

Προβλήματα κυρτού προγραμματισμού

- κοίδη α.β.
- εφικτή περιοχή κυρτό σύνολο

Βελτιστοποίηση υπό ανισοτικούς περιορισμούς: I

- Θεωρούμε το π.μ-γ.π.

$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{υπό} & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \end{array} \quad (\text{ΠΚΠ-1})$$

με $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κοίλη, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτές,
 $i = 1, 2, \dots, p$, και οι f και g_i είναι διαφορίσιμες
τουλάχιστον δυο φορές με συνεχείς παραγώγους,
 $i = 1, 2, \dots, p$.

- Ορίζουμε τη Λαγκραντζιανή του π.μ-γ.π.

$$\begin{aligned} & L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^p \mu_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

- Τα μ_i αναφέρονται ως πολλαπλασιαστές Lagrange.

Βελτιστοποίηση υπό ανισοτικούς περιορισμούς: I

- Αν υπάρχουν $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^p$:

Συθήσεις
Karush-Kuhn-Tucker
KKT

$$\begin{aligned} \mu_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, && \rightarrow \text{οι πολλαπλασιαστές} \geq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*, \mu) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, && \rightarrow \text{μερική παράγωγος της } L \text{ ως προς } x_j = 0, \forall x_j \\ \mu_i g_i(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \\ g_i(\mathbf{x}^*) &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \end{aligned}$$

τότε το \mathbf{x}^* είναι βέλτιστη λύση του ΠΚΠ-1.

→ πολλαπλασιαστές λ
ενίσχυση συνέργειας
→ ικανοποιείται όλοι οι περιορισμοί του προβλήματος.

Παράδειγμα

Δίνεται το π.μ.π.π.

$$\max -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$$

υπό

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

(i) Ν.Σ.ο είναι π.κ.π.

(ii) Να αποδείξει με ανώτατες Karush-Kuhn-Tucker.

Λύση

Γοδύναμε το πρόβλημα γράφεται

$$\max -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$$

υπό

$$5x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0$$

Για ν.Σ.ο πρόβλημα κυρτών προχρηματισμού, αρκεί
ν.Σ.ο $f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$ υοιάνη

και $g_1(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 - 10$ υρπώνη

Η g_1 είναι υρπώνη ως γραμμική.

Για v.s.o η f υοίτην, αρκεί v.s.o ο $Hf(x_1, x_2)$ είναι
σπντικιά σπντικίως.

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = (-6x_1 + 2x_2 - 2, -4x_2 + 2x_1 + 3)$$

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|6| = 6 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 - (-2)(-2) = 24 - 4 = 20 > 0$$

$-Hf(x_1, x_2)$ θετική σπντικίως \Rightarrow

$Hf(x_1, x_2)$ αρνητική σπντικίως \Rightarrow

f γν. υοίτην.

Άρα, έχω σπντικίως.

$$(ii) \max -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{und} \quad 5x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0$$

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$$

$$g_1(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 - 10$$

Θεωρούμε τον πολλαπλασιαστή μ_1 και έχουμε ως συνάρτηση Lagrange:

$$L(x_1, x_2, \mu_1) = f(x_1, x_2) - \mu_1 g_1(x_1, x_2)$$

$$= -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 - \mu_1(5x_1 + 2x_2 - 10)$$

Συνθήκες KKT:

$$\mu_1 \geq 0 \quad \text{KKT-1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow -6x_1 + 2x_2 - 2 - 5\mu_1 = 0 \quad \text{KKT-2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow -4x_2 + 2x_1 + 3 - 2\mu_1 = 0 \quad \text{KKT-3}$$

$$\mu_1 \cdot (5x_1 + 2x_2 - 10) = 0 \quad \text{KKT-4}$$

$$5x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0 \quad \text{KKT-5}$$

Ποιες η Επικριτικές: $\mu_2 > 0$ ή $\mu_1 = 0$.

I) $\mu_2 = 0$

KKT-2 $\mu_1 = 0 \Rightarrow -6x_1 + 2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 1 + 3x_1$ ①

KKT-3 $\mu_1 = 0 \Rightarrow -4x_2 + 2x_1 = -3$ ②

$-4(1 + 3x_1) + 2x_1 = -3 \Rightarrow$
 $-4 - 12x_1 + 2x_1 = -3 \Rightarrow$
 $-10x_1 = 1 \Rightarrow$
 $x_1 = -\frac{1}{10}$ ②

① ② $\Rightarrow x_2 = 1 + 3\left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{7}{10}$

Επιβεβαιώνεται ότι ες 0, 6, 4, 0, 5, 2 ες.

