

Επιχειρησιακή Έρευνα

Ενότητα 5

Βασική θεωρία μη-γραμμικού προγραμματισμού

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

Εισαγωγή

Γενική μορφή π.μ-γ.π.

- Ένα πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού σε γενική μορφή γράφεται ως:

$$\begin{array}{ll}\max & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{υπό} & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l,\end{array}$$

με $f, g_i, h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

- Οι f, g_i και h_i θεωρούνται διαφορίσιμες τουλάχιστον δυο φορές με συνεχείς παραγώγους.

$$\begin{array}{ll}\text{π.χ. } \max & 3x_1^2 x_2 - 7x_3^2 x_2 \\ \text{υπό} & 5x_1 + 6x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & 7x_1 x_2^3 - x_3 = 0 \\ & -x_2 \leq 0\end{array}$$

Διανυσματική γενική μορφή π.μ-γ.π.

- Διανυσματική μορφή:

$$\begin{array}{ll}\max & f(\mathbf{x}) \\ \text{υπό} & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},\end{array}$$

με

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

(Handwritten in blue: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$)

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l.$$

Τυπική μορφή π.μ-γ.π.

- Ένα πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού σε τυπική μορφή γράφεται ως:

$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{υπό} & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{array}$$

με $f, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

- Οι f και g_i θεωρούνται διαφορίσιμες τουλάχιστον δυο φορές με συνεχείς παραγώγους.

Διανυσματική τυπική μορφή π.μ-γ.π.

- Διανυσματική μορφή:

$$\begin{array}{ll}\max & f(\mathbf{x}) \\ \text{υπό} & \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\end{array}$$

με

$$\begin{array}{l}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \\ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.\end{array}$$

Γραφική επίλυση προβλημάτων - Παράδειγμα I

- Ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{υπό} & \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

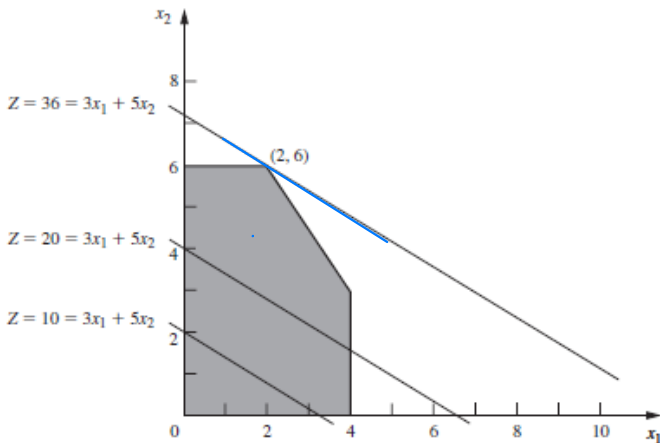
→ γραμμική α.β.

γραμμικοί περιορισμοί

⇓

εφικτή περιοχή
κρυφό πολύεδρο

Γραφική επίλυση προβλημάτων - Παράδειγμα Ι



- Βέλτιστη λύση σε κορυφή της εφικτής περιοχής.

Γραφική επίλυση προβλημάτων - Παράδειγμα II

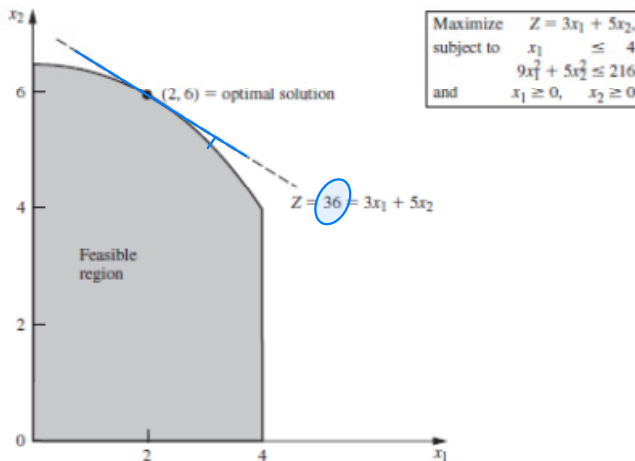
- Ένα πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{ll}\max & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{υπό} & \begin{array}{l} x_1 \leq 4 \\ 9x_1^2 + 5x_2^2 \leq 216 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array}\end{array}$$

→ γραμμική α.β.

