

Επιχειρησιακή Έρευνα

Ενότητα 3

Η μέθοδος Simplex

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

Τυπική μορφή π.γ.π.

- Είναι:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n \\
 \text{υπό} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
 & & & & & \vdots & & & & \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
 & x_1, x_2, \dots, x_n & \geq & 0.
 \end{array}$$

- Μεγιστοποίηση της αντικειμενικής,
- Όλοι οι περιορισμοί τύπου $\leq$,
- Όλες οι μεταβλητές ≥ 0 .

Τροπή π.γ.π. σε τυπική μορφή I

- Αν πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης τότε αντί για

$$\min \zeta = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

θέτουμε

$$-\max -\zeta = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n.$$

- Αν κάποιος περιορισμός είναι τύπου

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b$$

τότε πολλαπλασιάζουμε με -1 , οπότε αντικαθιστούμε με

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \leq -b$$

Τροπή π.γ.π. σε τυπική μορφή II

- Αν κάποιος περιορισμός είναι τύπου

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

τότε τον αντικαθιστούμε με δυο περιορισμούς

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$$

και

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \leq -b.$$

Τροπή π.γ.π. σε τυπική μορφή III

- Αν κάποια μεταβλητή είναι τύπου

$$x_j \leq 0$$

τότε την αντικαθιστούμε με την αντίθετή της, δηλαδή θέτουμε $x_j = -x'_j$ και έχουμε

$$x'_j \geq 0.$$

- Αν κάποια μεταβλητή είναι τύπου

$$x_j \in \mathbb{R} \text{ (χωρίς περιορισμό)}$$

τότε την αντικαθιστούμε με τη διαφορά δυο μη αρνητικών μεταβλητών, δηλαδή θέτουμε $x_j = x'_j - x''_j$ και έχουμε

$$x'_j, x''_j \geq 0.$$

Παράδειγμα

- Να τεθεί σε τυπική μορφή το π.γ.π.

$$\min \quad x_1 - 2x_2 + 4x_3$$

$$\text{υπό} \quad x_1 - 3x_2 \leq 10$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 3$$

$$x_1 - x_3 = 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\
 \text{υπό} \quad & x_1 - 3x_2 \leq 10 \\
 & x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 3 \\
 & x_1 - x_3 = 2 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Θέλω

$$x_2 = -x_2', x_2' \geq 0$$

$$x_3 = x_3' - x_3'', x_3', x_3'' \geq 0$$

Isosivare, έχουμε

$$\min \quad x_1 + 2x_2' + 4x_3' - 4x_3''$$

$$\text{υπό} \quad x_1 + 3x_2' \leq 10$$

$$x_1 + x_2' - 2x_3' + 2x_3'' \geq 3$$

$$x_1 - x_3' + x_3'' = 2$$

$\Leftrightarrow$

$$x_1, x_2', x_3', x_3'' \geq 0$$

$$- \max \quad -x_1 - 2x_2' - 4x_3' + 4x_3''$$

$$\text{υπό} \quad x_1 + 3x_2' \leq 10$$

$$-x_1 - x_2' + 2x_3' - 2x_3'' \leq -3$$

$$x_1 - x_3' + x_3'' \leq 2$$

$$-x_1 + x_3' - x_3'' \leq -2$$

$$x_1, x_2', x_3', x_3'' \geq 0$$

Παράδειγμα

- Να τεθεί σε τυπική μορφή το π.γ.π.

$$\begin{array}{llll}
 \min & x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 \\
 \text{υπό} & x_1 & - & 3x_2 & & \leq & 10 \\
 & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 3 \\
 & x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \\
 & x_1 \geq 0, & x_2 \leq 0, & x_3 \in \mathbb{R}.
 \end{array}$$

