

Δυσκότητα

- Για κάθε π.γ.π.

η μεταβλητές απόφασης
m γε. περιορισμοί

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

ορίζεται το δυϊκό του π.γ.π.

m μετ. απόφασης
n γε. περιορισμοί

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{array}$$

Παράδειγμα

- Εργοστάσιο κατεργασίας μεταλλευμάτων παράγει δυο κράματα
 - Ορείχαλκο με τιμή 3 ευρώ ανά μονάδα
 - Μπρούντζο με τιμή 5 ευρώ ανά μονάδα.
- Για μια μονάδα κράματος απαιτούνται
 - 1 μονάδα ψευδάργυρου, 3 μονάδες χαλκού για ορείχαλκο
 - 2 μονάδες κασσίτερου, 2 μονάδες χαλκού για μπρούντζο.
- Το εργοστάσιο έχει
 - 4 μονάδες ψευδάργυρου,
 - 12 μονάδες κασσίτερου,
 - 18 μονάδες χαλκού.
- Βέλτιστο σχέδιο μίξης; → πρόβλημα παραγωγής
- Βέλτιστη αποτίμηση υλικών; → πρόβλημα αποτίμησης υλικών.

Πρόβλημα παραγωγής

x_1 : μονάδες ορείχαλκου να θα παραχθούν

x_2 : >> μπρούτζου >> >> >>

$$\max \quad 3 \cdot x_1 + 5x_2$$

$$\text{υπό} \quad 1x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2 μετ. απόδοσης

3 γε. περιορισμοί

Θα γράψω το πρόβλημα της αποτίμησης των πρώτων υλών ως διπλό πρόβλημα παραγωγής.

$$\min \quad 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

$$\text{υπό} \quad 1y_1 + 0y_2 + 3y_3 \geq 3$$

$$0y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

3 μετ. απόδοσης
(y_1, y_2, y_3)

2 γε. περιορισμοί

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης

- Μεταβλητές απόφασης:
 x_1 : Μονάδες ορείχαλκου που θα παραχθούν,
 x_2 : Μονάδες μπρούντζου που θα παραχθούν.
- Π.γ.π.:

$$\begin{array}{rcll} \max & 3x_1 & + & 5x_2 \\ \text{υπό} & x_1 & & \leq 4 \\ & & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 \leq 18 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

Παράδειγμα - Π.γ.π. αποτίμησης

- Μεταβλητές απόφασης:
 y_1 : Τιμή ανά μονάδα ψευδάργυρου,
 y_2 : Τιμή ανά μονάδα κασσιτέρου,
 y_3 : Τιμή ανά μονάδα χαλκού.
- Π.γ.π.:

$$\begin{array}{rcllcl} \min & 4y_1 & + & 12y_2 & + & 18y_3 \\ \text{υπό} & y_1 & & & + & 3y_3 & \geq & 3 \\ & & & 2y_2 & + & 2y_3 & \geq & 5 \\ & & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης και αποτίμησης

- Το δυϊκό του π.γ.π.

$$\begin{array}{llll} \max & 3x_1 & + & 5x_2 \\ \text{υπό} & x_1 & & \leq 4 \\ & & & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 \leq 18 \\ & & & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

είναι το

$$\begin{array}{llll} \min & 4y_1 & + & 12y_2 & + & 18y_3 \\ \text{υπό} & y_1 & & & + & 3y_3 \geq 3 \\ & & & 2y_2 & + & 2y_3 \geq 5 \\ & & & & & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{array}$$

- Το δυϊκό προέκυψε με φυσικό τρόπο από συζυγές οικονομικό πρόβλημα.

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Έστω το π.γ.π. μίξης

$$\begin{array}{rcll} \max & 3x_1 & + & 5x_2 \\ \text{υπό} & x_1 & & \leq 4 \\ & & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 \leq 18 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

- Πώς μπορώ να πάρω φράγματα για τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής;

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{υπό} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Θέλουμε να βρούμε ένα πρόβλημα για την τιμή της αντικ. συνάρτησης.

$$\text{π.χ} \quad 3x_1 + 5x_2 \leq \underline{50}$$

ένω πρόβλημα

$$3x_1 + 5x_2 \leq \underline{45}$$

καλύτερο ένω πρόβλημα

Τα ένω πρόβλημα θα προκύψουν από τους περιορισμούς.

