Επιχειρησιακή Έρευνα
Ενότητα 6
Προβλήματα Δυναμικού Προγραμματισμού

Αθανασία Μάνου

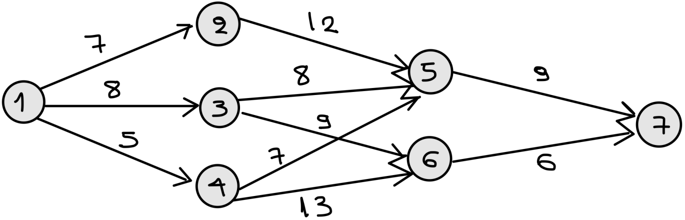
Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

Γενικά χαρακτηριστικά π.δ.π.

- Ασχολούμαστε με προβλήματα στα οποία οι αποφάσεις λαμβάνονται σε στάδια.
- Παραδείγματα:
  Παραγωγή ενός προϊόντος σε πολλές περιόδους.
  Συντήρηση/αντικατάσταση μηχανήματος.
  Πρόβλημα κατανομής πόρων.
  Πρόβλημα φόρτωσης φορτίου.
- Σε κάθε στάδιο πρέπει να λάβω μια απόφαση. Η απόφαση που θα πάρω σε ένα στάδιο έχει κάποιο κόστος/κέρδος και συνδέεται με την κατάσταση που θα βρεθώ στην αρχή του επόμενου σταδίου.
- Κεντρική ιδέα: Σπάμε το πρόβλημα σε υποπροβλήματα (στάδια) και σε κάθε υποπρόβλημα έχω μία μεταβλητή απόφασης.

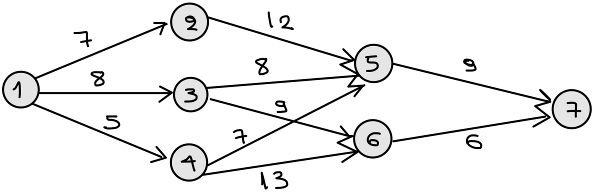
Παράδειγμα: Πρόβλημα Ελάχιστης Διαδρομής

Δίνεται ο παρακάτω χάρτης.



Ψάχνουμε την ελάχιστη διαδρομή από την πόλη 1 στην πόλη 7.

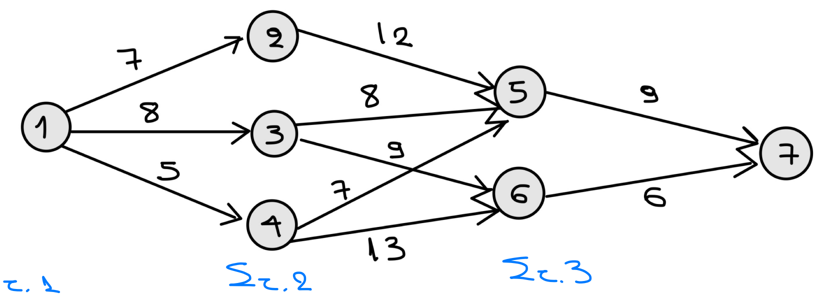
Παράδειγμα: Πρόβλημα Ελάχιστης Διαδρομής



Στάδιο 1 Στάδιο 2 Στάδιο 3

Παρατηρήσεις:

- Κάθε διαδρομή αποτελείται από 3 βήματα (στάδια). Άρα, θα πάρουμε 3 διαδοχικές αποφάσεις.
- Σε κάθε βήμα, ανάλογα με την πόλη (κατάσταση) στην οποία βρίσκομαι, έχω διαφορετικές δυνατές αποφάσεις.
- Κάθε απόφαση έχει κάποιο κόστος και οδηγεί σε συγκεκριμένη επόμενη πόλη (κατάσταση).



$v(x)$ = μήκος ελάχιστης διαδρομής από την πόλη x στην πόλη 7.

Θέλουμε να βρούμε το $v(1)$.

Στάδιο 3

$v(5) = 9$, $a^*(5) = 7$ → Η βέλτιστη απόφαση όταν είμαι στην πόλη 5 είναι να πάω στην 7.