- Θέτουμε $x_2 = -x'_2$ και $x_3 = x'_3 - x''_3$ με $x'_2, x'_3, x''_3 \geq 0$.
Έχουμε:

$$\begin{array}{llll}
 \min & x_1 & + & 2x'_2 & + & 4x'_3 & - & 4x''_3 \\
 \text{υπό} & x_1 & + & 3x'_2 & & & & \leq & 10 \\
 & x_1 & + & x'_2 & - & 2x'_3 & + & 2x''_3 & \geq & 3 \\
 & x_1 & & & - & x'_3 & + & x''_3 & = & 2 \\
 & x_1, x'_2, x'_3, x''_3 \geq 0.
 \end{array}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έχουμε:

$$\begin{array}{rcll}
 \min & x_1 & + & 2x'_2 & + & 4x'_3 & - & 4x''_3 \\
 \text{υπό} & x_1 & + & 3x'_2 & & & & & \leq & 10 \\
 & x_1 & + & x'_2 & - & 2x'_3 & + & 2x''_3 & \geq & 3 \\
 & x_1 & & & - & x'_3 & + & x''_3 & = & 2 \\
 & x_1, x'_2, x'_3, x''_3 & \geq & 0.
 \end{array}$$

- Πολλαπλασιάζουμε την αντικειμενική και τον 2ο περιορισμό με -1 και αντικαθιστούμε τον 3ο περιορισμό με δυο νέους περιορισμούς:

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Από

$$\begin{array}{ll}
 \min & x_1 + 2x'_2 + 4x'_3 - 4x''_3 \\
 \text{υπό} & x_1 + 3x'_2 \leq 10 \\
 & x_1 + x'_2 - 2x'_3 + 2x''_3 \geq 3 \\
 & x_1 - x'_3 + x''_3 = 2 \\
 & x_1, x'_2, x'_3, x''_3 \geq 0
 \end{array}$$

- γίνεται

$$\begin{array}{ll}
 -\max & -x_1 - 2x'_2 - 4x'_3 + 4x''_3 \\
 \text{υπό} & x_1 + 3x'_2 \leq 10 \\
 & -x_1 - x'_2 + 2x'_3 - 2x''_3 \leq -3 \\
 & x_1 - x'_3 + x''_3 \leq 2 \\
 & -x_1 + x'_3 - x''_3 \leq -2 \\
 & x_1, x'_2, x'_3, x''_3 \geq 0.
 \end{array}$$

Από την τυπική μορφή στη μορφή Simplex

- Για να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος επίλυσης Simplex τρέπουμε τους περιορισμούς σε εξισωτικούς προσθέτοντας περιθώριες μεταβλητές:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

↓

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + w_i = b_i$$

$$w_i \geq 0.$$

- Κατόπιν λύνουμε ως προς τις περιθώριες τους νέους περιορισμούς:

$$w_i = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n.$$

- Το προκύπτον σχήμα αναφέρεται ως λεξικό.

Παράδειγμα

- Να τεθεί το π.γ.π. σε μορφή λεξικού Simplex:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 - 4x_2 \\ \text{υπό} \quad & x_1 - x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 24 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Είναι σε τυπική μορφή.

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 - 4x_2 \\ \text{υπό} \quad & x_1 - x_2 + w_1 = 6 \\ & 3x_1 - 2x_2 + w_2 = 24 \\ & -2x_1 + 3x_2 + w_3 = 9 \\ & x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 - 4x_2 \\ \text{υπό} \quad & w_1 = 6 - x_1 + x_2 \\ & w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2 \\ & w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2 \\ & x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= 0 + 5x_1 - 4x_2 \\ w_1 &= 6 - x_1 + x_2 \\ w_2 &= 24 - 3x_1 + 2x_2 \\ w_3 &= 9 + 2x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

Λεξιού

Παράδειγμα

- Να τεθεί το π.γ.π. σε μορφή λεξικού Simplex:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 5x_1 & - & 4x_2 \\
 \text{υπό} & x_1 & - & x_2 \leq 6 \\
 & 3x_1 & - & 2x_2 \leq 24 \\
 & -2x_1 & + & 3x_2 \leq 9 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0.
 \end{array}$$

- Έχουμε το λεξικό:

$$\begin{array}{rcll}
 \max & \zeta & = & 0 + 5x_1 - 4x_2 \\
 \text{υπό} & w_1 & = & 6 - x_1 + x_2 \\
 & w_2 & = & 24 - 3x_1 + 2x_2 \\
 & w_3 & = & 9 + 2x_1 - 3x_2 \\
 & x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 & \geq & 0.
 \end{array}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Το λεξικό

$$\begin{array}{rclclcl}
 \max & \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
 \text{υπό} & w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
 & w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
 & w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \\
 & & & x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 & \geq & 0.
 \end{array}$$