*→ περιερισμοί
μη γραμμικοί
↓
Εφικτή περιοχή
όχι κενό
πολύεδρο.*

Γραφική επίλυση προβλημάτων - Παράδειγμα II



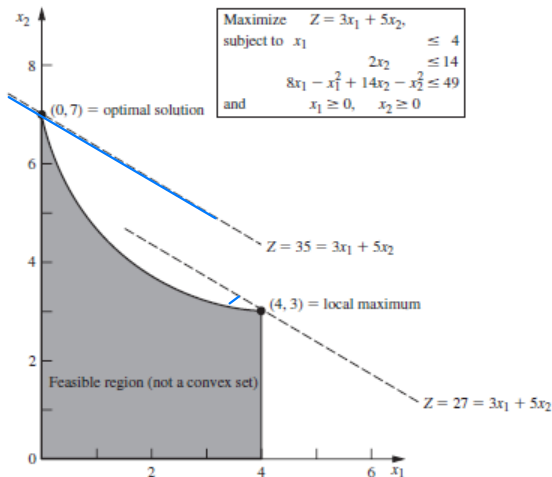
- Βέλτιστη λύση όχι σε κορυφή της εφικτής περιοχής.
- Βέλτιστη λύση στο σύνορο της εφικτής περιοχής.

Γραφική επίλυση προβλημάτων - Παράδειγμα III

- Ένα πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{ll}\max & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{υπό} & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 14 \\ & 8x_1 - x_1^2 + 14x_2 - x_2^2 \leq 49 \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{array}$$

Γραφική επίλυση προβλημάτων - Παράδειγμα III



- Μη-κυρτή εφικτή περιοχή.
- Όχι μοναδικό τοπικό βέλτιστο.

Γραφική επίλυση προβλημάτων - Παράδειγμα IV

- Ένα πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max 126x_1 - 9x_1^2 + 182x_2 - 13x_2^2$$

υπό

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

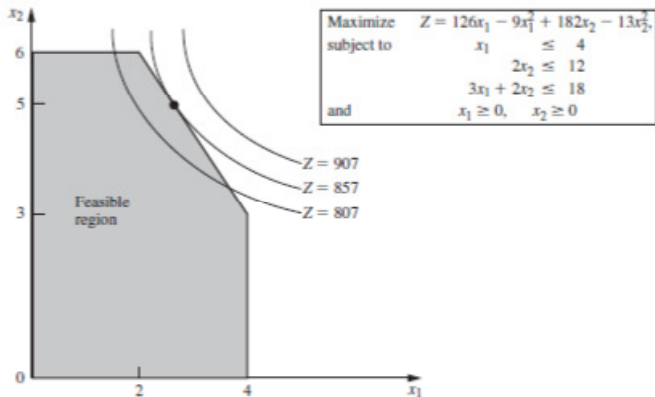
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

μη-γραμμική
α.β
↓
καμπύλες

γραμμικοί περιορισμοί

↓
Εμφανίζεται η περιοχή
υπό λύσεων

Γραφική επίλυση προβλημάτων - Παράδειγμα IV



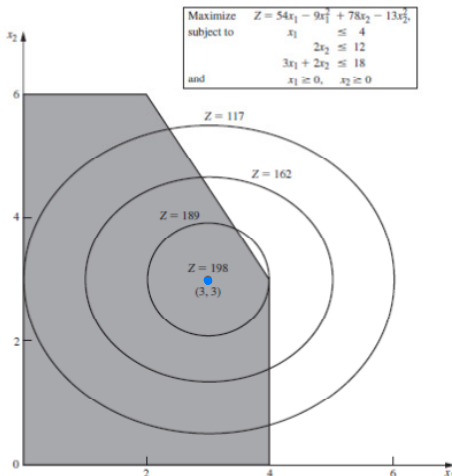
- Βέλτιστη λύση όχι σε κορυφή της εφικτής περιοχής.
- Βέλτιστη λύση στο σύνορο της εφικτής περιοχής.

Γραφική επίλυση προβλημάτων - Παράδειγμα V

- Ένα πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} \max \quad & 54x_1 - 9x_1^2 + 78x_2 - 13x_2^2 \\ \text{υπό} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Γραφική επίλυση προβλημάτων - Παράδειγμα V



- Βέλτιστη λύση σε εσωτερικό σημείο της εφικτής περιοχής.

