

$$x_j \leftrightarrow z_j$$

$$w_i \leftrightarrow y_i$$

• Όσο νάνυ αντίστροφη σήσηση,
Τα αξιμώ (Π) και (Δ) είναι
αυτιόθετο-αντίστροφα

(Π)

$$\max 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{υπό } 2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Το αξιμώ αξιμώ τω (Π) είναι

$$\underline{J = 0 + 3x_1 + 4x_2}$$

$$w_1 = 4 - 2x_1 - x_2$$

$$w_2 = 1 - x_1 - 4x_2$$

⋮

Τελιμώ αξιμώ τω (Π) :

$$\underline{J = 3 - 8x_2 - 3w_2}$$

$$w_2 = 2 + 7x_2 + 2w_2$$

$$x_1 = 1 - 4x_2 - 1w_2$$

• Βέλτιστη λήση τω (Π) :

$$(x_1^*, x_2^*, w_1^*, w_2^*) = (1, 0, 2, 0)$$

• Βέλτιστη τιμή α.β. τω (Π) :

$$J^* = 3$$

• Βέλτιστη λήση τω (Δ) :

$$(y_1^*, y_2^*, z_1^*, z_2^*) = (0, 3, 0, 8)$$

• Βέλτιστη τιμή της α.β. τω (Δ) :

$$J^* = J^* = 3$$

Το αξιμώ αξιμώ τω (Δ) είναι

$$\underline{-J = 0 - 4y_2 - 1y_2}$$

$$\rightarrow z_1 = -3 + 2y_1 + 1y_2$$

$$z_2 = -1 + 1y_1 + 4y_2$$

Τελιμώ αξιμώ τω (Δ) :

$$\underline{-J = -3 - 2y_1 - 1z_1}$$

$$\rightarrow z_2 = 8 - 7y_1 + 4z_1$$

$$y_2 = 3 - 2y_1 + 1z_1$$

• Βέλτιστη λήση τω (Δ) :

$$(y_1^*, y_2^*, z_1^*, z_2^*) = (0, 3, 0, 8)$$

• Βέλτιστη τιμή α.β. τω (Δ) :

$$J^* = 3$$

• Βέλτιστη λήση τω (Π) :

$$(x_1^*, x_2^*, w_1^*, w_2^*) = (1, 0, 2, 0)$$

• Βέλτιστη τιμή της α.β. τω (Π) :

$$J^* = J^* = 3$$

Μπορώ να λύσω τω (Π) ή τω (Δ),
όσο είναι ηο εύκολο.

n/Δ	βέβαια αίον	μη-φραγμένο	μη-επίλυτο
βέβαια αίον	1ΔΘ ✓	1ΔΘ ✗	1ΔΘ ✗
μη-φραγμένο	1ΔΘ ✗	ΑΔΘ ✗	ΑΔΘ ✓
μη-επίλυτο	1ΔΘ ✗	ΑΔΘ ✓	3 περιπτώσεις ✓

$$A \Delta \Theta$$

$$\sum c_j x_j \leq \sum b_i y_i$$

(Α) έχει βέβαια αίον $\Leftrightarrow$ (Δ) έχει βέβαια αίον

(Α) μη-φραγμένο $\Rightarrow$ (Δ) μη-επίλυτο

(Δ) $\gg \Rightarrow$ (Α) $\gg$

(Α) μη-επίλυτο $\Rightarrow$ (Δ) μη-επίλυτο ή μη-φραγμένο

(Δ) $\gg \Rightarrow$ (Α) $\gg$ ή $\gg$

Σχέση λύσεων πρωτεύοντος και δυϊκού

- Από τις 9 περιπτώσεις ζευγών λύσεων πρωτεύοντος-δυϊκού μόνο 4 είναι δυνατές:
 - Ύπαρξη βέλτιστης λύσης πρωτεύοντος, ύπαρξη βέλτιστης λύσης δυϊκού.
 - Μη-φραγμένο πρωτεύον, μη-εφικτό δυϊκό.
 - Μη-εφικτό πρωτεύον, μη-φραγμένο δυϊκό.
 - Μη-εφικτό πρωτεύον, μη-εφικτό δυϊκό.
- Αλλιώς:
 - Ύπαρξη βέλτιστης λύσης πρωτεύοντος $\Rightarrow$ Ύπαρξη βέλτιστης λύσης δυϊκού, με ίδια τιμή αντικ. συνάρτησης.
 - Μη-φραγμένο πρωτεύον $\Rightarrow$ Μη-εφικτό δυϊκό.
 - Μη-εφικτό πρωτεύον $\Rightarrow$ Μη-φραγμένο ή μη-εφικτό δυϊκό.
- Αποδ: Ασθενές και Ισχυρό Δυϊκά Θεωρήματα.