το γράφουμε συνήθως σε απλοποιημένη μορφή, παραλείποντας το $\max$ και τους περιορισμούς μη-αρνητικότητας των μεταβλητών:

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
 \hline
 w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
 w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
 w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
 \end{array}$$

Λεξικό και ορισμοί I

- Έστω ένα λεξικό, π.χ. το

$$\begin{array}{rcll}
 \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
 \hline
 w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
 w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
 w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
 \end{array}$$

εξαρτημένες, μη-βασικές (pointing to $5x_1$ and $4x_2$)
εξαρτημένες, βασικές (pointing to w_1, w_2, w_3)

- Η ονομασία “λεξικό” παραπέμπει στο ότι μεταφράζει τις μεταβλητές στα αριστερά μέλη με όρους των μεταβλητών στα δεξιά μέλη.
- Το γράμμα ζ χρησιμοποιείται για την αντικειμενική συνάρτηση.
- Οι εξαρτημένες μεταβλητές, στα αριστερά, λέγονται βασικές μεταβλητές. Εδώ είναι οι w_1, w_2, w_3 (που ταυτίζονται με τις περιθώριες).

Λεξικό και ορισμοί II

- Έστω πάλι το λεξικό

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
 \hline
 w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
 w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
 w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
 \end{array}$$

- Οι ανεξάρτητες μεταβλητές, στα δεξιά, λέγονται μη-βασικές μεταβλητές. Εδώ είναι οι x_1, x_2 (που ταυτίζονται με τις αρχικές μεταβλητές).
- Θέτοντας τις μη-βασικές μεταβλητές ίσες με 0 παίρνουμε μια λύση του συστήματος των περιορισμών που λέγεται βασική λύση. Εδώ $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$ με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $\zeta = 0$.

Λεξικό και ορισμοί III - Λύσεις I

- Έστω πάλι το λεξικό

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
 w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
 w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
 w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
 \end{array}$$

$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3)$
 $(0, 0, 6, 24, 9)$
 εφικτή λύση
 $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3)$
 $(7, 0, -1, 3, 23)$
 όχι εφικτή λύση

- Λύση = Διάνυσμα που ικανοποιεί τους περιορισμούς που εμφανίζονται στο λεξικό.
 Π.χ. εδώ $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 6, 23, 8)$ με $\zeta = 1$.
- Εφικτή λύση = Λύση που ικανοποιεί και τους “κρυφούς” περιορισμούς της μη-αρνητικότητας των μεταβλητών.
 Π.χ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 6, 23, 8)$ εφικτή λύση.
 Όμως $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (-1, 0, 7, 27, 7)$ λύση, όχι εφικτή.

Λεξικό και ορισμοί IV - Λύσεις II

- Εστω πάλι το λεξικό

$$\begin{array}{rcll}
 \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 & & (x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) \\
 \hline
 w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 & & (0, 0, 6, 24, 9) \\
 w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 & & \uparrow \\
 w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 & & \text{β.ε.λ.}
 \end{array}$$

Handwritten notes:
 - Blue box around w_1, w_2, w_3 labeled "βασικές"
 - Blue circles around $5x_1$ and $4x_2$ with an arrow pointing to "μη-βασικές"
 - Blue arrow pointing from the first row to the second row labeled "Κάθε λεξικό έχει αντίστοιχη βασική λύση"

- Βασική λύση = Λύση που οι μη-βασ. μεταβλητές είναι 0.

Π.χ. εδώ $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$ με $\zeta = 0$.

Μπορεί μια λύση να είναι βασική αλλά όχι εφικτή.

- Βασική εφικτή λύση (β.ε.λ.) = Βασική λύση που είναι και εφικτή.

