

Επιχειρησιακή Έρευνα

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

Επιχειρησιακή Έρευνα

- Επιχειρησιακή Έρευνα=
 - Μαθηματικά μοντέλα μελέτης - βελτιστ. διαδικασιών,
 - Μαθηματικές μέθοδοι βέλτιστης λήψης αποφάσεων.

Κλάδοι της Επιχειρησιακής Έρευνας

- 
- Γραμμικός Προγραμματισμός.
 - Μη-Γραμμικός Προγραμματισμός.
 - Ακέραιος Προγραμματισμός - Συνδυαστική Βελτιστοποίηση.
 - Δυναμικός Προγραμματισμός.
 - Θεωρία Παιγνίων.
 - Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων.
 - Θεωρία Ουρών Αναμονής.
 - ...

Περιεχόμενα του μαθήματος

Ενότητα 1

- Κατηγορίες προβλημάτων βελτιστοποίησης.
- Μοντελοποίηση προβλημάτων βελτιστοποίησης.
- Κλασικά προβλήματα βελτιστοποίησης.

Ενότητα 2

- Επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης στον ΗΥ.

Ενότητες 3 και 4

- Συνοπτική θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού.

Ενότητα 5

- Συνοπτική θεωρία Μη-Γραμμικού Προγραμματισμού.

Ενότητα 6

- Εισαγωγή στον Δυναμικό Προγραμματισμό.
- Επίλυση προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού.

Βασικές πηγές του μαθήματος

- Vanderbei, R.J. (2014) Linear Programming: Foundations and Extensions, 4th Edition. Springer.
- Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. (2015) Introduction to Operations Research, 10th Edition. McGraw Hill.
- Fourer, R., Gay, D.M. and Kernighan, B.W. (2003) AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming, 2nd Edition. Duxbury Thomson.
- Taha, H.A. (2017) Operations Research: An Introduction, 10th Edition. Pearson.

Εργασίες : 10%.
Τελ. εξέταση : 90%.

Ενότητα 1: Εισαγωγή

Γενικό πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού

- $x_j, j = 1, 2, \dots, n$: μεταβλητές απόφασης.
- ζ : η αντικειμενική συνάρτηση.
- Αντικειμενική συνάρτηση: $\leftarrow$ ποσό που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ή να μεγιστοποιηθεί

$$\zeta = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

- Τυπικός γραμμικός περιορισμός:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \eta \quad \text{ή} \quad \eta \geq b.$$

- Τυπικός περιορισμός μεταβλητών:

$$x_j \in A_j.$$

Παράδειγμα π.μ.π.

- Μία εταιρεία παράγει 2 προϊόντα: P_1 και P_2 .
- Η εταιρεία έχει τη δυνατότητα να φτιάξει μέχρι 250 κιλά από το P_1 και μέχρι 320 κιλά από το P_2 .
- Για την παραγωγή αυτών των προϊόντων απαιτείται μια πρώτη ύλη. Συγκεκριμένα, για την παραγωγή ενός κιλού προϊόντος P_1 χρειάζονται 0.7 κιλά πρώτης ύλης, ενώ για την παραγωγή ενός κιλού προϊόντος P_2 χρειάζονται 0.4 κιλά πρώτης ύλης.
- Η διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης είναι 200 κιλά.
- Η εταιρεία γνωρίζει ότι αν φτιάξει x_1 κιλά από το P_1 , θα έχει κέρδος $x_1(300 - x_1)$ Ευρώ από την πώληση όλης αυτής της ποσότητας. Επίσης, αν φτιάξει x_2 κιλά από το P_2 , θα έχει κέρδος $x_2(1000 - 3x_2)$ Ευρώ από την πώληση όλης αυτής της ποσότητας.
- Η εταιρεία θέλει να βρει τις ποσότητες (σε κιλά) που πρέπει να παραχθούν από κάθε προϊόν ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος.

Μεταβλητές απόφασης:

x_1 = ποσότητα (σε kg) από το προϊόν P_1 που θα παραχθεί.

x_2 = >> >> >> >> >> P_2 >> >> >>.

Πρόβλημα:

max

$$x_1(300 - x_1) + x_2(1000 - 3x_2)$$

→ αντικείμενο
βωβήμεν:
κέρδος

υπό

$$0.7 \cdot x_1 + 0.4 \cdot x_2 \leq 200$$

: περιόριση

διαθεσίμου

της πρώτης ύλης

$$x_1 \leq 250$$

$$x_2 \leq 320$$

} περιόριση
διαθεσίμου
παραγωγής

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Είναι πρόβλημα μαθηματικό προγραμματισμού

Παράδειγμα π.μ.π.