$$(x_1 \leq 4) \times 3 \Rightarrow 3x_1 \leq 12$$

$$(2x_2 \leq 12) \times \frac{5}{2} \Rightarrow 5x_2 \leq 30$$

$$(3x_1 + 2x_2 \leq 18) \times 0$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq \underline{42}$$

ένω πρόβλημα

$$(x_1 \leq 4) \times 0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_2 \leq 12 \end{array} \right\} \times \frac{3}{2} \Rightarrow 3x_2 \leq 18$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \end{array} \right\} \times 1 \Rightarrow 3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq \underline{36}$$

ένω πρόβλημα,
καλύτερο από το προηγούμενο

$$(x_1 \leq 4) \times 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_2 \leq 12 \end{array} \right\} \times 2 \Rightarrow 4x_2 \leq 24$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \end{array} \right\} \times 1 \Rightarrow 3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + 6x_2 \leq \underline{42}$$

επειδή $3x_1 + 5x_2 \leq 3x_1 + 6x_2 \leq \underline{42}$

ένω πρόβλημα

Θα ήθελα να βρω το καλύτερο ένα πρόγραμμα.
 Θα βρω ένα γενικό ένα πρόγραμμα και μετά θα πάρω το καλύτερο.

$$(x_1 \leq 4) \times y_1 \Rightarrow y_1 x_1 \leq 4y_1$$

$$(2x_2 \leq 12) \times y_2 \Rightarrow 2y_2 x_2 \leq 12y_2$$

$$(3x_1 + 2x_2 \leq 18) \times y_3 \Rightarrow 3y_3 x_1 + 2y_3 x_2 \leq 18y_3$$

$$\text{με } y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$$(y_1 + 3y_3)x_1 + (2y_2 + 2y_3)x_2 \leq 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

Είναι ένα
 πρόγραμμα
 του α.β.
 αν

$$y_1 + 3y_3 \geq 3$$

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

Το καλύτερο ένα πρόγραμμα
 για την τιμή της α.β. του (7)

είναι

$$\min 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

υπό

$$y_1 + 3y_3 \geq 3$$

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$$\begin{array}{lll} \max & 3x_1 + 5x_2 & \\ \text{υπό} & x_1 & \leq 4 \\ & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\ & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

7

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Έστω το π.γ.π. μίξης

$$\begin{array}{rcll} \max & 3x_1 & + & 5x_2 \\ \text{υπό} & x_1 & & \leq 4 \\ & & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 \leq 18 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

- Πώς μπορώ να πάρω φράγματα για τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής;

Θεώρηση γραμμικών συνδυασμών των περιορισμών.

Π.χ.

$$\begin{array}{rcll} & (& x_1 & \leq 4) \times 3 \\ + & (& & 2x_2 \leq 12) \times 5/2 \\ \hline & 3x_1 & + & 5x_2 \leq 42. \end{array}$$

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Π.γ.π:

$$\begin{array}{rcll} \max & 3x_1 & + & 5x_2 \\ \text{υπό} & x_1 & & \leq 4 \\ & & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 \leq 18 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

- Άλλος γραμμικός συνδυασμός περιορισμών - φράγμα:

$$\begin{array}{rcll} & (& x_1 & \leq 4) \times 3/2 \\ + & (& & 2x_2 \leq 12) \times 2 \\ + & (& 3x_1 + 2x_2 & \leq 18) \times 1/2 \\ \hline & 3x_1 & + & 5x_2 \leq 39. \end{array}$$

- Καλύτερο φράγμα από το προηγούμενο.
Μπορούμε και καλύτερα;

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Π.γ.π:

$$\begin{array}{rcll} \max & 3x_1 & + & 5x_2 \\ \text{υπό} & x_1 & & \leq 4 \\ & & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 \leq 18 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

- Γενικός γραμμικός συνδυασμός περιορισμών:

$$\begin{array}{rcll} & (& x_1 & \leq 4) \times y_1 \\ + & (& & 2x_2 \leq 12) \times y_2 \\ + & (& 3x_1 & + 2x_2 \leq 18) \times y_3 \\ \hline & (y_1 + 3y_3)x_1 & + & (2y_2 + 2y_3)x_2 \leq 4y_1 + 12y_2 + 18y_3. \end{array}$$

- Δίνει φράγμα για την αντικειμενική μόνο αν
 $3 \leq y_1 + 3y_3$, $5 \leq 2y_2 + 2y_3$ και $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης - Φράγματα