Αντιστοιχίες μεταβλητών-περιορισμών π και δ

- Έστω το π.γ.π.

$$x_j \Leftrightarrow z_j$$

$$w_i \Leftrightarrow y_i$$

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

και το δυϊκό του π.γ.π.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{array}$$

- Υπάρχει μια αντιστοιχία περιορισμών του αρχικού και μεταβλητών του δυϊκού και μεταβλητών του αρχικού και περιορισμών του δυϊκού.

Αντιστοιχίες μεταβλητών-περιορισμών π και δ

- Έστω το π.γ.π.

$$\begin{array}{ll}\max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.\end{array}$$

και το δυϊκό του π.γ.π.

$$\begin{array}{ll}\min & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.\end{array}$$

i-ο εώς γρ. περιορισμός

$$\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \right) \leftrightarrow y_i$$

j-ο εώς γρ. περιορισμός

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \right) \leftrightarrow x_j$$

Αντιστοιχίες αρχικών-περιθωρίων π και δ

- Εισάγωντας περιθώριες το πρωτεύον γίνεται:

$$\begin{array}{ll}\max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + w_i = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,\end{array}$$

και το δυϊκό του γίνεται

$$\begin{array}{ll}\min & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - z_j = c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & z_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.\end{array}$$

- Υπάρχει αντιστοιχία αρχικών-περιθωρίων μεταβλητών μεταξύ των δυο προβλημάτων: $x_j \leftrightarrow z_j, w_i \leftrightarrow y_i$.

Θεώρημα συμπληρωματικής χαλαρότητας

Θεώρημα

Αν το πρωτεύον π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση

$$(x^*, w^*) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^*)$$

και το δυϊκό έχει αντίστοιχη βέλτιστη λύση

$$(z^*, y^*) = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*, y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$$

τότε

$$\begin{aligned} x_j^* z_j^* &= 0, & j &= 1, 2, \dots, n, \\ w_i^* y_i^* &= 0, & i &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Θεώρημα συμπληρωματικής χαλαρότητας - Αποδ.

- Απόδειξη ασθενούς δυϊκού θεωρήματος με περιθώριες:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n c_j x_j &\leq \sum_{j=1}^n (c_j + z_j) x_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i = \sum_{i=1}^m (b_i - w_i) y_i \\ &\leq \sum_{i=1}^m b_i y_i.\end{aligned}$$

- Από ισχυρό δυϊκό θεώρημα $\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$,
οπότε οι ανισότητες πρέπει να ισχύουν ως ισότητες:
 $z_j^* x_j^* = 0, j = 1, 2, \dots, n$ και $w_i^* y_i^* = 0, i = 1, 2, \dots, m$.

Δυϊκή Simplex - Ιδέα

- Η δυϊκή μέθοδος Simplex προκύπτει εφαρμόζοντας τη μέθοδο Simplex στο δυϊκό πρόβλημα και μεταφράζοντας με όρους λεξικών του πρωτεύοντος.
- Η μετάφραση γίνεται με βάση το ότι σε κάθε βήμα ο πίνακας του λεξικού του πρωτεύοντος είναι ο αντίθετος ανάστροφος του πίνακα του λεξικού του δυϊκού.