- x_1 : ποσότητα προϊόντος P_1 που θα παραχθεί.
 x_2 : ποσότητα προϊόντος P_2 που θα παραχθεί.
- Π.μ.π.:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1(300 - x_1) + x_2(1000 - 3x_2) \\ \text{υπό} \quad & x_1 \leq 250 \\ & x_2 \leq 320 \\ & 0.7x_1 + 0.4x_2 \leq 200 \\ & x_j \geq 0, \end{aligned} \quad j = 1, 2.$$

Γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

- $x_j, j = 1, 2, \dots, n$: μεταβλητές απόφασης.
- ζ : η αντικειμενική συνάρτηση.
- Γραμμική αντικειμενική συνάρτηση:

$$\zeta = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

- Τυπικός γραμμικός περιορισμός:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq \eta \text{ ή } \eta \geq b.$$

- Τυπικός περιορισμός μεταβλητών:

$$x_j \geq 0 \text{ ή } \leq 0 \text{ ή } \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα π.γ.π.

- Ένας οργανισμός τρέφεται με 2 είδη τροφών, T_1 και T_2 .
- Από αυτές τις τροφές παίρνει 3 θρεπτικά συστατικά, Θ_1 , Θ_2 και Θ_3 .
- Ο οργανισμός πρέπει να καταναλώνει καθημερινά τουλάχιστον 12 μονάδες από το Θ_1 , τουλάχιστον 15 μονάδες από το Θ_2 και το πολύ 12 μονάδες από το Θ_3 .
- Κάθε γραμμάριο της τροφής T_j περιέχει a_{ij} μονάδες του θρεπτικού συστατικού Θ_i , $j = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$. Ο πίνακας δίνει τις τιμές των a_{ij} .

	a_{ij}	
	T_1	T_2
Θ_1	12	6
Θ_2	3	5
Θ_3	2	3

- Κάθε γραμμάριο τροφής T_1 κοστίζει 5 Ευρώ και κάθε γραμμάριο τροφής T_2 κοστίζει 4 Ευρώ.
- Θέλουμε να βρούμε πόση ποσότητα πρέπει να φάει από κάθε τροφή ώστε να πάρει τις ποσότητες που πρέπει από κάθε θρεπτικό συστατικό και να περιορίσει το συνολικό κόστος.

Μεταβλητές απόφασης:

x_1 = ποσότητα τρεφής T_1 (6€ γραμμάριο) που θα υποκαταστήσει

x_2 = >> >> T_2 (6€ γραμμάριο) >> >> >>

Πρόβλημα

$$\min 5x_1 + 4x_2$$

υπό

χρησιμοποιώντας
περιορισμούς

$$12x_1 + 6x_2 \geq 12$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 15$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

περιορισμοί για
ποσότητα θρετικών
υποστατικών

$$x_1, x_2 \geq 0$$

περιορισμοί
μεταβλητών

Είναι πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π.)

Παράδειγμα π.γ.π.

- x_1 : ποσότητα τροφής T_1 .
 x_2 : ποσότητα τροφής T_2 .
- Π.γ.π.:

$$\begin{array}{ll}\min & 5x_1 + 4x_2 \\ \text{υπό} & 12x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ & 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2.\end{array}$$

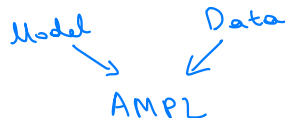
Προϋποθέσεις γραμμικού προγραμματισμού

- **Αναλογικότητα:** Η συνεισφορά μιας μεταβλητής στην αντικειμενική και στους περιορισμούς είναι ανάλογη της τιμής της.
- **Προσθετικότητα:** Η συνεισφορά μιας μεταβλητής στην αντικειμενική και στους περιορισμούς δεν εξαρτάται από άλλες μεταβλητές.
Η συνολική συνεισφορά των μεταβλητών αποφάσεων ισούται με το άθροισμα των επιμέρους συνεισφορών τους.
- **Διαιρετότητα:** Κάθε μεταβλητή παίρνει πραγματικές τιμές.
- **Βεβαιότητα - Ντετερμινισμός:** Οι παράμετροι είναι απόλυτα γνωστές. Δεν υπεισέρχεται τυχαιότητα.