Π.μ-γ.π. χωρίς περιορισμούς

Π.μ-γ.π. χωρίς περιορισμούς

Θέλουμε να λύσουμε το π.μ-γ.π.

$$\begin{array}{ll} \max & f(\mathbf{x}) \\ \text{υπό} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

με $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη τουλάχιστον δυο φορές με συνεχείς παραγώγους.

$$\begin{array}{ll} \text{π.χ.} & \max \quad 6x_1^2 + 5x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1^3 \\ & \text{υπό} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

Ορισμοί ακροτάτων

- Έστω το π.μ-γ.π.

$$\begin{array}{ll} \max & f(\mathbf{x}) \\ \text{υπό} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

- $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ ολικό μέγιστο, αν

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

- $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ τοπικό μέγιστο, αν

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \text{ σε μια περιοχή του } \mathbf{x}^*.$$

$$\exists \varepsilon > 0 : f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \text{ με } \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\| < \varepsilon$$

- $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ γνήσιο (strict) ολικό μέγιστο ή τοπικό μέγιστο αν η ανισότητα είναι γνήσια.
- Ανάλογες έννοιες για ελάχιστα.

Ικανή συνθήκη εσωτερικού ακροτάτου

Θεώρημα (Ικανή συνθήκη εσωτ. ακροτάτου)

Έστω $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς 2-διαφορίσιμη στο εσωτερικό σημείο $\mathbf{x}^0$ του S . Τότε

$$\underbrace{\nabla f(\mathbf{x}^0)}_{?} = \mathbf{0} \text{ και } \underbrace{Hf(\mathbf{x}^0)}_{?} \underbrace{\text{αρνητικά ορισμένος}}_{?}$$

$\Downarrow$

$\mathbf{x}^0$ τοπικό μέγιστο.

Ανάδελτα και Εσσιανός Πίνακας συνάρτησης

- Έστω $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς 2-διαφορίσιμη στο $\mathbf{x}^o$,
- το ανάδελτα της f στο $\mathbf{x}^o$ είναι

$$\nabla f(\mathbf{x}^o) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}^o), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}^o), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}^o) \right),$$

- ο Εσσιανός πίνακας της f στο $\mathbf{x}^o$ είναι

$$Hf(\mathbf{x}^o) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^o) \right)_{i,j=1,2,\dots,n}.$$

Lagrange

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^3 - x_3x_2$$

$$\nabla f(\underline{x}) = \nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_2}, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_3} \right)$$

$$= (1 - 2x_1 - x_3, x_3 - 3x_2^2, 2 + x_2 - x_2)$$

$$Hf(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\underline{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\underline{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(\underline{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\underline{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\underline{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(\underline{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(\underline{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(\underline{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -6x_2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Θετικά - Αρνητικά (ημι)ορισμένοι πίνακες

- Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
 - A θετικά ορισμένος ανν $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
 - A θετικά ημιορισμένος ανν $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
 - A αρνητικά ορισμένος ανν $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} < 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
 - A αρνητικά ημιορισμένος ανν $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
- A αρνητικά ορισμένος $\Leftrightarrow -A$ θετικά ορισμένος.
 A αρνητικά ημιορισμένος $\Leftrightarrow -A$ θετικά ημιορισμένος.

Θετικά - Αρνητικά (ημι)ορισμένοι πίνακες

- Ένας πίνακας είναι θετικά ορισμένος (αντίστ. ημιορισμένος) αν οι ιδιοτιμές του είναι θετικές (αντίστ. μη-αρνητικές).

- Ένας πίνακας είναι θετικά ορισμένος αν οι κύριες υποορίζουσές του είναι όλες θετικές.

- Ειδική περίπτωση: Ένας 2×2 πίνακας

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένος αν

$$\begin{aligned} a &> 0 \\ ac - b^2 &> 0. \end{aligned}$$

ορίζουσες των
όλων οριζουσών
Τετραγωνικών
υποπινάκων.



Παράδειγμα

N.S.O. $\circ$ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ είναι αρνητικά ημιορισμένος.

Λύση

Αρκεί v.S.O. $\circ$ $-A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ είναι θετικά ημιορισμένος.

$$\left. \begin{array}{l} |2| = 2 > 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1)(-1) = 6 - 1 = 5 > 0 \end{array} \right\} \circ -A \text{ είναι θετικά} \\ \text{ορισμένος}$$

$-A$ θετικά ορισμένος $\Rightarrow$

$-A$ θετικά ημιορισμένος $\Rightarrow$

A αρνητικά ημιορισμένος.