Δυϊκή Simplex - Παράδειγμα

- Έχουμε το λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π.

$$\begin{array}{rcll}
 \zeta & = & 0 & - & 2x_1 & - & 4x_2 & - & 6x_4 \\
 w_1 & = & -3 & + & x_1 & - & 2x_2 & + & x_4 \\
 w_2 & = & -5 & - & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_4 \\
 w_3 & = & 8 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4
 \end{array}$$

εφικότητα X
θετικότητα ✓

$\frac{4}{3}$ $\frac{6}{2}$

με δυϊκό π.γ.π.

y_2 μπαίνει
στη θέση (520)
 z_2 βγαίνει
στη θέση
(min $\{ \frac{4}{3}, \frac{6}{2} \} = \frac{4}{3}$)
+2 $\rightarrow$

$$\begin{array}{rcll}
 -\xi & = & 0 & + & 3y_1 & + & 5y_2 & - & 8y_3 \\
 z_1 & = & 2 & - & y_1 & + & 2y_2 & + & 2y_3 \\
 z_2 & = & 4 & + & 2y_1 & - & 3y_2 & + & 3y_3 \\
 z_3 & = & 0 & & & & & + & 3y_3 \\
 z_4 & = & 6 & - & y_1 & - & 2y_2 & + & 2y_3
 \end{array}$$

εφικότητα ✓
θετικότητα X
και simplex

↓ μηδ για $y_2 = \frac{4}{3}$
↓ μηδ για $y_2 = \frac{6}{2}$

- Simplex στο δυϊκό: η y_2 μπαίνει, η z_2 βγαίνει.
Στο πρωτεύον: η w_2 βγαίνει, η x_2 μπαίνει.

Δυϊκή Simplex - Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έχουμε το 2ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π.

$$\begin{array}{rcll}
 \zeta & = & -20/3 & - & 14/3x_1 & - & 4/3w_2 & & - & 10/3x_4 \\
 w_1 & = & -19/3 & - & 1/3x_1 & - & 2/3w_2 & & + & 7/3x_4 \\
 x_2 & = & 5/3 & + & 2/3x_1 & + & 1/3w_2 & & - & 2/3x_4 \\
 w_3 & = & 3 & - & 4x_1 & - & w_2 & - & 3x_3
 \end{array}$$

με αντίστοιχο λεξικό του δυϊκού π.γ.π.

Η y_1 μπαίνει
 δηλαδή $(19/3 > 0)$
 Η z_4 βγαίνει
 από τη βάση.

$$\begin{array}{rcll}
 -\xi & = & 20/3 & + & 19/3y_1 & - & 5/3z_2 & - & 3y_3 \\
 z_1 & = & 14/3 & + & 1/3y_1 & - & 2/3z_2 & + & 4y_3 \\
 y_2 & = & 4/3 & + & 2/3y_1 & - & 1/3z_2 & + & y_3 \\
 z_3 & = & 0 & & & & & + & 3y_3 \\
 z_4 & = & 10/3 & - & 7/3y_1 & + & 2/3z_2
 \end{array}$$

- Στο δυϊκό: η y_1 μπαίνει, η z_4 βγαίνει.
 Στο πρωτεύον: η w_1 βγαίνει, η x_4 μπαίνει.

Δυϊκή Simplex - Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έχουμε το 3ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π.

$$\begin{array}{rcll}
 \zeta & = & -110/7 & - 36/7x_1 - 16/7w_2 & - 10/7w_1 \\
 x_4 & = & 19/7 & + 1/7x_1 + 2/7w_2 & + 3/7w_1 \\
 x_2 & = & -1/7 & + 4/7x_1 + 1/7w_2 & - 2/7w_1 \\
 w_3 & = & 3 & - 4x_1 - w_2 & - 3x_3
 \end{array}$$

με αντίστοιχο λεξικό του δυϊκού π.γ.π.

$$\begin{array}{rcll}
 -\xi & = & 110/7 & - 19/7z_4 + 1/7z_2 & - 3y_3 \\
 z_1 & = & 36/7 & - 1/7z_4 - 4/7z_2 & + 4y_3 \\
 y_2 & = & 16/7 & - 2/7z_4 - 1/7z_2 & + y_3 \\
 z_3 & = & 0 & & + 3y_3 \\
 y_1 & = & 10/7 & - 3/7z_4 + 2/7z_2 &
 \end{array}$$

- Στο δυϊκό: η z_2 μπαίνει, η z_1 βγαίνει.

Στο πρωτεύον: η x_2 βγαίνει, η x_1 μπαίνει.