Άρα $(x_1^*, x_2^*) = \left(-\frac{1}{10}, \frac{7}{10}\right)$

II) $\mu_2 > 0$

KKT-4 $\mu_2 > 0 \Rightarrow 5x_1 + 2x_2 - 10 = 0 \Rightarrow x_2 = 5 - \frac{5}{2}x_1$ ③

KKT-2 ③ $\Rightarrow -6x_1 + 2\left(5 - \frac{5}{2}x_1\right) - 2 - 5\mu_2 = 0 \Rightarrow$
 $-6x_1 + 10 - 5x_1 - 2 - 5\mu_2 = 0 \Rightarrow$
 $-11x_1 + 8 - 5\mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_2 = \frac{8}{5} - \frac{11}{5}x_1$ ④

KKT-3 ③, ④ $\Rightarrow -4\left(5 - \frac{5}{2}x_1\right) + 2x_1 + 3 - 2\left(\frac{8}{5} - \frac{11}{5}x_1\right) = 0 \Rightarrow$
 $-20 + 10x_1 + 2x_1 + 3 - \frac{16}{5} + \frac{22}{5}x_1 = 0 \Rightarrow$
 $\frac{82}{5}x_1 = \frac{101}{5} \Rightarrow x_1 = \frac{101}{82}$ ⑤

$\mu_2 \geq 0$ KKT-1

$-6x_1 + 2x_2 - 2 - 5\mu_2 = 0$ KKT-2

$-4x_1 + 2x_2 + 3 - 2\mu_2 = 0$ KKT-3

$\mu_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - 10) = 0$ KKT-4

$5x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0$ KKT-5

$$\textcircled{A} \stackrel{\textcircled{V}}{\implies} \mu_1 = \frac{8}{5} - \frac{11}{5} \cdot \frac{101}{82} < 0$$

KKT-L X

AS in 20.

Βελτιστοποίηση υπό ανισοτικούς περιορισμούς: II

- Θεωρούμε το π.μ-γ.π.

$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{υπό} & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{array} \quad (\text{ΠΚΠ} - 2)$$

με $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κοίλη και διαφορίσιμη τουλάχιστον δυο φορές με συνεχείς παραγώγους.

- Αν υπάρχει $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} x_j^* &\geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ x_j^* \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

τότε το \mathbf{x}^* είναι βέλτιστη λύση του ΠΚΠ-2.

$$\text{II) } \underline{x_1 > 0, x_2 = 0}$$

$$\text{KKT-5} \xrightarrow{x_1 > 0} \frac{1}{1+x_1} - \lambda = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x_1} = \lambda \Leftrightarrow 1+x_1 = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow x_1 = 0$$

αδίδεται.

$$\text{III) } \underline{x_1 = 0, x_2 > 0}$$

$$\text{KKT-6} \xrightarrow{x_2 > 0} -1 = 0 \quad \times$$

$$\text{IV) } \underline{x_1 = 0, x_2 = 0}$$

Για $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$, ελεγχθήσονται όλες οι συνθήκες.

$$\text{Άρα } (x_1^*, x_2^*) = (0, 0).$$

Βελτιστοποίηση υπό ανισοτικούς περιορισμούς: III

- Θεωρούμε το π.μ-γ.π.

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{υπό} \quad & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (\text{ΠΚΠ-3}) \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

με $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κοίλη, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτές, $i = 1, 2, \dots, p$
και οι f και g_i είναι διαφορίσιμες τουλάχιστον δυο φορές
με συνεχείς παραγώγους, $i = 1, 2, \dots, p$.

- Ορίζουμε τη Λαγκραντζιανή του π.μ-γ.π.

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^p \mu_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Βελτιστοποίηση υπό ανισοτικούς περιορισμούς: III

- Αν υπάρχουν $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^p$:

$$\mu_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*, \mu) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_j^* \frac{\partial L}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*, \mu) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mu_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

$$g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

$$x_j^* \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

τότε το \mathbf{x}^* είναι βέλτιστη λύση του ΠΚΠ-3.

Πρόβλημα

Δίνεται το Ν.Π.π.

$$\max -x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 5x_1 + 7x_2 + 8$$

$$\text{υπό } 3 - 5x_2 \geq 2x_1 \stackrel{(-1)}{\Leftrightarrow} 2x_1 + 5x_2 - 3 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(i) Ν.Σ. έχει Ν.Π.π.

