Επιχειρησιακή Έρευνα
Ενότητα 4
Δυϊκή θεωρία γραμμικού προγραμματισμού

Οι ασκήσεις να λυθούν με μέθοδο Simplex ή με δυϊκή μέθοδο Simplex.

Άσκηση 1. Επιλύστε το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{υπό} & 5x_1 & + & 1x_2 & \leq & 5 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Άσκηση 2. Επιλύστε το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{υπό} & -3x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & - & 4x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Άσκηση 3. Επιλύστε το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & -2x_1 & - & 3x_2 & & \\ \text{υπό} & -3x_1 & + & x_2 & \leq & -3 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Άσκηση 4. Επιλύστε το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & -x_1 & - & 3x_2 & & \\ \text{υπό} & -3x_1 & + & x_2 & \leq & -3 \\ & 4x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Άσκηση 5. Επιλύστε το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & -x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{υπό} & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & -6 \\ & 3x_1 & - & 1x_2 & \leq & -3 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Άσκηση 6. Επιλύστε το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 3x_1 & - & x_2 & & \\ \text{υπό} & -1x_1 & + & 2x_2 & \leq & -2 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Άσκηση 1

$$\begin{array}{llll} \max & 3x_1 + 3x_2 & & \\ \text{υπό} & 5x_1 + 1x_2 & \leq & 5 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 6 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Το αρχικό λεξικό είναι

$$\zeta = 0 \; \boxed{+3x_1} + 3x_2$$

$$\boxed{w_1} = 5 - 5x_1 - 1x_2 \rightarrow \text{μηδ. για } x_1 = \frac{5}{5}$$

$$w_2 = 6 - 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \text{μηδ. για } x_1 = \frac{6}{2}$$

εφικτότητα ✓

"βελτιστότητα" ✗ $\Rightarrow$ Simplex

Η x_1 μπαίνει στη βάση.

Η w_1 βγαίνει από τη βάση $\left(\min\left\{\frac{5}{5}, \frac{6}{2}\right\} = \frac{5}{5}\right)$

Επόμενο λεξικό:

$$\zeta = 3 - \frac{3}{5}w_1 \; \boxed{+\frac{12}{5}x_2}$$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{5}w_1 - \frac{1}{5}x_2 \rightarrow \text{μηδ. για } x_2 = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

$$\boxed{w_2} = 4 + \frac{2}{5}w_1 - \frac{13}{5}x_2 \rightarrow \text{μηδ. για } x_2 = \frac{4}{\frac{13}{5}} = \frac{20}{13}$$

Το λεξικό δεν είναι βέλτιστο.

Η x_2 μπαίνει στη βάση.

Η w_2 βγαίνει από τη βάση $\left(\min\left\{5, \frac{20}{13}\right\} = \frac{20}{13}\right)$

Επόμενο λεξικό:

$$\zeta = \frac{87}{13} - \frac{3}{13}w_1 - \frac{12}{13}w_2$$

$$x_1 = \frac{9}{13} - \frac{3}{13}w_1 + \frac{1}{13}w_2$$

$$x_2 = \frac{20}{13} + \frac{2}{13}w_1 - \frac{5}{13}w_2$$

Το λεξικό είναι βέλτιστο.

Βέλτιστη λύση $(x_1^*, x_2^*, w_1^*, w_2^*) = \left(\frac{9}{13}, \frac{20}{13}, 0, 0\right)$.