Δυϊκή Simplex - Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έχουμε το 4ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π.

6 έλυστο

$$\begin{array}{rclclclcl}
 \zeta & = & -17 & - & 9x_2 & - & w_2 & & - & 4w_1 \\
 \hline
 x_4 & = & 11/4 & + & 1/4x_2 & + & 1/4w_2 & & + & 1/2w_1 \\
 x_1 & = & 1/4 & + & 7/4x_2 & - & 1/4w_2 & & + & 1/2w_1 \\
 w_3 & = & 2 & - & 7x_2 & & & - & 3x_3 & - & 2w_1
 \end{array}$$

με αντίστοιχο λεξικό του δυϊκού π.γ.π.

$$\begin{array}{rclclclcl}
 -\xi & = & 17 & - & 11/4z_4 & - & 1/4z_1 & - & 2y_3 \\
 \hline
 z_2 & = & 9 & - & 1/4z_4 & - & 7/4z_1 & + & 7y_3 \\
 y_2 & = & 1 & - & 1/4z_4 & + & 1/4z_1 & & \\
 z_3 & = & 0 & & & & & + & 3y_3 \\
 y_1 & = & 4 & - & 1/2z_4 & - & 1/2z_1 & + & 2y_3
 \end{array}$$

βέλτιστο
λεξικό

- Τα λεξικά αντιστοιχούν σε βέλτιστες β.ε.λ.

Κανόνες οδήγησης - Επιλογή εξερχ. μεταβλητής

- Στο δυϊκό λεξικό διαλέγουμε για εισερχόμενη μεταβλητή, κάποια που έχει θετικό συντελεστή στην αντικειμενική συνάρτηση.



Στο πρωτεύον λεξικό διαλέγουμε για εξερχόμενη μεταβλητή κάποια που έχει αρνητικό σταθερό όρο στο δεξιό σκέλος των περιορισμών.

Κανόνες οδήγησης - Επιλογή εισερχ. μεταβλητής

- Στο δυϊκό λεξικό διαλέγουμε για εξερχόμενη μεταβλητή, αυτή που αντιστοιχεί στο μικρότερο λόγο σταθερού όρου προς την απόλυτη τιμή αρνητικού συντελεστή της εισερχόμενης μεταβλητής του αντίστοιχου περιορισμού.



Στο πρωτεύον λεξικό διαλέγουμε για εισερχόμενη μεταβλητή, αυτή που αντιστοιχεί στο μικρότερο λόγο αντίθετου συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης προς το θετικό συντελεστή της εξερχόμενης μεταβλητής του αντίστοιχου περιορισμού.

Simplex και Δυϊκή Simplex

- Αλγόριθμος Simplex:

- Αρχίζει από βασική εφικτή λύση. *εφικτότητα ✓*
- Διατηρεί την εφικτότητα σε κάθε επανάληψη.
- Βελτιώνει την αντικειμενική σε κάθε επανάληψη.
- Καταλήγει σε βέλτιστη β.ε.λ. ή αποφαινεται για μη-φραγμένο.

- Δυϊκός αλγόριθμος Simplex:

- Αρχίζει από βασική “βέλτιστη” λύση (δηλ. οι *βελτιστοποι* συντελεστές των μη-βασικών μεταβλητών στην αντικειμενική ≤ 0).
- Διατηρεί την “βελτιστότητα” σε κάθε επανάληψη.
- Μειώνει την αντικειμενική ($-\xi$) σε κάθε επανάληψη.
- Καταλήγει σε βέλτιστη β.ε.λ. ή αποφαινεται για μη-εφικτό.

$$\begin{array}{rcl}
 1) & J = & 0 - 3x_1 - 2x_2 \\
 & \hline
 & w_1 = & 5 - 2x_1 + 1x_2 \\
 & w_2 = & 3 + 2x_1 - 3x_2
 \end{array}$$

Επιλύεται ✓
 Βελτιώνεται ✓ } $\Rightarrow$
 Το πρόβλημα είναι
 βέλτιστο.

$$\begin{array}{rcl}
 2) & J = & 0 + 3x_1 - 2x_2 \\
 & \hline
 & w_1 = & 5 - 2x_1 + 1x_2 \\
 & w_2 = & 3 + 2x_1 - 3x_2
 \end{array}$$