- Βέλτιστη λύση = Εφικτή λύση που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

Η ιδέα της μεθόδου Simplex

- Αρχίζουμε από κάποιο λεξικό που μας δίνει β.ε.λ.
- Εξετάζουμε αν η νέα β.ε.λ. είναι βέλτιστη λύση. Αν ναι σταματάμε, αλλιώς ... $\hookrightarrow$ *πως?*
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό αλλάζοντας τις βασικές μεταβλητές ώστε να πάρουμε νέα β.ε.λ. που βελτιώνει την αντικειμενική συνάρτηση. $\nwarrow$ *πως?*

Παράδειγμα Simplex - Έναρξη

- Να λυθεί το π.γ.π. :

$$\begin{array}{llllll} \max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0. & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 - 4x_2 \\ \text{υπό} \quad & x_1 - x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 24 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Είναι σε κανονική μορφή

Γράφω το αρχικό πρόβλημα

$$J = 0 \quad \boxed{+5x_1} - 4x_2$$

$$\boxed{w_1} = 6 - 1x_1 + 1x_2 \quad \text{μνδ. για } x_1=6$$

$$w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2 \quad \text{μνδ. για } x_1=8$$

$$w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2 \quad \text{μνδ. για } x_1=8$$

Η β.ε.π. που αντιστοιχεί σε αυτό το πρόβλημα είναι $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) =$

$$(0, 0, 6, 24, 9)$$

$$\mu = J = 0$$

- Κοιτώντας την αντικειμενική συνάρτηση που έχει εκφραστεί ως προς x_1 και x_2 , μπορώ να παρατηρώ αν γίνεται να πάρει μεγαλύτερη τιμή;

Παρατηρούμε ότι η x_1 έχει θετικό συντελεστή.

Άρα, αν αυξήσω την τιμή της x_1 , θα αυξηθεί η τιμή της α.ε.

Η x_2 έχει αρνητικό συντελεστή. Άρα, δε θέλω να αυξηθεί.

- Πόσο μπορεί να αυξηθεί η τιμή της x_1 ;

Εκτός η x_1 αυξάνεται

- η w_1 μειώνεται και μηδενίζεται για $x_1=6$
- η w_2 >> >> >> για $x_1=8$
- η w_3 αυξάνεται

Μπορώ να αυξήσω την x_1 μέχρι να γίνει 6.

Τότε παίρνω τιμές

$$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) =$$

$$(6, 0, 0, 6, 21)$$

$$\mu = J = 30$$

Η x_1 μηδενίζεται βέβαια.

Η w_1 βγαίνει από τη βάση.

$$\begin{array}{lcl} J = 0 & +5x_1 & -4x_2 \quad \Gamma_1 \\ w_1 = 6 & -1x_1 & +1x_2 \quad \Gamma_2 \\ w_2 = 24 & -3x_1 & +2x_2 \quad \Gamma_3 \\ w_3 = 9 & +2x_1 & -3x_2 \quad \Gamma_4 \end{array}$$

Γ_2 να μετασχηματιστεί να λείπει

- είτε κάνω αντικατάσταση
- είτε διαφύραση.

Αντικατάσταση:

- Ξεκινάμε με τη διαφύραση ως προς x_1

$$(\Gamma_2): w_1 = 6 - 1x_1 + 1x_2 \Leftrightarrow x_1 = 6 - 1w_1 + 1x_2 \quad (\Gamma_2')$$

- Στις υπόλοιπες διαφύρες κάνω αντικατάσταση το x_1 από την σχέση που βρήκα

$$(\Gamma_1): J = 0 + 5x_1 - 4x_2 \Leftrightarrow J = 0 + 5(6 - 1w_1 + 1x_2) - 4x_2 \Leftrightarrow J = 30 - 5w_1 + 1x_2 \quad (\Gamma_1')$$

$$(\Gamma_3): w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2 \Leftrightarrow w_2 = 24 - 3(6 - 1w_1 + 1x_2) + 2x_2 \Leftrightarrow w_2 = 6 + 3w_1 - 1x_2 \quad (\Gamma_3')$$

$$(\Gamma_4): w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2 \Leftrightarrow w_3 = 9 + 2(6 - 1w_1 + 1x_2) - 3x_2 \Leftrightarrow w_3 = 21 - 2w_1 - 1x_2 \quad (\Gamma_4')$$

Το v έσθ λείπει είναι:

$$J = 30 - 5w_1 + 1x_2$$

$$x_1 = 6 - 1w_1 + 1x_2$$

$$w_2 = 6 + 3w_1 - 1x_2$$

$$w_3 = 21 - 2w_1 - 1x_2$$

Η β.ε.π. είναι η

$$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) =$$

$$(\downarrow 6, \downarrow 0, \downarrow 0, \downarrow 6, \downarrow 21)$$

$$\text{με } J = 30$$

$$J = 30 - 5w_1 + 1x_2 \quad r_1$$

$$x_1 = 6 - 1w_1 + 1x_2 \quad r_2$$

$$w_2 = 6 + 3w_1 - 1x_2 \quad r_3$$

$$w_3 = 21 - 2w_1 - 1x_2 \quad r_4$$

Δεν είναι βέλτερο.

