Ασκηση 1

Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού.

$$\max \ -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 + 4x_2 - 5$$

υπό

$$3x_1 + 2x_2 - 5 \leq 0$$

$$x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0$$

(α) Ν.δ.ο είναι πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού

(β) Να λυθεί με συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker

Λύση

(α) Έστω $f(x_1,x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 + 4x_2 - 5$

$g_1(x_1,x_2) = 3x_1 + 2x_2 - 5$

$g_2(x_1,x_2) = x_1 - 2x_2 + 2$

Η g_1 είναι κυρτή ως γραμμική

Η g_2 >> >> >> >>

Για την f έχουμε:

$$\nabla f(x_1,x_2) = (-6x_1 + 2x_2 - 3, \ -4x_2 + 2x_1 + 4)$$

$$Hf(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-Hf(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{με} \quad |6| = 6 > 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20 > 0$$

Άρα, $-Hf(x_1,x_2)$ θετικά ορισμένος $\Rightarrow$

$Hf(x_1,x_2)$ αρνητικά >> $\Rightarrow$

f κοίλη

Οπότε το πρόβλημα είναι μορφής ΠΚΠ-1

(β) Έχουμε $p=2$ περιορισμούς, οπότε θεωρούμε πολλαπλασιαστές $\mu_1, \mu_2 \geq 0$. Η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) - \mu_1 g_1(x_1,x_2) - \mu_2 g_2(x_1,x_2)$$
$$= -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 + 4x_2 - 5$$
$$- \mu_1(3x_1 + 2x_2 - 5) - \mu_2(x_1 - 2x_2 + 2)$$

Συνθήκες KKT:

$\mu_1 \geq 0$ KKT-1

$\mu_2 \geq 0$ KKT-2

$$\frac{\partial L(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow -6x_1 + 2x_2 - 3 - 3\mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \text{KKT-3}$$

$$\frac{\partial L(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow -4x_2 + 2x_1 + 4 - 2\mu_1 + 2\mu_2 = 0 \quad \text{KKT-4}$$

$\mu_1 g_1(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow \mu_1(3x_1 + 2x_2 - 5) = 0$ KKT-5

$\mu_2 g_2(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow \mu_2(x_1 - 2x_2 + 2) = 0$ KKT-6

$g_1(x_1,x_2) \leq 0 \Leftrightarrow 3x_1 + 2x_2 - 5 \leq 0$ KKT-7

$g_2(x_1,x_2) \leq 0 \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0$ KKT-8

Παίρνουμε περιπτώσεις: $\mu_1 = 0$ ή $\mu_1 > 0$

$\mu_2 = 0$ ή $\mu_2 > 0$

Περίπτωση 1: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$

KKT-3 $\Rightarrow$ $-6x_1 + 2x_2 - 3 = 0$ $\Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} + 3x_1$ (1)

KKT-4 $\Rightarrow$ $-4x_2 + 2x_1 + 4 = 0$ $\overset{(1)}{\Rightarrow} -6 - 12x_1 + 2x_1 + 4 = 0 \Rightarrow$

$-10x_1 = 2 \Rightarrow$

$x_1 = -\frac{1}{5}$ (2)

(1) $\overset{(2)}{\Rightarrow} x_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$

Ελέγχω αν επαληθεύονται οι συνθήκες.

KKT-8 : $x_1 - 2x_2 + 2 \leq 0 \iff -\frac{1}{5} - 2 \cdot \frac{9}{10} + 2 = -\frac{20}{10} + 2 = 0$ ✓

KKT-7 : $3x_1 + 2x_2 - 5 \leq 0 \iff -\frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{9}{10} - 5 \leq 0$ ✓

Ισχύουν όλες οι συνθήκες.

Η λύση είναι : $(x_1^*, x_2^*) = (-\frac{1}{5}, \frac{9}{10})$.