Κεντρική θέση του Γραμμικού Προγραμματισμού

- Πληθώρα εφαρμογών.
- Κομψή και πλήρης μαθηματική θεωρία.
- Ύπαρξη αποτελεσματικών αλγορίθμων.
- Υπόβαθρο για τον ακέραιο προγραμματισμό.
- Υπόβαθρο για το μη-γραμμικό προγραμματισμό.

Κλασικά προβλήματα



- Το πρόβλημα της μίξης των υλικών.
- Το πρόβλημα της δίαιτας.
- Το πρόβλημα της μεταφοράς.
- Προγραμματισμός παραγωγής.
- Το πρόβλημα της αποτίμησης των υλικών.

Το πρόβλημα της μίξης των υλικών

- n τύποι προϊόντων προς παραγωγή. $j = 1, 2, \dots, n$
- m τύποι πρώτων υλών. $i = 1, 2, \dots, m$
- a_{ij} : ποσότητα από την πρώτη ύλη i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου j .
- b_i : διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης i .
- c_j : καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου j .
- Στόχος: Μεγιστοποίηση συνολικού καθαρού κέρδους από την πώληση των προϊόντων.

Μεταβλητές απόφασης:

x_j = ποσότητα προϊόντος j που θα παραχθεί, $j=1, \dots, n$

Προβλήματα

$$\max \quad C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$

υπό

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \quad i=1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \quad i=2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \quad i=m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Αντισυσχέτιση,

$$\max \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

υπό

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \leq b_1$$

$$\sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \leq b_2$$

$$\sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \leq b_m \quad \leftarrow x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Αντισυσχέτιση,

$$\max \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

υπό

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n$$

Το πρόβλημα της μίξης - Μοντελοποίηση

- x_j : ποσότητα προϊόντος j που θα παραχθεί.
- Π.γ.π.:

$$\begin{array}{ll}\max & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.\end{array}$$

Το πρόβλημα της δίαιτας

- n τύποι φαγητών προς κατανάλωση. *Σ είμαστε $j=1,2,\dots,n$*
- m είδη θρεπτικών συστατικών. *Σ είμαστε $i=1,2,\dots,m$*
- a_{ij} : η ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που περιέχεται σε μια μερίδα φαγητού j .
- b_i : η ελάχιστη ημερήσια ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που επιβάλλεται να προσληφθεί.
- d_i : η μέγιστη ημερήσια ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που επιτρέπεται να προσληφθεί.
- c_j : κόστος μιας μερίδας φαγητού j .
- Στόχος: Καθορισμός της δίαιτας ελάχιστου κόστους που σέβεται τους διατροφικούς περιορισμούς.

Μεταβλητές απόφασης:

x_j = ποσότητα (σε μέρηδες) από το προϊόν j να θα
κατασκευαστεί, $j=1, \dots, n$

Πρόβλημα

$\min \quad C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$: συνολικό κόστος

υπό $b_i \leq a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \leq d_i, \quad i=1, \dots, m$

$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

ή, ομοεικό,

$\min \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j$

υπό $b_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq d_i, \quad i=1, 2, \dots, m$

$x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n$

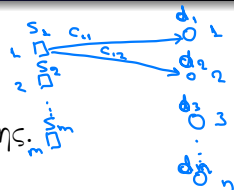
Το πρόβλημα της δίαιτας - Μοντελοποίηση

- x_j : μερίδες φαγητού j που θα αγοραστούν.
- Π.γ.π.:

$$\begin{array}{ll}\min & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq d_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.\end{array}$$

Το πρόβλημα της μεταφοράς

- m σημεία παραγωγής, n σημεία κατανάλωσης.
 $i=1, 2, \dots, m$ $j=1, 2, \dots, n$
- s_i : η προσφορά του σημείου i .
- d_j : η ζήτηση του σημείου j .
- c_{ij} : κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος από το i στο j .
- Στόχος: Ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς από τα σημεία παραγωγής στα σημεία κατανάλωσης.