Η x_2 θα μπορούσε να βγει (1 > 0)

Η w_2 θα βγει αν και αν βγει (min {6, 21} = 6)

$$x_2 = 21$$

Θα πάρει στο επόμενο λήγας με χειροκρότη.

$$r'_1 = r_1 + 1r_3$$

$$r'_2 = r_2 + 1r_3$$

$$r'_3 = r_3 \quad (\text{αύξηση } w_2 \text{ προς } r_3)$$

$$r'_4 = r_4 - 1r_3$$

$$J = 36 - 2w_1 - 1w_2$$

$$x_1 = 12 + 2w_1 - 1w_2$$

$$x_2 = 6 + 3w_1 - 1w_2$$

$$w_3 = 15 - 5w_1 + 1w_2$$

Η β.ε.λ είναι $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) =$

$$(12, 6, 0, 0, 15)$$

$$\text{με } J = 36.$$

Η λύση είναι βέλτερο

$$\text{Αρα } (x_1^*, x_2^*, w_1^*, w_2^*, w_3^*) = (12, 6, 0, 0, 15)$$

$$\text{και } J^* = 36.$$

Παράδειγμα Simplex - Έναρξη

- Να λυθεί το π.γ.π. :

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 5x_1 & - & 4x_2 \\
 \text{υπό} & x_1 & - & x_2 \leq 6 \\
 & 3x_1 & - & 2x_2 \leq 24 \\
 & -2x_1 & + & 3x_2 \leq 9 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0.
 \end{array}$$

- Έχουμε το αρχικό λεξικό:

$$\begin{array}{rcll}
 \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
 \hline
 w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
 w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
 w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
 \end{array}$$

με βασική λύση $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$.

Είναι και εφικτή (β.ε.λ.).

Παράδειγμα Simplex- 1η επανάληψη

- Παρατηρούμε το αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
 \hline
 w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
 w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
 w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
 \end{array}$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$).

- Αν η x_1 αυξηθεί η ζ αυξάνει.
- Καθώς η x_1 αυξάνεται οι w_1, w_2 μειώνονται.
- Καθώς η x_1 αυξάνεται η w_3 αυξάνεται.
- Πόσο μπορεί να αυξηθεί η x_1 ;
 Μέχρι κάποια από τις w_1, w_2 να γίνει 0.
 Η w_1 γίνεται 0 για $x_1 = 6/1$.
 Η w_2 γίνεται 0 για $x_1 = 24/3 = 8$.
 Άρα πρώτα θα γίνει 0 η w_1 .

Παράδειγμα Simplex - 1η επανάληψη (συνέχεια)

- Επομένως στο αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
 \hline
 w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
 w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
 w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
 \end{array}$$

- η x_1 γίνεται βασική (αυξάνεται μέχρι $x_1 = 6$),
- η w_1 γίνεται μη-βασική (μειώνεται μέχρι $w_1 = 0$).
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό “περνώντας” την x_1 στο αριστερό μέλος, στη θέση της w_1 και εκφράζοντας τις w_2, w_3 συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών w_1, x_2 (διαδικασία οδήγησης).
- Ο συντελεστής στην τομή της εισερχόμενης και της εξερχόμενης μεταβλητής (εδώ το -1) λέγεται οδηγός.

Παράδειγμα Simplex - 1η επανάληψη (συνέχεια)

- Θεωρούμε το αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
 \hline
 w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
 w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
 w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
 \end{array}$$

- Απαλείφουμε την μεταβλητή x_1 που μπαίνει στη βάση από την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς, εκτός του περιορισμού που αφορά τη μεταβλητή w_1 που βγαίνει από τη βάση, εκτελώντας γραμμοπράξεις.
- Για την αντικειμενική συνάρτηση ζ έχουμε

$$\zeta + 5 \times w_1 = 0 + 5 \times 6 + (-4 + 5 \times 1)x_2.$$

- Ομοίως για τις w_2, w_3 .
- Τέλος μετακινούμε τη μεταβλητή w_1 που βγαίνει από τη βάση στο δεξιό μέλος.