Ικανή συνθήκη εσωτερικού ακροτάτου

Θεώρημα (Ικανή συνθήκη εσωτ. ακροτάτου)

Έστω $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς 2-διαφορίσιμη στο εσωτερικό σημείο $\mathbf{x}^o$ του S . Τότε

$$\nabla f(\mathbf{x}^o) = \mathbf{0} \text{ και } Hf(\mathbf{x}^o) \text{ αρνητικά ορισμένος}$$



$\mathbf{x}^o$ τοπικό μέγιστο.

Na zwei zu

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 - 3x_2 + x_1x_2 \\ \text{u.ü.} & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

} n.H.-g.n. zweis
variabelig

$$\text{Es sei } f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 - 3x_2 + x_1x_2$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = (-2x_1 + 2 + x_2, -2x_2 - 3 + x_1)$$

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0) \Leftrightarrow (-2x_1 + 2 + x_2, -2x_2 - 3 + x_1) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2 + x_2 = 0 \\ -2x_2 - 3 + x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_2 - 6 + 2 + x_2 = 0 \\ x_1 = 2x_2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{4}{3} \\ x_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Also } \nabla f(x_1, x_2) = (0, 0) \Rightarrow (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

Πρέπει να ελέγξουμε αν $Hf(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$ είναι οριστική
ορισμένη

$$Hf(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$-Hf(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|2| = 2 > 0$$

$$\left| \begin{array}{cc} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right| = 2 \cdot 2 - (-1)(-1) = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \Rightarrow$$

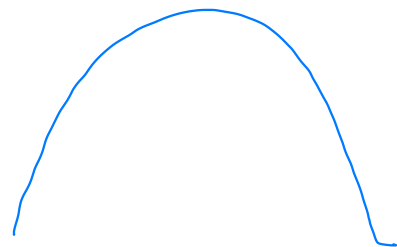
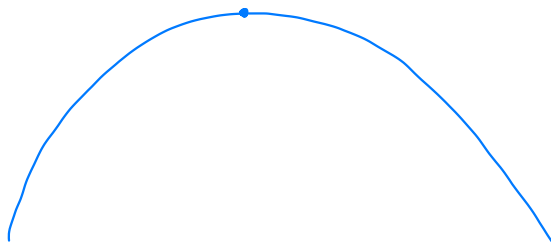
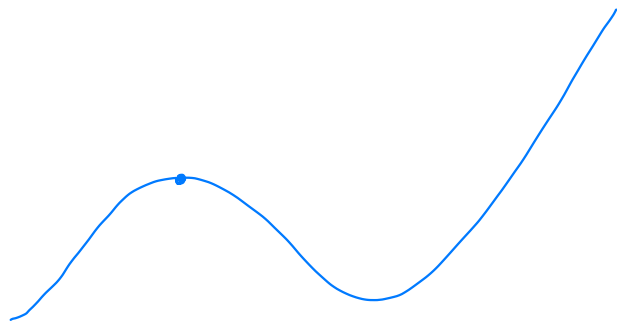
$$-Hf(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}) \text{ θετική ορισμένη} \Rightarrow$$

$$Hf(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}) \text{ αρνητική ορισμένη.}$$

$$\nabla f\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = (0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla f\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = (0, 0) \\ Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ δεν είναι ορισμένος} \end{array} \right\} \Rightarrow (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

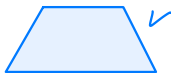
τοπικό μέγιστο.



Κυρτότητα I: Κυρτά σύνολα

- Οι έννοιες του κυρτού συνόλου και της κυρτής/κοίλης συνάρτησης είναι πολύ σημαντικές για το μη-γραμμικό προγραμματισμό.
- Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ λέγεται κυρτό αν για κάθε δυο σημεία του, το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει περιέχεται στο σύνολο.