Μεταβλητές απόφασης:

x_{ij} = ποσότητα που θα μεταφερθεί από το εργείο
παραγωγής i στο εργείο κατανομής j ,
 $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$.
(έχουμε $m \times n$ μετ. απόφασης)

Πρόβλημα

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad : \text{αποστολή προϊόντος εργείο } j$$

$j=1, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i \quad : \text{συνολική ποσότητα παραγωγής εργείο } i$$

$i=1, \dots, m$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n.$$

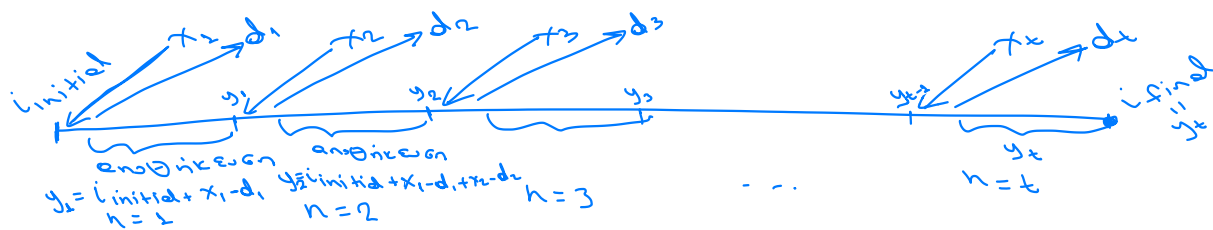
Το πρόβλημα της μεταφοράς - Μοντελοποίηση

- x_{ij} : ποσότητα προς μεταφορά από το i στο j .
- Π.γ.π.:

$$\begin{array}{ll}\min & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq s_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.\end{array}$$

Προγραμματισμός παραγωγής

- Εταιρεία προγραμματίζει την παραγωγή προϊόντος.
- t : Αριθμός περιόδων παραγωγής.
- $i_{initial}$: Αρχικό απόθεμα προϊόντος.
- Στην αρχή κάθε περιόδου, η εταιρεία παράγει νέα προϊόντα και αμέσως μετά ικανοποιεί την τρέχουσα ζήτηση.
- d_n : Ζήτηση προϊόντος την περίοδο n , $n = 1, 2, \dots, t$.
- i_{final} : Τελικό απαιτητό απόθεμα προϊόντος.
- c_n : Κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος την περίοδο n , $n = 1, 2, \dots, t$.
- h_n : Κόστος αποθήκευσης υπερβάλλοντος προϊόντος ανά μονάδα προϊόντος την περίοδο n , $n = 1, 2, \dots, t$.
- Η ζήτηση κάθε περιόδου πρέπει να ικανοποιείται άμεσα (no backlogging).
- Στόχος: Ελαχιστοποίηση κόστους παραγ./αποθήκευσης.



Μεταβλητές απόφασης

x_n = ποσότητα που θα παραχθεί την περίοδο n , $n=1, \dots, t$

Πρόβλημα

$$\min c_1 x_1 + h_1 (\text{initial} + x_1 - d_1) + c_2 x_2 + h_2 (\text{initial} + x_1 - d_1 + x_2 - d_2) + \dots +$$

Επειδή n έσφαρην Σε είνα, κομμή, μωρὸ, α
Θεωρίωω ως (τεχνικές) μεταβλητές απόφασης ως

y_n = ποσότητα που αποθηκεύεται την περίοδο n , $n=1, \dots, t$.

Αρα,

μετ. απόφ.:

x_n = ποσότητα που θα παραχθεί την περίοδο n , $n=1, \dots, t$

y_n = ποσότητα που αποθηκεύεται την περίοδο n , $n=1, \dots, t$.

και το πρόβλημα γράφεται ως:

$$\min \sum_{n=1}^t (c_n x_n + h_n y_n)$$

uns

$$i_{\text{initial}} + x_1 \geq d_1$$

$$y_{n-1} + x_n \geq d_n$$

$$, n=2, \dots, t$$

} kann man hieraus
62 ableiten

$$y_t = i_{\text{final}}$$

$$y_{n-1} + x_n - d_n = y_n, n=2, \dots, t$$

$$i_{\text{initial}} + x_1 - d_1 = y_1$$

$$x_n \geq 0, n=1, 2, \dots, t$$

$$y_n \geq 0, n=1, 2, \dots, t$$

given
n periods

Προγραμματισμός παραγωγής - Μοντελοποίηση

- x_n : ποσότητα παραγωγής προϊόντος την περίοδο n , $n = 1, 2, \dots, t$.
- y_n : απόθεμα προϊόντος την περίοδο n , $n = 1, 2, \dots, t$ (αμέσως μετά την ικανοποίηση της ζήτησης).
- Π.γ.π.:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{n=1}^t (c_n x_n + h_n y_n) \\ \text{υπό} \quad & i_{\text{initial}} + x_1 = d_1 + y_1 \\ & y_{n-1} + x_n = d_n + y_n, \quad n = 2, 3, \dots, t \\ & y_t = i_{\text{final}} \\ & x_n, y_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, t. \end{aligned}$$