Επιλύεται ✓
 Βελτιώνεται X } $\Rightarrow$
Κάνουμε Simplex

- Όσο κάνω Simplex
 - Η Επιλύσιμη διατηρείται
 - Η τιμή της ε.σ. αυξάνεται
- Τελικά θα φτάσουμε
 ή βέλτιστη λύση
 ή μη-φραγμένο.

$$\underline{3)} \quad \begin{array}{l} J = 0 - 3x_1 - 2x_2 \\ \hline w_1 = -5 - 2x_1 + 1x_2 \\ w_2 = 3 + 2x_1 - 3x_2 \end{array}$$

Επιλογή X } Κάτω Simplex
Βελτιστοποίηση ✓

- Όσο κάτω Simplex
 - Διατηρείται η βελτιστοποίηση
 - Η τιμή της ε.σ. μειώνεται
- Κοιτάζουμε
 - ή σε βέλτεστη θέση
 - ή σε μη-επικρατού

$$\underline{4)} \quad \begin{array}{l} J = 0 + 3x_1 - 2x_2 \\ \hline w_1 = -5 - 2x_1 + 1x_2 \\ w_2 = 3 + 2x_1 - 3x_2 \end{array}$$

Επιλογή X }
Βελτιστοποίηση X }
Κάτω Simplex
σε ισορροπία.

Χρησιμοποιώντας τη Δυϊκή Simplex για τη Φάση Ι

- Έστω π.γ.π. όπου η αρχική βασική λύση δεν είναι εφικτή αλλά οι συντελεστές των μη-βασικών μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση είναι όλοι ≤ 0 .
- Η δυϊκή Simplex βρίσκει βέλτιστη λύση ή αποφαίνεται ότι το π.γ.π. είναι μη εφικτό.

Άσκηση

$$\max -x_1 - 3x_2$$

υπό

$$3x_1 - 2x_2 \leq -6$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq -3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Είναι σε κανονική μορφή.

Το αρχικό λ. ε. είναι :

$$J = 0 - x_1 - 3x_2$$

$$W_1 = -6 - 3x_1 + 2x_2$$

$$W_2 = -3 - x_1 - 3x_2$$

Επιλέγουμε X
Βελτιστοποιούμε L } κάνουμε
δύο
πρώτα
Simplex.

Η W_1 βγαίνει από τη βάση. ($-6 < 0$).

Η x_2 μπαίνει στη βάση.

Το νέο λ. ε. είναι :

$$J = -\frac{9}{2} - \frac{11}{2}x_1 - \frac{3}{2}W_1$$

$$x_2 = 3 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}W_1$$

$$W_2 = -12 - \frac{7}{2}x_1 - \frac{3}{2}W_1$$

Δεν είναι βέλτιστο.

Η W_2 βγαίνει από τη βάση.

Το πρόβλημα είναι μη-εφικτό,
επειδή το δ. ε. το ένα μη-εφικτό.

Χρησιμοποιώντας τη Δυϊκή Simplex για τη Φάση Ι

- Π.γ.π. σε τυπική μορφή με
 - Τουλάχιστον έναν θετικό συντελεστή στην αντικειμενική, *βελτιώνει X*
 - Τουλάχιστον ένα αρνητικό δεξιό μέλος περιορισμού. *επιμένει X*
- Ούτε η Simplex ούτε η δυϊκή Simplex μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα.

Χρησιμοποιώντας τη Δυϊκή Simplex για τη Φάση Ι

Δυϊκή Simplex σε τερματισμένο.

- Λύση:

- Αλλάζω την αντικειμενική θεωρώντας κάποια με όλους τους συντελεστές αρνητικούς (π.χ. την $\sum_{j=1}^n (-1)x_j$).
- Η εφικτή περιοχή δεν αλλάζει.
- Εφαρμόζουμε τη δυϊκή Simplex.
- Βρίσκεται βέλτιστη β.ε.λ. που θα είναι αρχική β.ε.λ. για το αρχικό πρόβλημα ή αποφαίνεται ότι δεν είναι εφικτό.
- Εκφράζουμε την αρχική αντικειμενική συναρτήσε των μη-βασικών μεταβλητών της β.ε.λ.
- Εφαρμόζουμε την Simplex.