Ισοδύναμα, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει

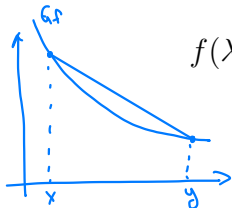


Κυρτότητα II: Κυρτές συναρτήσεις

- Μια συνάρτηση $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη επί ενός κυρτού υποσυνόλου S του $\mathbb{R}^n$ λέγεται (γνησίως) κυρτή αν για κάθε δυο σημεία του S , το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις εικόνες των σημείων μέσω της f βρίσκεται (γνησίως) πάνω από το γράφημα της f :

$f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (γνησίως) κυρτή επί του κυρτού S αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ και $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \leq (<) \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}).$$

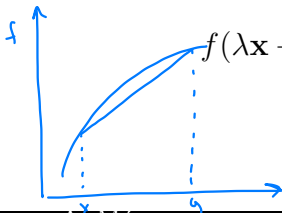


Κυρτότητα III: Κοίλες συναρτήσεις

- Μια συνάρτηση $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη επί ενός κυρτού υποσυνόλου S του $\mathbb{R}^n$ λέγεται (γνησίως) κοίλη αν για κάθε δυο σημεία του S , το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις εικόνες των σημείων μέσω της f βρίσκεται (γνησίως) κάτω από το γράφημα της f :

$f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (γνησίως) κοίλη επί του κυρτού S αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ και $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \geq (>) \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}).$$



Κυρτότητα IV: Κριτήρια κυρτότητας συναρτήσεων

- Μια συνάρτηση $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή ανν για κάθε $\mathbf{x} \in S$ ο πίνακας Hesse της f

$$Hf(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

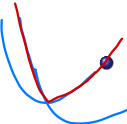
είναι θετικά ημιορισμένος, δηλαδή

$$\mathbf{y}^T Hf(\mathbf{x}) \mathbf{y} \geq 0, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbf{x} \in S.$$

- Προσοχή! Αν ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος για κάθε $\mathbf{x} \in S$ έπεται και η γνήσια κυρτότητα της f , αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο.

Κυρτότητα IV: Κριτήρια κυρτότητας συναρτήσεων

- Μια συνάρτηση είναι κοίλη αν η αντίθετή της είναι κυρτή.
- Αν $f(x) = \sum_{h=1}^k \alpha_h f_h(x)$ και $\alpha_h \geq 0$ και οι $f_h(x)$ είναι κυρτές, τότε και η $f(x)$ είναι κυρτή.

- 
- Αν $f(x) = \max(f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$ και οι $f_h(x)$ είναι κυρτές, τότε και η $f(x)$ είναι κυρτή.

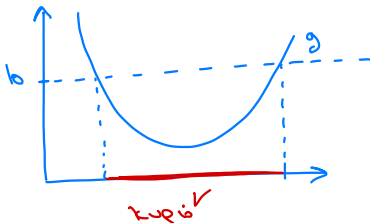
- Αν $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κοίλη, $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) > 0\}$ και $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{g(\mathbf{x})}$, τότε η $f(x)$ είναι κυρτή.

Κυρτότητα IV: Κριτήρια κυρτότητας συναρτήσεων

- Αν $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα και κυρτή συνάρτηση και $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή, τότε και η σύνθεση $f = g \circ h$ είναι κυρτή.
- Αν $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ της μορφής $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, τότε και η σύνθεση $f = g \circ h$ είναι κυρτή.

Κυρτότητα V: Κριτήριο κυρτότητας συνόλων

- Αν $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $b \in \mathbb{R}$ τότε το $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) \leq b\}$ είναι κυρτό.
- Η τομή κυρτών συνόλων είναι κυρτό σύνολο.



Κυρτότητα VI: Κυρτότητα και ακρότατα

- Κάθε τοπικό ελάχιστο κυρτής συνάρτησης είναι και ολικό ελάχιστο.
- Το σύνολο των ελαχίστων κυρτής συνάρτησης είναι κυρτό.
- Κάθε γνησίως κυρτή συνάρτηση έχει μοναδικό ελάχιστο.

Κυρτότητα VII: Κοιλότητα και ακρότατα

- Κάθε τοπικό μέγιστο κοίλης συνάρτησης είναι και ολικό μέγιστο.

$\{x^* \text{ τοπικό μέγιστο της } f\} \Rightarrow x^* \text{ ολικό μέγιστο } f$

- Το σύνολο των μεγίστων κοίλης συνάρτησης είναι κυρτό.
- Κάθε γνησίως κοίλη συνάρτηση έχει μοναδικό μέγιστο.