$v(6) = 6$, $a^*(6) = 7$

Στάδιο 2

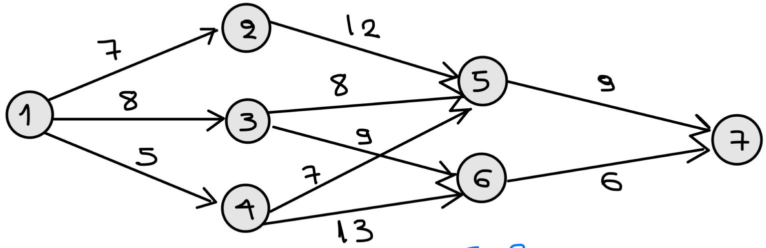
$v(2) = 12 + v(5) = 12 + 9 = 21$, $a^*(2) = 5$

$$v(3) = \min\Big\{ \underbrace{8 + v(5)}_{\text{αποφ } 5} , \underbrace{9 + v(6)}_{\text{αποφ } 6} \Big\} = \min\{8+9, 9+6\} = \min\{17, 15\} = 15,$$

$a^*(3) = 6$

$$v(4) = \min\Big\{ \underbrace{7 + v(5)}_{\text{αποφ } 5} , \underbrace{13 + v(6)}_{\text{αποφ } 6} \Big\} = \min\{7+9, 13+6\} = \min\{16, 19\} = 16$$

$a^*(4) = 5$



Στ. 1 Στ. 2 Στ. 3

Στάδιο 1

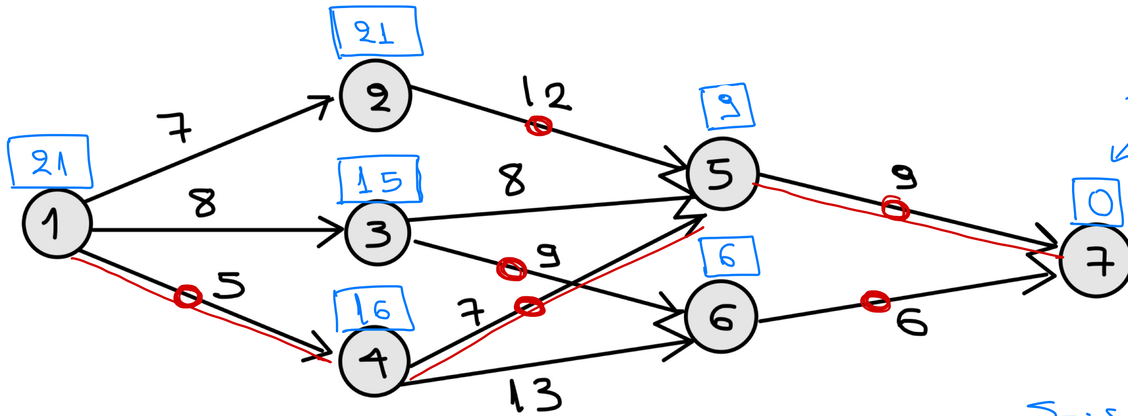
$$v(1) = \min\{\underbrace{7+v(2)}_{\text{απόφ. 2}}, \underbrace{8+v(3)}_{\text{απόφ 3}}, \underbrace{5+v(4)}_{\text{απόφ. 4}}\}$$

$$= \min\{7+21, \; 8+15, \; 5+16\} =$$

$$= \min\{28, 23, 21\} = 21, \quad a^*(1) = 4.$$

$$1 \xrightarrow{a^*(1)=4} 4 \xrightarrow{a^*(4)=5} 5 \xrightarrow{a^*(5)=7} 7$$

Στάδιο 1 Στάδιο 2 Στάδιο 3



Τερματικό κόστος

Στάδιο 1

Στάδιο 2

Στάδιο 3

Στάδιο 4

Τερματικό στάδιο - δε λαμβάνουμε αποφάσεις.

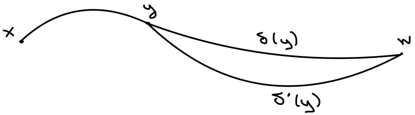
$$1 \xrightarrow{a^*(1) = 4} 4 \xrightarrow{a^*(4) = 5} 5 \xrightarrow{a^*(5) = 7} 7$$

Στάδιο 1 Στάδιο 2 Στάδιο 3

Αρχή Βελτιστοποίησης Bellman

Αρχή Βελτιστοποίησης Bellman

Αν $\delta(x) = ((x, y), \delta(y))$ η βέλτιστη διαδρομή από το x στο w, τότε η $\delta(y)$ είναι η βέλτιστη διαδρομή από το y στο w.