Βέλτιστη τιμή α.σ. $\zeta^* = 87/13$

Άσκηση 2

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{υπό} & -3x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & - & 4x_2 & \leq & 4 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Το αρχικό λεξικό είναι

$$
\begin{array}{l}
\zeta = 0 \boxed{+1x_1} + 2x_2 \\
\hline
w_1 = 3 + 3x_1 - x_2 \\
\boxed{w_2} = 4 - 1x_1 + 4x_2
\end{array}
$$

Εφικτότητα ✓
"βελτιστότητα" ✗
$\Big\} \Rightarrow$ Simplex

Η x_1 μπαίνει στη βάση.
Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

$$
\begin{array}{l}
\zeta = 4 - 1w_2 + 6x_2 \\
\hline
w_1 = 17 - 3w_2 + 11x_2 \\
x_1 = 4 - 1w_2 + 4x_2
\end{array}
$$

Το x_2 έχει θετικό συντελεστή στην α.σ. και μη-αρνητικούς συντελεστές στους περιορισμούς. Άρα, το πρόβλημα είναι μη-φραγμένο.

Άσκηση 3

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & -2x_1 & - & 3x_2 & & \\
\text{υπό} & -3x_1 & + & x_2 & \leq & -3 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Το αρχικό λεξικό είναι

$$
\begin{array}{l}
\zeta = 0 \boxed{-2x_1} - 3x_2 \\
\hline
\boxed{w_1} = -3 + 3x_1 - x_2 \\
w_2 = 2 - x_1 - x_2
\end{array}
$$

εφικτότητα ✗
"βελτιστότητα" ✓ } ⟹ Δυική μέθοδος Simplex

Η w_1 βγαίνει από τη βάση $(-3<0)$.
Η x_1 μπαίνει στη βάση.
Το επόμενο λεξικό είναι

$$
\begin{array}{l}
\zeta = -2 - \frac{2}{3}w_1 - \frac{11}{3}x_2 \\
\hline
x_1 = 1 + \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}x_2 \\
w_2 = 1 - \frac{1}{3}w_1 - \frac{4}{3}x_2
\end{array}
$$

Το λεξικό είναι βέλτιστο.
Η βέλτιστη λύση είναι $(x_1^*, x_2^*, w_1^*, w_2^*) = (1,0,0,1)$.
Η βέλτιστη τιμή της α.σ. είναι $\zeta^* = -2$.

Άσκηση 4

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & -x_1 & - & 3x_2 & & \\
\text{υπό} & -3x_1 & + & x_2 & \leq & -3 \\
 & 4x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Το αρχικό λεξικό είναι

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 \boxed{-x_1} - 3x_2 \\
\hline
\boxed{w_1} &= -3 + 3x_1 - x_2 \\
w_2 &= -4 - 4x_1 + x_2
\end{aligned}
$$

"βελτιστότητα ✓" εφικτότητα ✗ $\Big\} \Rightarrow$ Δυϊκή μέθοδο Simplex

Η w_1 βγαίνει από τη βάση. $(-3<0)$

Το x_1 μπαίνει στη βάση.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= -1 - \tfrac{1}{3} w_1 - \tfrac{10}{3} x_2 \\
\hline
x_1 &= 1 + \tfrac{1}{3} w_1 + \tfrac{1}{3} x_2 \\
w_2 &= -8 - \tfrac{4}{3} w_1 - \tfrac{1}{3} x_2
\end{aligned}
$$

Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

Δεν υπάρχει υποψήφια μεταβλητή για να μπεί στη βάση (οι συντελεστές των μη-βασικών μεταβλητών στον 2ο περιορισμό είναι <0).

Το πρόβλημα είναι μη-εφικτό.

Άσκηση 5

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & -x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{υπό} & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & -6 \\
 & 3x_1 & - & 1x_2 & \leq & -3 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\zeta = 0 - x_1 + 2x_2 \\
\hline
w_1 = -6 + 3x_1 - 2x_2 \\
w_2 = -3 - 3x_1 + 1x_2
\end{array}
$$

Εφικτότητα ✗ , "βελτιστότητα" ✗ $\Rightarrow$ Δυική μέθοδο Simplex σε τροποποιημένο με νέα αντικειμενική συνάρτηση $\zeta' = 0 - 1x_1 - 1x_2$

Το τροποποιημένο λεξικό είναι

$$
\begin{array}{l}
\zeta' = 0 \boxed{-1x_1} - 1x_2 \\
\hline
\boxed{w_1} = -6 + 3x_1 - 2x_2 \\
w_2 = -3 - 3x_1 + 1x_2
\end{array}
$$

Κάνω δυική μέθοδο Simplex.