Δεν αλλάζω
η εφικτή περιοχή

Παράδειγμα

- Έστω το π.γ.π. σε τυπική μορφή

$$\begin{array}{rcllcl} \max & 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & & \\ \text{υπό} & -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & -4 \\ & -3x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & \leq & -7 \\ & 3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & \leq & 8 \\ & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 2, \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

- Το αρχικό λεξικό είναι

$$\begin{array}{rcllcl} \zeta & = & 0 & + & 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 \\ \hline w_1 & = & -4 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\ w_2 & = & -7 & + & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 \\ w_3 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 \\ w_4 & = & 2 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 3x_1 + x_2 - 4x_3 & & \\
 \text{υπό} & -x_1 - 2x_2 + x_3 & \leq & -4 \\
 & -3x_1 - 4x_2 + 3x_3 & \leq & -7 \\
 & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 & \leq & 8 \\
 & x_1 + x_2 - x_3 & \leq & 2, \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
 \end{array}$$

Είναι σε κανονική μορφή.
Το αρχικό πρόβλημα είναι

$$\begin{aligned}
 J &= 0 + 3x_1 + x_2 - 4x_3 \\
 w_1 &= -4 + 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 \\
 w_2 &= -7 + 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\
 w_3 &= 8 - 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\
 w_4 &= 2 - 1x_1 - 1x_2 + 1x_3
 \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{εφ'αίτια } X \\ \text{βελτιστοποίηση } X \end{array} \right\} \Rightarrow$
 Χάρη στην Simplex
 σε κανονική μορφή.

Το κανονικό πρόβλημα είναι

$$\begin{aligned}
 J' &= 0 - 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 \\
 w_1 &= -4 + 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 \\
 w_2 &= -7 + 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\
 w_3 &= 8 - 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\
 w_4 &= 2 - 1x_1 - 1x_2 + 1x_3
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}$

Η w_2 βγαίνει από τη βάση.
 Η x_2 μπαίνει στη βάση.

Επόμενο λείπει

$$J' = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}w_2 - \frac{3}{4}x_3}{\boxed{w_1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{2}x_3}$$

$$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}w_2 + \frac{3}{4}x_3$$

$$w_3 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{4}w_2 - \frac{1}{4}x_3$$

$$w_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}w_2 + \frac{1}{4}x_3$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

Το επόμενο λείπει είναι:

$$J' = \frac{-2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}w_1 - \frac{3}{2}x_3}{w_2 = 1 + x_1 + 2w_1 - x_3}$$

$$x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_3$$

$$w_3 = 2 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_3$$

$$w_4 = 0 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_3$$

Πως περνάω στο αρχικό πρόβλημα;

- Κράζω ως προς όλους τους τεχνητούς λείπουν του τετακτομένου.
- Προσέρχου στην α.ε. του αρχικού προβλήματος ώστε να εμφανιστεί οι μη-θετικές μεταβλητές του λείπουν.

Η w_1 θγαίνει από τη βάση

Η w_2 μπαίνει στη βάση

Είναι βέλτιστο για το
τετακτομένο

⇓

Το τετακτομένο έχει
βέλτιστη θ.ε.λ.

⇓

Το αρχικό έχει β.ε.λ.

⇓

Επιστρέφω στο αρχικό.

$$J = 2 + \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}w_1 - \frac{7}{2}x_3$$

$$w_2 = 1 + x_1 + 2w_1 - x_3$$

$$x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_3 \quad \frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$w_3 = 2 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_3 \quad \frac{2 - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{w_4} = 0 \quad \left(-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_3 \right) \quad \frac{0 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 0$$

Der erste Zeilenwechsel.

Ergebnisse ✓
 Zeilenwechsel X } neues Simplex.

H x_1 machen zu Basis.

H w_1 bringen aus zu Basis.