Ικανή συνθήκη ολικού μεγίστου

Θεώρημα (Ικανή συνθήκη ολικού μεγίστου)

Έστω $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κοίλη. Τότε

x^0 τοπικό μέγιστο

$\Downarrow$

x^0 ολικό μέγιστο.

Άσκηση (συνέχεια)

$$\left. \begin{array}{l} \nabla f\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = (0, 0) \\ Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ αρνητικά ορισμένος} \end{array} \right\} \Rightarrow (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ τοπικό μέγιστο.}$$

Για $v \in \mathbb{R}$ είναι ολικό μέγιστο, αφού $v.s.o$ η f
είναι κοίτη συνάρτηση
Για $v.s.o$ η f είναι κοίτη, αφού $v.s.o$ ο $Hf(x_1, x_2)$
είναι αρνητικά ορισμένος.

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$-Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} |2| = 2 > 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1)(-1) = 4 - 1 = 3 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -Hf(x_1, x_2) \text{ θετικά} \\ \text{ορισμένος} \Rightarrow \\ Hf(x_1, x_2) \text{ αρνητικά} \\ \text{ορισμένος} \Rightarrow \\ f \text{ γνησίως κοίτη.}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ minimizes } \text{unf} \\ \text{für } u_0 \text{ in } \mathcal{D} \end{array} \right\} \Rightarrow (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ minimizes } \text{unf}$$

Προβλήματα κυρτού προγραμματισμού

- κοιτά η α.β.
- Εφικτή περιοχή κυρτό σύνολο

Βελτιστοποίηση υπό ανισοτικούς περιορισμούς: I

- Θεωρούμε το π.μ-γ.π.

$$\begin{array}{ll} \max & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{υπό} & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \end{array} \quad (\text{ΠΚΠ-1})$$

με $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κοίλη, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτές,
 $i = 1, 2, \dots, p$, και οι f και g_i είναι διαφορίσιμες
τουλάχιστον δυο φορές με συνεχείς παραγώγους,
 $i = 1, 2, \dots, p$.

- Ορίζουμε τη Λαγκραντζιανή του π.μ-γ.π.

$$\begin{aligned} & L(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^p \mu_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

- Τα μ_i αναφέρονται ως πολλαπλασιαστές Lagrange.

Βελτιστοποίηση υπό ανισοτικούς περιορισμούς: I

- Αν υπάρχουν $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned}\mu_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, && \rightarrow \text{οι πολλαπλα-} \\ \frac{\partial L}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*, \mu) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, && \rightarrow \text{μερική παράγω-} \\ \mu_i g_i(\mathbf{x}^*) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, && \rightarrow \text{γος της } L \\ g_i(\mathbf{x}^*) &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, && \rightarrow \text{ως προς } x_j = 0, \\ &&& \forall x_j\end{aligned}$$

τότε το $\mathbf{x}^*$ είναι βέλτιστη λύση του ΠΚΠ-1.

→ πολλαπλασια-
σμός λ
ενήσυχνη
συνέπεια
→ ικανοποι-
νται όλοι οι
παραρτηματικοί
παραρτηματικοί.

Παράδειγμα

Δίνεται το π.μ-γ.π

$$\max -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$$

υπό

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

(i) Π.Σ.ο είναι π.κ.π.

(ii) Να αποδείξετε με ανώτατες Karush-Kuhn-Tucker.

Λύση

1.6. Δίνεται το πρόβλημα γραμμικό

$$\max -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$$

υπό

$$5x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0$$

Για ν.Σ.ο πρόβλημα κυρτό προγραμματισμού, αφού
ν.Σ.ο $f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$ κοίλη

και $g_1(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 - 10$ κυρτή

Η g_1 είναι κυρτή ως γραμμική.

Για v.s.o η f υφίσταται, αφού η v.s.o ο $Hf(x_1, x_2)$ είναι
απειροστικά ορισμένος.

$$f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = (-6x_1 + 2x_2 - 2, -4x_2 + 2x_1 + 3)$$

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|6| = 6 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 - (-2)(-2) = 24 - 4 = 20 > 0 \quad \Rightarrow$$

$-Hf(x_1, x_2)$ θετικά ορισμένος $\Rightarrow$

$Hf(x_1, x_2)$ αρνητικά ορισμένος $\Rightarrow$

f γν. υφίσταται.

Άρα, έχω η κη-λ.