Παράδειγμα Simplex - 1η επανάληψη (συνέχεια)

- Το αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
 \hline
 w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
 w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
 w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
 \end{array}$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$)

- γίνεται

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\
 \hline
 x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\
 w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\
 w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2
 \end{array}$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$).

Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη

- Το δεύτερο λεξικό

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\
 \hline
 x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\
 w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\
 w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2
 \end{array}$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$)
είναι βέλτιστο;

- Όχι, γιατί υπάρχει θετικός συντελεστής μη-βασικής μεταβλητής στην ζ , ο συντελεστής της x_2 .
- Καθώς η x_2 αυξάνεται οι w_2, w_3 μειώνονται.
- Η x_2 μπορεί να αυξηθεί μέχρι $w_2 = 0$ ή $w_3 = 0$.
 Η w_2 γίνεται 0 για $x_2 = 6/1$.
 Η w_3 γίνεται 0 για $x_2 = 21/1 = 21$.
 Άρα πρώτα θα γίνει 0 η w_2 .

Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη (συνέχεια)

- Επομένως στο δεύτερο λεξικό

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\
 \hline
 x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\
 w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\
 w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2
 \end{array}$$

- η x_2 γίνεται βασική (αυξάνεται μέχρι $x_2 = 6$),
- η w_2 γίνεται μη-βασική (μειώνεται μέχρι $w_2 = 0$).
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό “περνώντας” την x_2 στο αριστερό μέλος, στη θέση της w_2 και εκφράζοντας τις x_1 , w_3 συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών w_1 , w_2 (διαδικασία οδήγησης).
- Ο οδηγός στην τομή της στήλης της x_2 και της γραμμής της w_2 είναι -1 .

Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη (συνέχεια)

- Για το δεύτερο λεξικό έχουμε

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\
 \hline
 x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\
 w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\
 w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2
 \end{array}$$

- Απαλείφουμε την μεταβλητή x_2 που μπαίνει στη βάση από την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς, εκτός του περιορισμού που αφορά τη μεταβλητή w_2 που βγαίνει από τη βάση, εκτελώντας γραμμοπράξεις.
- Τέλος μετακινούμε τη μεταβλητή w_2 που βγαίνει από τη βάση στο δεξιό μέλος.

Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη (συνέχεια)

- Το δεύτερο λεξικό

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\
 \hline
 x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\
 w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\
 w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2
 \end{array}$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$)

- γίνεται

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 36 & - & 2w_1 & - & w_2 \\
 \hline
 x_1 & = & 12 & + & 2w_1 & - & w_2 \\
 x_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & w_2 \\
 w_3 & = & 15 & - & 5w_1 & + & w_2
 \end{array}$$

(αντ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$).

Παράδειγμα Simplex - 3η επαλάληψη

- Το τρίτο λεξικό

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 36 & - & 2w_1 & - & w_2 \\
 \hline
 x_1 & = & 12 & + & 2w_1 & - & w_2 \\
 x_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & w_2 \\
 w_3 & = & 15 & - & 5w_1 & + & w_2
 \end{array}$$

(αντ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$)
είναι βέλτιστο;

- Ναι, γιατί όλοι οι συντελεστές μη-βασικών μεταβλητών στην ζ είναι μη-θετικοί.
- Επομένως το 36 είναι ένα άνω φράγμα για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Αλλά το 36 “πιάνεται” για την $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$, που αποτελεί επομένως βέλτιστη λύση.

Σύνοψη της βασικής Simplex

- Ξεκινάμε με λεξικό που αντιστοιχεί σε β.ε.λ.
- Αν όλοι οι συντελεστές των μη-βασικών μεταβλητών στην ζ είναι μη-θετικοί έχουμε βρει τη βέλτιστη λύση.
- Αν υπάρχουν μη-βασικές μεταβλητές των οποίων οι συντελεστές στην ζ είναι θετικοί, διαλέγουμε μία για να μπει στη βάση.
- Από τις βασικές μεταβλητές που μειώνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται διαλέγουμε την πρώτη που θα μηδενιστεί για να βγει από τη βάση.
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό ώστε η αντικειμενική συνάρτηση και οι βασικές μεταβλητές να εκφράζονται συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών.
- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη νέα β.ε.λ. θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από την προηγούμενη β.ε.λ.