Ergebnis 2. Schritt

$$J = 2 - 5w_1 - 2w_1 - 1x_3$$

$$w_2 = 1 - 2w_1 + 1w_1 + 0x_3$$

$$x_2 = 2 + 1w_1 + 1w_1 + 0x_3$$

$$w_3 = 2 + 3w_1 + 0w_1 - 1x_3$$

$$x_1 = 0 - 2w_1 - 1w_1 + 1x_3$$

$$J = 0 + 3x_1 + x_2 - 4x_3$$

0 ist die Zielfunktion von
 x_1, w_1, x_3

$$J = 0 + 3x_1 + x_2 - 4x_3$$

$$= 0 + 3x_1 + (2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_3) - 4x_3$$

$$= 2 + \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}w_1 - \frac{7}{2}x_3$$

Erster Zeilenwechsel.

H Zeilenwechsel zeigen aber

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, w_1^*, w_2^*, w_3^*, w_4^*) =$$

$$(0, 2, 0, 0, 1, 2, 0)$$

$$w \in J^* = 2.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Στο αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcllclclcl} \zeta & = & 0 & + & 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 \\ \hline w_1 & = & -4 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\ w_2 & = & -7 & + & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 \\ w_3 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 \\ w_4 & = & 2 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3. \end{array}$$

- υπάρχει θετικός συντελεστής στην αντικειμενική (οπότε δεν μπορεί να αρχίσει ο δυϊκός αλγόριθμος Simplex),
- υπάρχει αρνητικός σταθερός όρος στους περιορισμούς (οπότε δεν μπορεί να αρχίσει ο αλγόριθμος Simplex).
- Επιλέγω νέα αντικειμενική με όλους τους συντελεστές αρνητικούς. Η εφικτή περιοχή δεν αλλάζει. Έχω π.χ.

$$\zeta' = -x_1 - x_2 - x_3.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Εφαρμόζω δυϊκή Simplex στο λεξικό

$$\begin{array}{rccccccc} \zeta' & = & 0 & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 \\ \hline w_1 & = & -4 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\ w_2 & = & -7 & + & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 \\ w_3 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 \\ w_4 & = & 2 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3. \end{array}$$

- Είναι $\max\{|-4|, |-7|\} = |-7|$. Βγαίνει η w_2 .
- Είναι $\min\{1/ + 3, 1/ + 4\} = 1/4$. Μπαίνει η x_2 .

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Κάνουμε οδήγηση στο αρχικό λεξικό του τροποποιημένου π.γ.π.

$$\begin{array}{rcccccc} \zeta' & = & 0 & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 \\ \hline w_1 & = & -4 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\ w_2 & = & -7 & + & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 \\ w_3 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 \\ w_4 & = & 2 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \end{array}$$

- Προκύπτει το 2ο λεξικό του τροποποιημένου π.γ.π.

$$\begin{array}{rcccccc} \zeta' & = & -7/4 & - & 1/4x_1 & - & 1/4w_2 & - & 7/4x_3 \\ \hline w_1 & = & -1/2 & - & 1/2x_1 & + & 1/2w_2 & + & 1/2x_3 \\ w_2 & = & 7/4 & - & 3/4x_1 & + & 1/4w_2 & + & 3/4x_3 \\ w_3 & = & 11/4 & - & 3/4x_1 & - & 3/4w_2 & - & 1/4x_3 \\ w_4 & = & 1/4 & - & 1/4x_1 & - & 1/4w_2 & + & 1/4x_3 \end{array}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Εφαρμόζουμε δυϊκή Simplex στο 2ο λεξικό του τροποποιημένου π.γ.π.

$$\begin{array}{rcllcl} \zeta' & = & -7/4 & - & 1/4x_1 & - & 1/4w_2 & - & 7/4x_3 \\ \hline w_1 & = & -1/2 & - & 1/2x_1 & + & 1/2w_2 & + & 1/2x_3 \\ x_2 & = & 7/4 & - & 3/4x_1 & + & 1/4w_2 & + & 3/4x_3 \\ w_3 & = & 11/4 & - & 3/4x_1 & - & 3/4w_2 & - & 1/4x_3 \\ w_4 & = & 1/4 & - & 1/4x_1 & - & 1/4w_2 & + & 1/4x_3 \end{array}$$

- Είναι $\max\{|-1/2|\} = |-1/2|$. Βγαίνει η w_1 .
- Είναι $\min\{(1/4)/(+1/2), (7/4)/(+1/2)\} = (1/4)/(+1/2)$. Μπαίνει η w_2 .