- Π.γ.π:

$$\begin{array}{rcll} \max & 3x_1 & + & 5x_2 \\ \text{υπό} & x_1 & & \leq 4 \\ & & 2x_2 & \leq 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 \leq 18 \\ & & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

- Γενικό φράγμα - γραμμικός συνδυασμός περιορισμών:

$$4y_1 + 12y_2 + 18y_3,$$

εφόσον $3 \leq y_1 + 3y_3$, $5 \leq 2y_2 + 2y_3$ και $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

- Βέλτιστο φράγμα - γραμμικός συνδυασμών περιορισμών:

$$\begin{array}{rcll} \min & 4y_1 & + & 12y_2 + 18y_3 \\ \text{υπό} & y_1 & & + 3y_3 \geq 3 \\ & & 2y_2 & + 2y_3 \geq 5 \\ & & & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{array}$$

Οικονομική ερμηνεία του δυϊκού

- Ένα π.γ.π. της μορφής

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

μπορεί να θεωρηθεί πρόβλημα κατανομής m πόρων σε n δραστηριότητες.

- Λύση του αρχικού (πρωτεύοντος) π.γ.π:
Βέλτιστη ένταση ανά δραστηριότητα j .
Π.χ. Πλήθος προϊόντων τύπου j που θα παραχθούν.
- Λύση του δυϊκού π.γ.π.:
Μοναδιαία αξία πόρου i .
Π.χ. Μοναδιαίες αξίες υλικών i .

Φραγματική ερμηνεία του δυϊκού

- Έστω το π.γ.π.

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

- Αναζητούμε άνω φράγματα για τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής.
- Μια ιδέα είναι να θεωρήσουμε γραμμικούς συνδυασμούς των περιορισμών.
- Πολλαπλασιάζοντας τον περιορισμό i με $y_i \geq 0$ (ώστε να μην αλλάξει φορά) και προσθέτοντας παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^m y_i b_i.$$

Φραγματική ερμηνεία του δυϊκού (συνέχεια)

- Για να δώσει η ανισότητα

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

φράγμα για την αντικειμενική συνάρτηση πρέπει οι συντελεστές των x_j στο αριστερό μέλος να είναι μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους συντελεστές των x_j στην αντικειμενική, δηλ.

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Φραγματική ερμηνεία του δυϊκού (συνέχεια)

- Λύνοντας το δυϊκό π.γ.π.

$$\begin{array}{ll}\min & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.\end{array}$$

βρίσκουμε το καλύτερο άνω-φράγμα της αντικειμενικής του πρωτεύοντος

$$\begin{array}{ll}\max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.\end{array}$$

που μπορεί να προκύψει από γραμμικούς συνδυασμούς των περιορισμών του.

Συμμετρία της δυϊκότητας

Θεώρημα

Το δυϊκό του δυϊκού ενός π.γ.π. είναι το αρχικό π.γ.π.

- Το δυϊκό του π.γ.π.

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

είναι το π.γ.π.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{array}$$

Έστω το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{υπό} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1,2,\dots,m \quad (1)$$
$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n$$

και το δυικό του

$$\min \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{υπό} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j=1,2,\dots,n \quad (2)$$
$$y_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,m$$

Θα δείξουμε ότι το δυικό του (2) είναι το (1)

Θα βρούμε το δυικό του (2).

Θα φέρω το (2) σε κανονική μορφή.

$$\begin{aligned} & - \max - \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ & \text{υπό} - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq -c_j, \quad j=1,2,\dots,n \\ & \quad y_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,m \end{aligned}$$

λοοδίζουμε,

$$\begin{aligned} & - \max \sum_{i=1}^m (-b_i) y_i \quad \text{m μετ. αναρ.} \\ & \text{υπό} \sum_{i=1}^m (-a_{ij}) y_i \leq -c_j, \quad j=1,2,\dots,n \quad \text{n γε. ανεξαρ.} \\ & \quad y_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,m. \end{aligned}$$

Το δυικό του είναι:

$$\begin{aligned} & - \min \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j \quad \text{n μετ. αναρ.} \\ & \text{υπό} \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \geq -b_i, \quad i=1,\dots,m \quad \text{(x}_1, x_2, \dots, x_n\text{)} \\ & \quad x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n \quad \text{m γε. ανεξαρ.} \end{aligned}$$

λοοδίζουμε

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \text{υπό} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1,2,\dots,m \\ & \quad x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n \end{aligned}$$