Δε χρειάζεται να εξετάσω τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Άσκηση 2

Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού.

$$\min \quad 4x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 + 7x_1 - 5x_2$$
$$\text{υπό} \quad x_1, x_2 \geq 0$$

(α) Ν.Δ.ο είναι πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού

(β) Να λυθεί με συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker

Λύση

(α) Το πρόβλημα ισοδύναμα γράφεται

$$-\max \quad -4x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1x_2 - 7x_1 + 5x_2$$
$$\text{υπό} \quad x_1, x_2 \geq 0$$

έστω $f(x_1, x_2) = -4x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1x_2 - 7x_1 + 5x_2$

Έχουμε

$$\nabla f(x_1, x_2) = (-8x_1 + 3x_2 - 7, -4x_2 + 3x_1 + 5)$$

και

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ με } |8| > 0, \quad \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 9 = 23 > 0$$

Ο $-Hf(x_1, x_2)$ είναι θετικά ορισμένος $\Rightarrow$

$Hf(x_1, x_2)$ » αρνητικά ορισμένος $\Rightarrow$

f κοίλη

Το πρόβλημα είναι της μορφής ΠΚΠ-2.

(β) Συνθήκες ΚΚΤ:

$$x_1 \geq 0 \qquad \text{ΚΚΤ-1}$$

$$x_2 \geq 0 \qquad \text{ΚΚΤ-2}$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} \leq 0 \iff -8x_1 + 3x_2 - 7 \leq 0 \qquad \text{ΚΚΤ-3}$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \leq 0 \iff -4x_2 + 3x_1 + 5 \leq 0 \qquad \text{ΚΚΤ-4}$$

$$x_1 \cdot \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \iff x_1(-8x_1 + 3x_2 - 7) = 0 \qquad \text{ΚΚΤ-5}$$

$$x_2 \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0 \iff x_2(-4x_2 + 3x_1 + 5) = 0 \qquad \text{ΚΚΤ-6}$$

Παίρνουμε περιπτώσεις:

$x_1 = 0$ ή $x_1 > 0$

$x_2 = 0$ ή $x_2 > 0$

Περίπτωση 1: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

Ελέγχω αν ισχύουν οι συνθήκες.

Η ΚΚΤ-4 δεν επαληθεύεται.

Περίπτωση 2: $x_1 = 0$, $x_2 > 0$

$$\text{ΚΚΤ-6} \xRightarrow{x_2 > 0} -4x_2 + 3x_1 + 5 = 0 \xRightarrow{x_1 = 0} x_2 = \frac{5}{4}$$

Ελέγχω αν ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες για $x_1 = 0$, $x_2 = 5/4$

ΚΚΤ1 ✓

ΚΚΤ2 ✓

ΚΚΤ3 : $-8x_1 + 3x_2 - 7 = -8 \cdot 0 + 3\frac{5}{4} - 7 = \frac{15}{4} - 7 < 0$ ✓

ΚΚΤ-4 ✓

ΚΚΤ-5 ✓

ΚΚΤ-6 ✓

Επαληθεύονται όλες

Η λύση είναι $(x_1^*, x_2^*) = (0, \frac{5}{9})$

Ασκηση 3

Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού

$$\max \quad 5x_1 - 4x_2 + 7$$
$$\text{υπό} \quad -4x_1^2 - x_2^2 \geq -9$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

(α) ΝΔο είναι πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού

(β) Να λυθεί με συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker

Λύση

(α) Το πρόβλημα ισοδύναμα γράφεται

$$\max \quad 5x_1 - 4x_2 + 7$$
$$\text{υπό} \quad 4x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Έστω $f(x_1, x_2) = 5x_1 - 4x_2 + 7$

$g_1(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 9$

Η f είναι κοίλη ως γραμμική

Η g_1 είναι κυρτή ως άθροισμα κυρτών

Οπότε το πρόβλημα είναι μορφής ΠΚΠ-3

(β) Έχουμε $p = 1$ περιορισμό οπότε θεωρούμε πολλαπλασιαστή $\mu_1 \geq 0$ και γράφουμε τη συνάρτηση Lagrange

$$L(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) - \mu_1 g_1(x_1,x_2)$$
$$= 5x_1 - 4x_2 + 7 - \mu_1(4x_1^2 + x_2^2 - 9)$$

Συνθηκες ΚΚΤ:

$\mu_1 \geq 0$ ККТ-1

$\frac{\partial L(x_1,x_2)}{\partial x_1} \leq 0 \Leftrightarrow 5 - 8\mu_1 x_1 \leq 0$ ККТ-2