Απόδειξη: Έστω ότι η $\delta(y))$ δεν είναι η βέλτιστη διαδρομή από το y στο w και υπάρχει $\delta'(y))$ με μικρότερο κόστος. Τότε η $\delta'(x) = ((x, y), \delta'(y))$ έχει μικρότερο κόστος από τη $\delta(x)$. Άτοπο.

Συμβολισμοί - Ορισμοί

Σε ένα πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα με ντετερμινιστική δυναμική ορίζουμε:

- **Στάδια:**
  N = αριθμός σταδίων = αριθμός διαδοχικών αποφάσεων
  Για τα στάδια χρησιμοποιούμε τον δείκτη $t = 1, 2, \ldots, N+1$
  $t = N + 1$: τερματικό στάδιο (δε λαμβάνω απόφαση)

- **Καταστάσεις:**
  x_t = κατάσταση στο στάδιο t (στην αρχή του σταδίου, πριν πάρω απόφαση)
  S_t = χώρος καταστάσεων στο στάδιο t (πεπερασμένος)

- **Αποφάσεις:**
  a_t = απόφαση στο στάδιο t
  $D_t(x_t)$ = δέσμη δυνατών απόφασεων όταν στην αρχή του σταδίου t βρίσκομαι στην κατάσταση x_t (πεπερασμένη)

Συμβολισμοί - Ορισμοί

- **Δυναμική Συστήματος:**
  Ο μηχανισμός που ορίζει την κατάσταση του επόμενου σταδίου σαν αποτέλεσμα της τωρινής κατάστασης και της απόφασης.

$$x_{t+1} = g_t(x_t, a_t)$$

- **Άμεσο Κέρδος/Κόστος:** $c_t(x_t, a_t)$
- **Τερματικό Κέρδος/Κόστος:** $\hat{c}(x_{N+1})$

Συμβολισμοί - Ορισμοί

- **Εξισώσεις Βελτιστοποίησης / Bellman:**

$v(t, x_t) = \max / \min_{a_t \in D_t(x_t)} \{c_t(x_t, a_t) + v(t+1, g_t(x_t, a_t))\}, \; t = 1, 2, \ldots, N$

με τερματικές συνθήκες

$$v(N+1, x_{N+1}) = \hat{c}(x_{N+1}),$$

όπου

$v(t, x_t)$ = ελάχιστο κόστος ή μέγιστο κέρδος από το στάδιο t μέχρι το τέλος, αν στην αρχή του σταδίου t το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση x_t.

Πρόβλημα Αντικατάστασης/Συντήρησης Μηχανήματος

Έχουμε ένα μηχάνημα και θέλουμε να το χρησιμοποιήσουμε για τα επόμενα N έτη. Στην αρχή κάθε έτους αποφασίζουμε αν θα το αντικαταστήσουμε με νέο ή θα το συντηρήσουμε.

Δεδομένα:

- $c(x)$ = ετήσιο κόστος συντήρησης μηχανήματος που στην αρχή του έτους έχει ηλικία x
- $k(x)$ = τιμή μεταπώλησης μηχανήματος ηλικίας x
- T = τιμή αγοράς νέου μηχανήματος
- M = ανώτατο όριο ηλικίας

Ζητούμενα:

Προγραμματισμός αντικατάστασης/συντήρησης που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Πρόβλημα Αντικατάστασης/Συντήρησης Μηχανήματος

1. Να διατυπωθεί το πρόβλημα ως π.δ.π.
2. Να βρεθεί βέλτιστη πολιτική αντικατάστασης/συντήρησης για το πρόβλημα με τα παρακάτω δεδομένα:

$$N = 4,\ M = 5,\ x_1 = 2,\ T = 70$$

x	$c(x)$	$k(x)$
0	5	–
1	10	55
2	15	40
3	20	30
4	25	20
5	–	10

1) Διατύπωση ως π.Δ.π.

- **Στάδια:** Λαμβάνουμε την απόφαση να αντικαταστήσω ή να συντηρήσω στην αρχή κάθε έτους.