είναι το (1)

Συμμετρία της δυϊκότητας (συνέχεια)

- Το π.γ.π.

$$\begin{array}{ll}\min & \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.\end{array}$$

γράφεται σε τυπική μορφή ως

$$\begin{array}{ll}-\max & \sum_{i=1}^m -b_i y_i \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^m -a_{ij} y_i \leq -c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.\end{array}$$

του οποίου το δυϊκό είναι

$$\begin{array}{ll}-\min & \sum_{j=1}^n -c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n -a_{ij} x_j \geq -b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.\end{array}$$

Συμμετρία της δυϊκότητας (συνέχεια)

- Το τελευταίο π.γ.π.

$$\begin{array}{ll} - \min & \sum_{j=1}^n -c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n -a_{ij} x_j \geq -b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

γράφεται σε τυπική μορφή ως

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

που είναι ακριβώς το αρχικό.

Τυπική μορφή του δυϊκού

- Δοθέντος ενός π.γ.π.

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

η τυπική μορφή του δυϊκού του είναι

$$\begin{array}{ll} -\max & \sum_{i=1}^m -b_i y_i \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^m -a_{ij} y_i \leq -c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{array}$$

Το αρχικό

- Λεξιικό του δυϊκού = Αρνητικός ανάστροφος του λεξιικού του πρωτεύοντος.

επίλυσης

Θεωρούμε το (N)

$$\max 2x_1 + 7x_2$$

$$\text{υπό } -1x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$2x_1 - 5x_2 \leq 8$$

$$9x_1 - 4x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(24 επ. αναλ.)
(36 επ. απε.)

Το αρχικό πρόβλημα στο (N)
είναι,

$$\underline{J = 0 + 2x_1 + 7x_2}$$

$$w_1 = 4 + 1x_1 - 3x_2$$

$$w_2 = 8 - 2x_1 + 5x_2$$

$$w_3 = 1 - 9x_1 + 4x_2$$

Το (D) είναι: (34 επ. αναλ.)
(24 επ. απε.)

$$\min 4y_1 + 8y_2 + 1y_3$$

$$\text{υπό } -1y_1 + 2y_2 + 9y_3 \geq 2$$

$$3y_1 - 5y_2 - 4y_3 \geq 7$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Το πρόβλημα σε κανονική μορφή

$$- \max -4y_1 - 8y_2 - 1y_3$$

$$\text{υπό } 1y_1 - 2y_2 - 9y_3 \leq -2$$

$$-3y_1 + 5y_2 + 4y_3 \leq -7$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Το αρχικό πρόβλημα στο (D)
είναι:

$$\underline{J = 0 - 4y_1 - 8y_2 - 1y_3}$$

$$z_1 = -2 - 1y_1 + 2y_2 + 9y_3$$

$$z_2 = -7 + 3y_1 - 5y_2 - 4y_3$$

Το αρχικό πρόβλημα στο (N) είναι αρχικό-ακρότατο
στο αρχικό πρόβλημα στο (D)

Ασθενές Δυϊκό Θεώρημα

Θεώρημα

Η αντικειμενική συνάρτηση του πρωτεύοντος σε μια εφικτή λύση του είναι μικρότερη ή ίση της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού σε μια εφικτή λύση του.

- Άμεσο από την φραγματική ερμηνεία του δυϊκού.

Έστω το πρόβλημα πρόβλημα

$$\max \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{υπό} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1,2,\dots,m \quad (1)$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n \quad (2)$$

και το Συστήμα του

$$\min \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$\text{υπό} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j=1,2,\dots,n \quad (3)$$

$$y_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,m \quad (4)$$

Από το Συστήμα Θωπόμε:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n)$ επιμετρήσιμα (1) και
 $(y_1, y_2, \dots, y_m) \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow (2)$.