(ii) Να βρεθεί η ΚΚΤ.

Λύση

$$(i) f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 5x_1 + 7x_2 + 8$$

$$g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 - 3 \leftarrow \text{υπόκει με γραμμική}$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = (-2x_1 + 2x_2 - 5, -6x_2 + 2x_1 + 7)$$

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$-Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|2| = 2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - (-2)(-2) = 8 > 0$$

0 $-Hf(x_1, x_2)$ είναι θετικά ορισμένος \Rightarrow

$Hf(x_1, x_2)$ είναι αρνητικά ορισμένος \Rightarrow

f κοίτη.

Εχουμε π.υ.π. = 3.

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 5x_1 + 7x_2 + 8$$

$$g_2(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2 - 3$$

(ii) θεωρούμε ως πολλαπλασιαστή μ_2 .

Η Lagrangian συνάρτηση είναι

$$L(x_1, x_2, \mu_1) = f(x_1, x_2) - \mu_1 g_1(x_1, x_2) =$$

$$-x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 - 5x_1 + 7x_2 + 8 - \mu_2(2x_1 + 5x_2 - 3)$$

Συνοψίζοντας ΚΚΤ:

$\mu_2 \geq 0$	ΚΚΤ-1	$2x_1 + 5x_2 - 3 \leq 0$	ΚΚΤ-7
$-2x_1 + 2x_2 - 5 - 2\mu_2 \leq 0$	ΚΚΤ-2	$x_1 \geq 0$	ΚΚΤ-8
$-6x_2 + 2x_1 + 7 - 5\mu_2 \leq 0$	ΚΚΤ-3	$x_2 \geq 0$	ΚΚΤ-9
$x_1(-2x_1 + 2x_2 - 5 - 2\mu_2) = 0$	ΚΚΤ-4		
$x_2(-6x_2 + 2x_1 + 7 - 5\mu_2) = 0$	ΚΚΤ-5		
$\mu_2(2x_1 + 5x_2 - 3) = 0$	ΚΚΤ-6		

Παίρνουμε 2 περιπτώσεις π.ε.π.:

$$\begin{array}{l} \mu_1 = 0 \quad \text{ή} \quad \mu_1 > 0 \\ x_1 = 0 \quad \text{ή} \quad x_1 > 0 \\ x_2 = 0 \quad \text{ή} \quad x_2 > 0 \end{array}$$

I) $x_1 = 0, x_2 = 0, \mu_1 = 0$

ΚΚΤ-3 X

II) $x_1 = 0, x_2 = 0, \mu_1 > 0$

ΚΚΤ-6 $\xrightarrow{\mu_1 > 0}$ $2x_1 + 5x_2 - 3 = 0 \xrightarrow{x_1=0, x_2=0} -3 = 0$ X

III) $x_1 = 0, x_2 > 0, \mu_1 = 0$

ΚΚΤ-5 $\xrightarrow{x_2 > 0}$ $-6x_2 + 2x_1 + 7 - 5\mu_1 = 0 \xrightarrow{x_1=0, \mu_1=0} -6x_2 + 7 = 0 \Rightarrow$
 $x_2 = \frac{7}{6}$

ΚΚΤ-7 X

IV) $x_1 = 0, x_2 > 0, \mu_1 > 0$

ΚΚΤ-5 $\xrightarrow{x_2 > 0}$ $-6x_2 + 2x_1 + 7 - 5\mu_1 = 0 \xrightarrow{x_1=0}$
 $-6x_2 - 5\mu_1 = -7$ ①

ΚΚΤ-6 $\xrightarrow{\mu_1 > 0}$ $2x_1 + 5x_2 - 3 = 0 \xrightarrow{x_1=0} 5x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{5}$

① $\xrightarrow{x_1=0, x_2=\frac{3}{5}}$ $-6 \cdot \frac{3}{5} - 5\mu_1 = -7 \Rightarrow -5\mu_1 = -\frac{3}{5} + 7$
 $\Rightarrow -5\mu_1 = -\frac{3}{5} + \frac{35}{5} \Rightarrow \mu_1 = \frac{14}{5}$

Επιβεβαιώνουμε ότι οι ΚΚΤ

Βέλτιστα είναι $(x_1^*, x_2^*) = (0, \frac{3}{5})$.