  N στάδια

  $t = 1, 2, \dots, N, N+1$

  $N+1$: τερματικό στάδιο

- **Καταστάσεις:** x_t: ηλικία μηχανήματος στην αρχή του σταδίου t.

- **Αποφάσεις:**

$$a_t = \begin{cases} 1, & \text{αντικατάσταση} \\ 2, & \text{συντήρηση} \end{cases}$$

$$D_t(x_t) = \begin{cases} \{1, 2\}, & x_t < M \\ \{1\}, & x_t = M \end{cases}$$

- **Δυναμική συστήματος:**

$$x_{t+1} = g_t(x_t, a_t) = \begin{cases} 1, & a_t = 1 \\ x_t + 1, & a_t = 2 \end{cases}$$

- **Άμεσο κόστος:**

$$c_t(x_t, a_t) = \begin{cases} T - k(x_t) + c(0), & a_t = 1 \\ c(x_t), & a_t = 2 \end{cases}$$

□ Τερματικό κόστος: $\hat{c}(x_{N+1}) = -k(x_{N+1})$

Εξισώσεις βελτιστοποίησης

$$v(t,x_t) = \cancel{\max /} \min_{a_t \in D_t(x_t)} \{c_t(x_t,a_t) + v(t+1, g_t(x_t,a_t))\},\ t = 1,2,\dots,N$$

με τερματικές συνθήκες

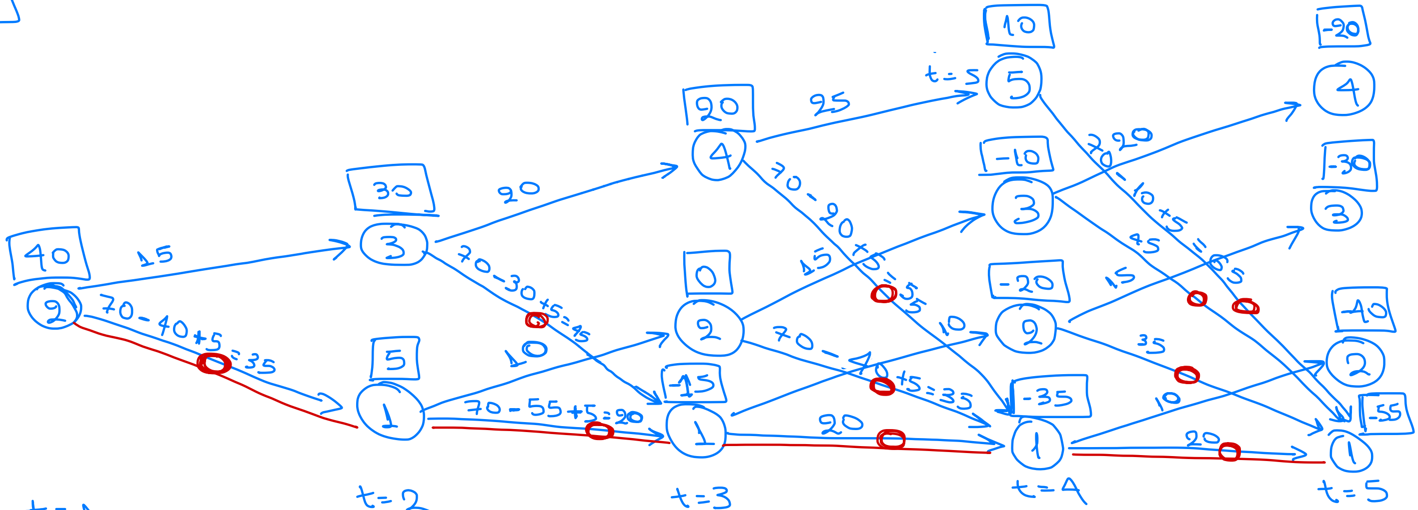
$$v(N+1, x_{N+1}) = \hat{c}(x_{N+1}),$$

όπου

αντικατάστασης | συντήρησης

$v(t,x_t)$ = ελάχιστο κόστος ~~ή μέγιστο κέρδος~~ από το στάδιο t μέχρι το τέλος, αν στην αρχή του σταδίου t το ~~σύστημα~~ μηχάνημα ~~βρίσκεται στην κατάσταση~~ x_t. έχει ηλικία x_t.

2)



ελάχιστο κόστος = 40