Αντίστροφα:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \stackrel{(1),(2)}{\leq} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \stackrel{(1),(4)}{\leq} \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

Ασθενές Δυϊκό Θεώρημα - Μαθ. διατύπωση

Θεώρημα

Αν $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι εφικτή λύση του πρωτεύοντος και $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ είναι εφικτή λύση του δυϊκού, τότε

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i.$$

- Έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j &\leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \\ &\leq \sum_{i=1}^m b_i y_i. \end{aligned}$$

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Έστω το πρωτεύον π.γ.π. σε τυπική μορφή

$$\begin{array}{rcll} \max & -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 \\ \text{υπό} & & & -x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\ & -3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ & & & & & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

- Το δυϊκό του σε τυπική μορφή είναι

$$\begin{array}{rcll} -\max & & & - & 3y_2 \\ \text{υπό} & & & & 3y_2 & \leq & 3 \\ & y_1 & - & 4y_2 & \leq & -2 \\ & -2y_1 & - & y_2 & \leq & -1 \\ & & & & y_1, y_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το αρχικό λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rclclcl} \zeta & = & 0 & - & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 \\ \hline w_1 & = & 0 & & & + & x_2 & - & 2x_3 \\ w_2 & = & 3 & + & 3x_1 & - & 4x_2 & - & x_3. \end{array}$$

- Το αρχικό λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rclclcl} -\xi & = & 0 & & - & 3y_2 \\ \hline z_1 & = & 3 & & - & 3y_2 \\ z_2 & = & -2 & - & y_1 & + & 4y_2 \\ z_3 & = & -1 & + & 2y_1 & + & y_2. \end{array}$$

- Πίνακας δυϊκού = Αντίθετος ανάστροφος πρωτεύοντος.
- Η βασική λύση του πρωτεύοντος είναι εφικτή.
Η βασική λύση του δυϊκού δεν είναι εφικτή.

Θα κάνω Simplex στο πρόβλημα και ανάλογη οδήγηση στο (A).

Για να ελεγχώ ανάλογη οδήγηση πρέπει να θυμάμαι τις αντιστοιχίες:

$$x_j \text{ μετ. αποφ. στο } (A) \longleftrightarrow j\text{-οστός περιορισμός στο } (A) \longleftrightarrow z_j \text{ περιθώριο στο } (A)$$

$$x_j \longleftrightarrow z_j$$

$$y_i \text{ μετ. αποφ. στο } (A) \longleftrightarrow i\text{-οστός περιορισμός στο } (A) \longleftrightarrow w_i \text{ περιθώριο στο } (A)$$

$$y_i \longleftrightarrow w_i$$

Ανάλογη οδήγηση:

- Όταν μια μεταβλητή μπει στη βάση στο (A), η αντιστοιχία της βγαίνει από τη βάση στο (A).
- Όταν μια μεταβλητή βγαίνει από τη βάση στο (A), η αντιστοιχία της θα μπει στη βάση στο (A).

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το αρχικό λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

Η x_2 μπαίνει στη βάση.
Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

$$\begin{array}{rcll}
 \zeta & = & 0 & - & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 \\
 w_1 & = & 0 & & & + & x_2 & - & 2x_3 \\
 w_2 & = & 3 & + & 3x_1 & - & 4x_2 & - & x_3
 \end{array}$$

Annotations: Blue box around $2x_2$ in the first row, blue circle around $-4x_2$ in the third row. Blue arrows point from $2x_2$ to z_2 and from $-4x_2$ to the right.

- Το αρχικό λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

Η z_2 βγαίνει από τη βάση.
Η y_2 μπαίνει στη βάση.

$$\begin{array}{rcll}
 -\xi & = & 0 & - & 3y_2 \\
 z_1 & = & 3 & - & 3y_2 \\
 z_2 & = & -2 & - & y_1 & + & 4y_2 \\
 z_3 & = & -1 & + & 2y_1 & + & y_2
 \end{array}$$

Annotations: Blue box around $3y_2$ in the first row, blue box around z_2 in the third row, blue circle around $+4y_2$ in the third row.

- Στο πρωτεύον η x_2 μπαίνει στη βάση, η w_2 βγαίνει.
- Εφαρμόζω την ανάλογη οδήγηση στο δυϊκό:
 Η z_2 βγαίνει, η y_2 μπαίνει στη βάση.