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Κάνουμε οδήγηση στο 2ο λεξικό του τροποποιημένου π.γ.π.

$$\begin{array}{rcllcll} \zeta' & = & -7/4 & - & 1/4x_1 & - & 1/4w_2 & - & 7/4x_3 \\ \hline w_1 & = & -1/2 & - & 1/2x_1 & + & 1/2w_2 & + & 1/2x_3 \\ x_2 & = & 7/4 & - & 3/4x_1 & + & 1/4w_2 & + & 3/4x_3 \\ w_3 & = & 11/4 & - & 3/4x_1 & - & 3/4w_2 & - & 1/4x_3 \\ w_4 & = & 1/4 & - & 1/4x_1 & - & 1/4w_2 & + & 1/4x_3 \end{array}$$

- Προκύπτει το 3ο λεξικό του τροποποιημένου π.γ.π.

$$\begin{array}{rcllcll} \zeta' & = & -2 & - & 1/2x_1 & - & 1/2w_1 & - & 3/2x_3 \\ \hline w_2 & = & 1 & + & x_1 & + & 2w_1 & - & x_3 \\ x_2 & = & 2 & - & 1/2x_1 & + & 1/2w_1 & + & 1/2x_3 \\ w_3 & = & 2 & - & 3/2x_1 & - & 3/2w_1 & + & 1/2x_3 \\ w_4 & = & 0 & - & 1/2x_1 & - & 1/2w_1 & + & 1/2x_3 \end{array}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Το 3ο λεξικό του τροποποιημένου π.γ.π.

$$\begin{array}{rcccccc} \zeta' & = & -2 & - & 1/2x_1 & - & 1/2w_1 & - & 3/2x_3 \\ \hline w_2 & = & 1 & + & x_1 & + & 2w_1 & - & x_3 \\ x_2 & = & 2 & - & 1/2x_1 & + & 1/2w_1 & + & 1/2x_3 \\ w_3 & = & 2 & - & 3/2x_1 & - & 3/2w_1 & + & 1/2x_3 \\ w_4 & = & 0 & - & 1/2x_1 & - & 1/2w_1 & + & 1/2x_3 \end{array}$$

δίνει β.ε.λ.

- Συνεχίζουμε με Simplex για εύρεση βέλτιστης λύσης.
- Γράφουμε την αρχική αντικειμενική συνάρτηση των μη-βασικών μεταβλητών της β.ε.λ. που έχει προκύψει:

$$\begin{aligned} \zeta &= 3x_1 + x_2 - 4x_3 \\ &= 3x_1 + (2 - 1/2x_1 + 1/2w_1 + 1/2x_3) - 4x_3 \\ &= 2 + 5/2x_1 + 1/2w_1 - 7/2x_3. \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Το 1ο λεξικό του αρχικού π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rccccccccc} \zeta & = & 2 & + & 5/2x_1 & + & 1/2w_1 & - & 7/2x_3 \\ \hline w_2 & = & 1 & + & x_1 & + & 2w_1 & - & x_3 \\ x_2 & = & 2 & - & 1/2x_1 & + & 1/2w_1 & + & 1/2x_3 \\ w_3 & = & 2 & - & 3/2x_1 & - & 3/2w_1 & + & 1/2x_3 \\ w_4 & = & 0 & - & 1/2x_1 & - & 1/2w_1 & + & 1/2x_3 \end{array}$$

- Μπαίνει η x_1 , βγαίνει η w_4 , κάνουμε οδήγηση:

$$\begin{array}{rccccccccc} \zeta & = & 2 & - & 5w_4 & - & 2w_1 & - & x_3 \\ \hline w_2 & = & 1 & - & 2w_4 & + & w_1 & & \\ x_2 & = & 2 & + & w_4 & + & w_1 & & \\ w_3 & = & 2 & + & 3w_4 & & & - & x_3 \\ x_1 & = & 0 & - & 2w_4 & - & w_1 & + & x_3 \end{array}$$

- Το λεξικό δίνει βέλτιστη β.ε.λ.