$\frac{\partial L(x_1,x_2)}{\partial x_2} \leq 0 \Leftrightarrow -4 - 2\mu_1 x_2 \leq 0$ ККТ-3

$x_1 \cdot \frac{\partial L(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot (5 - 8\mu_1 x_1) = 0$ ККТ-4

$x_2 \frac{\partial L(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow x_2(-4 - 2\mu_1 x_2) = 0$ ККТ-5

$\mu_1 g_1(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow \mu_1(4x_1^2 + x_2^2 - 9) = 0$ ККТ-6

$g_1(x_1,x_2) \leq 0 \Rightarrow 4x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0$ ККТ-7

$x_1 \geq 0$ ККТ-8

$x_2 \geq 0$ ККТ-9

Λαμβανουμε περιπτώσεις $\mu_1 = 0$, $\mu_1 > 0$

$x_1 = 0$, $x_1 > 0$

$x_2 = 0$, $x_2 > 0$

Περίπτωση I: $\mu_1 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0$

Εξετάζω αν επαληθεύονται οι συνθήκες KKT-2 ×.

Περίπτωση II: $\mu_1 = 0, x_1 = 0, x_2 > 0$

Παρατηρούμε ότι η KKT-2 δεν επαληθεύεται

Περίπτωση III $\mu_1 = 0, x_1 > 0, x_2 = 0$

Ομοίως με περ. II

Περίπτωση IV $\mu_1 = 0, x_1 > 0, x_2 > 0$

Όμοια με περ II

Περίπτωση V : $\mu_1 > 0, x_1 = 0, x_2 = 0$

Όμοια με περ II

Περίπτωση VI : $\mu_1 > 0, x_1 = 0, x_2 > 0$

Όμοια με περ II

Περίπτωση VII : $\mu_1 > 0, x_1 > 0, x_2 = 0$

KKT-6 $\xRightarrow{\mu_1 > 0} 4x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0 \xRightarrow{x_2 = 0} 4x_1^2 = 9 \xRightarrow{x_1 > 0} x_1 = \frac{3}{2}$

KKT-4 $\xRightarrow{x_1 > 0} 5 - 8\mu_1 x_1 = 0 \xRightarrow{x_1 = \frac{3}{2}} 5 - 12\mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_1 = \frac{5}{12}$

Ελέγχω αν επαληθεύονται όλες οι KKT:

Επαληθεύονται όλες.

Λύση $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{3}{2}, 0)$

Άσκηση 4

Να λυθεί το πρόβλημα της άσκησης 1 χωρίς τους περιορισμούς, δηλαδή να λυθεί το

$$\max \ -3x_1^2-2x_2^2+2x_1x_2-3x_1+4x_2-5$$
$$\text{υπό} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Λύση

Έχουμε δείξει ότι η

$$f(x_1,x_2) = -3x_1^2-2x_2^2+2x_1x_2-3x_1+4x_2-5$$

είναι κοίλη.

$$\nabla f(x_1,x_2)=0 \iff$$
$$(-6x_1+2x_2-3,\ -4x_2+2x_1+4)=(0,0) \iff$$
$$\left\{\begin{array}{l} -6x_1+2x_2-3=0 \\ -4x_2+2x_1+4=0 \end{array}\right\} \iff$$
$$\left\{\begin{array}{l} -6(2x_2-2)+2x_2-3=0 \\ x_1=2x_2-2 \end{array}\right\} \iff$$
$$\left\{\begin{array}{l} -10x_2=-9 \\ x_1=2x_2-2 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x_2=\frac{9}{10} \\ x_1=-\frac{1}{5} \end{array}\right\}$$

$$Hf\left(-\frac{1}{5},\frac{9}{10}\right)=\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{αρνητικά ορισμένος}$$

Άρα $(x_1^*,x_2^*)=\left(-\frac{1}{5},\frac{9}{10}\right)$ τοπικό μέγιστο.

Όμως f κοίλη $\Rightarrow$ $(x_1^*,x_2^*)=\left(-\frac{1}{5},\frac{9}{10}\right)$ ολικό μέγιστο