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το 2ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

Η x_3 μπαίνει
στη βάση
Η w_1 βγαίνει
από τη βάση
 y_1

$$\begin{aligned}\zeta &= 3/2 - 3/2x_1 - 1/2w_2 + 1/2x_3 \\ w_1 &= 3/4 + 3/4x_1 - 1/4w_2 - 9/4x_3 \\ x_2 &= 3/4 + 3/4x_1 - 1/4w_2 - 1/4x_3.\end{aligned}$$

z_3
Μνδ $x_3 = \frac{3/4}{1/4} = 3$
Μνδ y_1
 $x_3 = \frac{3/4 - 3}{1/4}$

- Το 2ο λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

Η z_3 βγαίνει
από τη βάση
Η y_1 μπαίνει στη
βάση

$$\begin{aligned}-\xi &= -3/2 - 3/4y_1 - 3/4z_2 \\ z_1 &= 3/2 - 3/4y_1 - 3/4z_2 \\ y_2 &= 1/2 + 1/4y_1 + 1/4z_2 \\ z_3 &= -1/2 + 9/4y_1 + 1/4z_2.\end{aligned}$$

- Πίνακας δυϊκού = Αντίθετος ανάστροφος πρωτεύοντος
- Στο πρωτεύον: η x_3 μπαίνει στη βάση, η w_1 βγαίνει.
- Ανάλογη οδήγηση στο δυϊκό: Η z_3 βγαίνει, η y_1 μπαίνει.

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το 3ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

είναι 0 ελάχιστο.

$$\begin{array}{rcll} \zeta & = & 5/3 & - & 4/3x_1 & - & 5/9w_2 & - & 2/9w_1 \\ \hline x_3 & = & 1/3 & + & 1/3x_1 & - & 1/9w_2 & - & 4/9w_1 \\ x_2 & = & 2/3 & + & 2/3x_1 & - & 2/9w_2 & + & 1/9w_1. \end{array}$$

- Το 3ο λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

είναι 0 ελάχιστο.

$$\begin{array}{rcll} -\xi & = & -5/3 & - & 1/3z_3 & - & 2/3z_2 \\ \hline z_1 & = & 4/3 & - & 1/3z_3 & - & 2/3z_2 \\ y_2 & = & 5/9 & + & 1/9z_3 & + & 2/9z_2 \\ y_1 & = & 2/9 & + & 4/9y_1 & - & 1/9z_2. \end{array}$$

- Πίνακας δυϊκού = Αντίθετος ανάστροφος πρωτεύοντος
- Στο πρωτεύον η βασική λύση είναι και εφικτή και βέλτιστη.
- Στο δυϊκό η βασική λύση είναι και εφικτή και βέλτιστη.

Τεταμὸ ἀξίωμα τοῦ (1)

$$\begin{aligned}\zeta &= 5/3 - 4/3x_1 - 5/9w_2 - 2/9w_1 \\ x_3 &= 1/3 + 1/3x_1 - 1/9w_2 - 4/9w_1 \\ x_2 &= 2/3 + 2/3x_1 - 2/9w_2 + 1/9w_1.\end{aligned}$$

- Ἡ βέλτιστη λύση τοῦ (1) εἶναι

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$$

- Ἡ βέλτιστη τιμὴ τῆς α.ε. τοῦ (1) εἶναι $J = \frac{5}{3}$.

- Ἡ βέλτιστη λύση τοῦ (2) (τὴν διαβάζουμε ἀπὸ τοὺς συντελεστῆς τῆς α.ε.) εἶναι:

$$(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3) = (\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{4}{3}, 0, 0)$$

Τὸ τεταμὸ ἀξίωμα τοῦ (2) εἶναι:

$$\begin{aligned}-\xi &= -5/3 - 1/3z_3 - 2/3z_2 \\ z_1 &= 4/3 - 1/3z_3 - 2/3z_2 \\ y_2 &= 5/9 + 1/9z_3 + 2/9z_2 \\ y_1 &= 2/9 + 4/9z_3 - 1/9z_2.\end{aligned}$$

- Ἡ βέλτιστη λύση τοῦ (2) εἶναι

$$(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3) = (\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{4}{3}, 0, 0)$$

- Ἡ βέλτιστη τιμὴ τῆς α.ε. τοῦ (2) εἶναι: $J = -(-\frac{5}{3}) = \frac{5}{3}$

- Ἡ βέλτιστη λύση τοῦ (3) εἶναι

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$$

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα

- Περιθώριες μεταβλητές του πρωτεύοντος σε 1-1 αντιστοιχία με τις αρχικές μεταβλητές του δυϊκού. $y_i \leftrightarrow w_i$
- Αρχικές μεταβλητές του πρωτεύοντος σε 1-1 αντιστοιχία με τις περιθώριες μεταβλητές του δυϊκού. $x_j \leftrightarrow z_j$
- Ο πίνακας του αρχικού λεξικού του πρωτεύοντος είναι ο αντίθετος ανάστροφος του αρχικού λεξικού του δυϊκού.
- Οδήγηση στο πρωτεύον $\rightarrow$ Αντίστ. οδήγηση στο δυϊκό. Τότε ο πίνακας κάθε λεξικού του πρωτεύοντος είναι ο αντίθετος ανάστροφος του αντίστ. λεξικού του δυϊκού.