Σύστημα 3 εξισώσεων

I) Το αρχικό πρόβλημα δεν δίνει β.ε.π.

$$J = 3 + 5x_1 - 2w_1 \quad \text{Η βασική λύση είναι:}$$

$$x_2 = -4 - 2x_1 + 3w_1 \quad (x_1, x_2, w_1, w_2) =$$

$$w_2 = 5 - 2x_1 - 3w_1 \quad (0, -4, 0, 5) \quad \text{Δεν είναι εφικτή!}$$

II) Αν υπάρχουν πολλαπλές υπογρήγιες
εφελχόμενες βελ. βέση

$$n.x \quad J = 3 + 5x_1 + 2w_1$$

$$x_2 = 7 - 2x_1 + 3w_1$$

$$w_2 = 5 - 2x_1 - 3w_1$$

III) Ανούγια υπογρήγιες για εφελχόμενη βελ. βέση

$$n.x \quad J = 3 \boxed{+5x_1} - 2x_2$$

$$w_1 = 4 + 2x_1 + 3x_2 \uparrow$$

$$w_2 = 5 + 3x_1 - 3x_2 \uparrow$$

IV) Υπάρχουν πολλαπλές υπογρήγιες για
εφελχόμενες βελ. βέση

$$J = 3 \boxed{+5x_1} - 2w_1$$

$$x_2 = 8 - 2x_1 + 3w_1 \rightarrow \text{π.σ. για } x_1 = 4$$

$$w_2 = 4 - 1x_1 - 3w_1 \rightarrow \text{π.σ. για } x_1 = 4$$

V) Η τιμή της ε.β. να μην αυθόρμητα βελ. βέση

$$J = 15 - 2x_1 \boxed{+5x_2}$$

$$\boxed{w_1} = 0 + 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \text{π.σ. για } x_2 = \frac{0}{2} = 0$$

$$w_2 = 3 - x_1 - 6x_2 \rightarrow \text{π.σ. για } x_2 = \frac{1}{2}$$

Πιθανά προβλήματα

- Απουσία αρχικής β.ε.λ.
- Πολλές επιλογές για εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή.
- Απουσία επιλογής για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή.
- Πολλές επιλογές για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή.
- Η αντικειμενική συνάρτηση δεν βελτιώνεται στο επόμενο λεξικό.

Πρόβλημα I: Απουσία αρχικής β.ε.λ.

- Ξεκινάμε με λεξικό που αντιστοιχεί σε β.ε.λ.
- Τι κάνουμε αν δεν έχουμε τέτοιο αρχικό λεξικό;
- Χρησιμοποιούμε ένα βοηθητικό πρόβλημα που μας δίνει αρχική β.ε.λ. ή μας δείχνει ότι το π.γ.π. δεν έχει εφικτές λύσεις.
- Η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως φάση I της Simplex: Από βασική λύση σε β.ε.λ.
- Η κλασική διαδικασία που περιγράψαμε είναι η φάση II: Από β.ε.λ. σε βέλτιστη λύση.
- Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη δυϊκή μέθοδο Simplex. (Αυτή τη μέθοδο θα διδαχθείτε στο μάθημα. Θα τη δούμε στην επόμενη ενότητα.)

Πρόβλημα II: Πολλές επιλογές για εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή

- Αν υπάρχουν μη-βασικές μεταβλητές των οποίων οι συντελεστές στην ζ είναι θετικοί, διαλέγουμε μία για να μπει στη βάση.
- Ποια να διαλέξουμε;
- Υπάρχουν διάφοροι κανόνες επιλογής εισερχόμενης στη βάση μεταβλητής.

