Θέλουμε να βρούμε τη βέλτιστη κατανομή των b μονάδων του αγαθού στις N δραστηριότητες, ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική απόδοση.

Πρόβλημα Κατανομής Πόρων ή Φόρτωσης Φορτίου

1. Να διατυπωθεί το πρόβλημα ως π.δ.π.
2. Να βρεθεί βέλτιστη κατανομή πόρων στο παρακάτω πρόβλημα:
   =3 δρασ.
   Ένας οδηγός θέλει να φορτώσει το φορτηγό του με κουτιά 3 τύπων. Ο διαθέσιμος όγκος είναι $b=$ 9 μονάδες. Η αξία ενός κουτιού τύπου t είναι w_t και ο όγκος είναι v_t, $t = 1, 2, 3$.

t	v_t	w_t
1	3	7
2	6	15
3	4	12

Να βρεθεί πόσα κουτιά από κάθε τύπο πρέπει να φορτωθούν ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική αξία.

(1) Διατύπωση ως π.δ.π

Στάδια

Στο στάδιο t αποφασίζω την έκταση με την οποία θα κάνω τη δραστηριότητα t, $t=1,2,\dots,N$

$t = N+1$: τερματικό στάδιο

N = μήκος χρονικού ορίζοντα.

Κατάσταση

x_t = μονάδες του αγαθού που απομένουν για τα επόμενα στάδια

$x_1 = b$

Αποφάσεις

a_t = έκταση με την οποία θα κάνω τη δραστηριότητα t

$$D_t(x_t) = \{ a_t : r_t(a_t) \leq x_t \}$$

Δυναμική συστήματος

$$x_{t+1} = g_t(x_t, a_t)$$

$$x_{t+1} = x_t - r_t(a_t)$$

Άμεσο κέρδος

$$C_t(x_t, a_t) = f_t(a_t)$$

Τερματικό κέρδος

$$\hat{C}(x_{N+1}) = 0$$

- **Εξισώσεις Βελτιστοποίησης / Bellman:**

$$v(t,x_t) = \max / \underset{a_t \in D_t(x_t)}{\cancel{\min}} \{c_t(x_t,a_t) + v(t+1, g_t(x_t,a_t))\},\ t = 1,2,\ldots,N$$

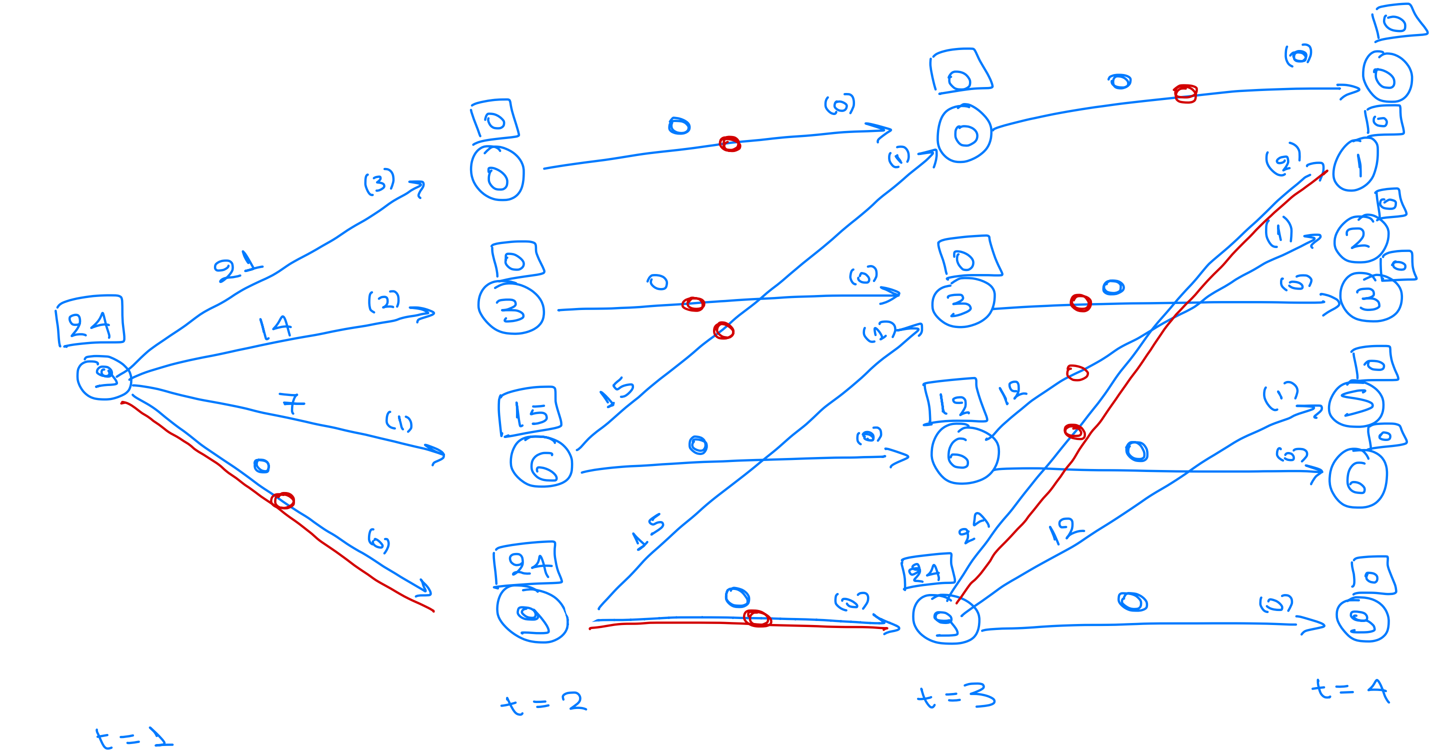
με τερματικές συνθήκες

$$v(N+1, x_{N+1}) = \hat{c}(x_{N+1}),$$

όπου

μέγιστη ωφέλεια

$v(t,x_t)$ = ε~~λάχιστο κόστος ή μέγιστο κέρδος~~ από το στάδιο t μέχρι το τέλος, αν στην αρχή του σταδίου t ~~το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση x_t.~~ η υπολειπόμενη ποσότητα του αγαθού είναι x_t.



μέγιστη αξία = 24

$b = 9$

$$9 \xrightarrow{a_1^*=0} 9 \xrightarrow{a_2^*=0} 9 \xrightarrow{a_3^*=2} 1$$

t = 1 t = 2 t = 3 t = 4

t	v_t	w_t
1	3	7
2	6	15
3	4	12