Μέθοδος Simplex, δυϊκότητα, βέλτιστες β.ε.λ.

- Το τελικό λεξικό της Simplex του πρωτεύοντος δίνει βέλτιστη β.ε.λ. και για το πρωτεύον και για το δυϊκό.
- Εφικτότητα βασικής λύσης του δυϊκού:
Η βασική λύση του πρωτεύοντος είναι βέλτιστη $\Rightarrow$
Συντελεστές αντικειμενικής πρωτεύοντος $\leq 0 \Rightarrow$
Σταθεροί όροι περιορισμών δυϊκού $\geq 0 \Rightarrow$
Η βασική λύση του δυϊκού είναι εφικτή.
- Βελτιστότητα βασικής λύσης του δυϊκού:
Η βασική λύση του πρωτεύοντος είναι εφικτή $\Rightarrow$
Σταθεροί όροι περιορισμών πρωτεύοντος $\geq 0 \Rightarrow$
Συντελεστές αντικειμενικής δυϊκού $\leq 0 \Rightarrow$
Η βασική λύση του δυϊκού είναι βέλτιστη.

Μέθοδος Simplex, δυϊκότητας, βέλτιστες β.ε.λ.

- Το τελικό λεξικό της Simplex δίνει βέλτιστη β.ε.λ. και για το πρωτεύον και για το δυϊκό.
- Η βέλτιστη λύση του δυϊκού βρίσκεται διαβάζοντας του συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του βέλτιστου λεξικού του πρωτεύοντος.
- Οι τιμές των βασικών μεταβλητών του δυϊκού στη βέλτιστη λύση είναι οι αντίθετοι των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης του βέλτιστου λεξικού του πρωτεύοντος.
- Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η ίδια και για το πρωτεύον και για το δυϊκό.
- Όλα βασίζονται στο ότι σε κάθε βήμα οι πίνακες των λεξικών είναι αντίθετοι ανάστροφοι.

Ισχυρό Δυϊκό Θεώρημα

Θεώρημα

Αν το πρωτεύον π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

τότε και το δυϊκό έχει άριστη λύση

$$y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$$

και οι βέλτιστες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων συμπίπτουν:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*.$$

Σχέση λύσεων πρωτεύοντος και δυϊκού

- Από τις 9 περιπτώσεις ζευγών λύσεων πρωτεύοντος-δυϊκού μόνο 4 είναι δυνατές:
 - Ύπαρξη βέλτιστης λύσης πρωτεύοντος, ύπαρξη βέλτιστης λύσης δυϊκού.
 - Μη-φραγμένο πρωτεύον, μη-εφικτό δυϊκό.
 - Μη-εφικτό πρωτεύον, μη-φραγμένο δυϊκό.
 - Μη-εφικτό πρωτεύον, μη-εφικτό δυϊκό.
- Αλλιώς:
 - Ύπαρξη βέλτιστης λύσης πρωτεύοντος $\Rightarrow$ Ύπαρξη βέλτιστης λύσης δυϊκού, με ίδια τιμή αντικ. συνάρτησης.
 - Μη-φραγμένο πρωτεύον $\Rightarrow$ Μη-εφικτό δυϊκό.
 - Μη-εφικτό πρωτεύον $\Rightarrow$ Μη-φραγμένο ή μη-εφικτό δυϊκό.
- Αποδ: Ασθενές και Ισχυρό Δυϊκά Θεωρήματα.

Π / Δ	βέβαιον αίτη	μη-προσ- αίτη	μη- εφαρμογή
βέβαιον αίτη	ΙΔΘ ✓	ΙΔΘ ✗	ΙΔΘ ✗
μη- εφαρμογή	ΙΔΘ ✗	ΑΔΘ ✗	ΑΔΘ ✓
μη- εφαρμογή	ΙΔΘ ✗	ΑΔΘ ✓	uniquely needs extra. ✓

$$\Pi \text{ μη-εφαρμογή} \Rightarrow \max \sum_{j=1}^n c_j x_j = +\infty$$

$$\text{ΑΔΘ. : } \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^n b_i y_i$$