Πρόβλημα II - Κανόνες επιλογής για την εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή

- Ο κανόνας του μέγιστου συντελεστή.
Επίλεξε τη μη-βασική μεταβλητή με το μεγαλύτερο συντελεστή στην ζ .
- Ο κανόνας του τυχαίου θετικού συντελεστή.
Επίλεξε στην τύχη μια μη-βασική μεταβλητή από αυτές που έχουν θετικό συντελεστή στην ζ .
- Ο κανόνας του πρώτου θετικού συντελεστή.
Επίλεξε τη μη-βασική μεταβλητή που αντιστοιχεί στον πρώτο θετικό συντελεστή που συναντάται στη ζ .
- Ο κανόνας του μικρότερου δείκτη (Bland).
Επίλεξε τη μεταβλητή με το μικρότερο δείκτη.
- Ο κανόνας της μέγιστης άμεσης αύξησης.
Επίλεξε τη μεταβλητή που αυξάνει περισσότερο την ζ .

$$J = 7 + 4x_1 + 5x_2$$

Δεν είναι θέλουμε.

$$W_1 = 4 - 2x_1 - 1x_2$$

$$W_2 = 9 - 1x_1 - 3x_2$$

$$J = 7 + \boxed{4x_1} + 5x_2$$

$$\boxed{W_1} = 4 - 2x_1 - 1x_2$$

$$W_2 = 9 - 1x_1 - 3x_2$$

Η άμεση αίσθηση
στην αρχή της α.σ.
θα είναι 8.

μνσ.
για
 $x_1 = \frac{4}{2}$
μνσ.
για $x_1 = \frac{9}{1}$

$$J = 7 + 4x_1 + \boxed{5x_2}$$

$$W_1 = 4 - 2x_1 - 1x_2$$

$$\boxed{W_2} = 9 - 1x_1 - 3x_2$$

μνσ. για
 $x_2 = \frac{4}{1} = 4$
μνσ. για
 $x_2 = \frac{9}{3} = 3$

Η άμεση αίσθηση είναι
15.

• Κανόνες του πρώτου συζευγμένου:

Θα μπει η x_2 .

Η W_2 θα γίνει από τη βάση

• Κανόνες του δεύτερου συζευγμένου:

Είτε μπει στη βάση η x_1 και θα γίνει
η W_1 .

Είτε μπει στη βάση η x_2 και
θα γίνει η W_2 .

• Κανόνες του τρίτου συζευγμένου:

Η x_1 θα μπει στη βάση, η W_1 θα γίνει
από τη βάση.

• Κανόνες του Blend

Η x_1 θα μπει στη βάση, η W_1 θα γίνει.

Για να εφαρμόσει πρώτα όλες οι μεταβιβάσεις να
έχουν το ίδιο όνομα π.χ. (x_1, x_2, x_3, x_4) .

Karbes ins μ Eigenes σ Eigenes σ Eigenes:

H χ_2 μ Eigenes σ Eigenes, n χ_2 σ Eigenes.

Πρόβλημα III: Απουσία επιλογής για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή

- Από τις βασικές μεταβλητές που μειώνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται διαλέγουμε την πρώτη που θα μηδενιστεί για να βγει από τη βάση.
- Αν δεν υπάρχει τέτοια μεταβλητή, δηλαδή όλες οι βασικές μεταβλητές αυξάνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται τότε το π.γ.π. είναι μη φραγμένο.
- Η ζ μπορεί να πάρει οσοδήποτε μεγάλες τιμές, οπότε δεν υπάρχει βέλτιστη λύση.

Πρόβλημα III - Παράδειγμα

- Εστω ότι εμφανίζεται το λεξικό

$$\begin{array}{rcccccccl}
 \zeta & = & 0 & + & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \\
 \hline
 w_1 & = & 4 & + & 5x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \nearrow \\
 w_2 & = & 10 & + & x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & \nearrow \\
 w_3 & = & 7 & & & + & 4x_2 & - & 3x_3 & - \\
 w_4 & = & 6 & + & 2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & \nearrow \\
 w_5 & = & 6 & + & 3x_1 & & & + & 3x_3 & \nearrow
 \end{array}$$

- Οι x_1 και x_3 μπορούν να γίνουν βασικές.
- Ας διαλέξουμε την x_1 .
- Όσο αυξάνει η x_1 καμιά βασική μεταβλητή δεν μειώνεται και η αντικειμενική συνάρτηση αυξάνει.
- Το π.γ.π. είναι μη-φραγμένο.