Η w_1 βγαίνει από τη βάση.

Η x_1 μπαίνει στη βάση.

$$
\begin{array}{l}
\zeta' = -2 - \frac{1}{3} w_1 - \frac{5}{3} x_2 \\
\hline
x_1 = 2 + \frac{1}{3} w_1 + \frac{2}{3} x_2 \\
w_2 = -9 - 1w_1 - 1x_2
\end{array}
$$

Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

Δεν υπάρχει μη-βασική μεταβλητή που μπορεί να μπει στη βάση (όλοι οι συντελεστές στον 2ο περιορισμό είναι < 0).

Άρα το τροποποιημένο πρόβλημα είναι μη-εφικτό. Οπότε και το αρχικό πρόβλημα είναι μη-εφικτό.

Άσκηση 6

$$\begin{array}{llcrcrl} \max & 3x_1 & - & x_2 & & \\ \text{υπό} & -1x_1 & + & 2x_2 & \leq & -2 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Το αρχικό λεξικό είναι

$$\begin{array}{l} \zeta = 0 + 3x_1 - 1x_2 \\ \hline w_1 = -2 + 1x_1 - 2x_2 \\ w_2 = 6 - 2x_1 - 3x_2 \end{array}$$

"βελτιστοποιήσιμο" X } => ερμηνεύσιμο X

Δυϊκή μέθοδο Simplex σε τροποποιημένο με αντικειμενική συνάρτηση

$\zeta' = 0 - 1x_1 - 1x_2$

Το τροποποιημένο λεξικό είναι

$$\begin{array}{l} \zeta' = 0 \boxed{-1x_1} - 1x_2 \\ \hline \boxed{w_1} = -2 + 1x_1 - 2x_2 \\ w_2 = 6 - 2x_1 - 3x_2 \end{array}$$

Η w_1 βγαίνει από τη βάση.

Η x_1 μπαίνει στη βάση.

$$\begin{array}{l} \zeta' = -2 - 1w_1 - 3x_2 \\ \hline x_1 = 2 + 1w_1 + 2x_2 \\ w_2 = 2 - 2w_1 - 7x_2 \end{array}$$

Το τελευταίο λεξικό του τροποποιημένου είναι βέλτιστο. Επιστρέφω στο αρχικό λεξικό. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι

$$\zeta = 0 + 3x_1 - 1x_2 = 0 + 3(2 + 1w_1 + 2x_2) - 1x_2 =$$
$$6 + 3w_1 + 5x_2$$

$$\begin{array}{lclll} \zeta & = & 6 & +3w_1 & \boxed{+5x_2} \\ \hline x_1 & = & 2 & +1w_1 & +2x_2 \\ \boxed{w_2} & = & 2 & -2w_1 & -7x_2 \end{array}$$

Συνεχίζουμε με μέθοδο Simplex.

Η x_2 μπαίνει στη βάση.

Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

$$\begin{array}{lclll} \zeta & = & \frac{52}{7} & \boxed{+\frac{11}{7}w_1} & -\frac{5}{7}w_2 \\ \hline x_1 & = & \frac{18}{7} & +\frac{3}{7}w_1 & -\frac{2}{7}w_2 \\ \boxed{x_2} & = & \frac{2}{7} & -\frac{2}{7}w_1 & -\frac{1}{7}w_2 \end{array}$$

Η w_1 μπαίνει στη βάση.

Η x_2 βγαίνει από τη βάση.

$$\begin{array}{lclll} \zeta & = & 9 & -\frac{11}{7}x_2 & -\frac{3}{2}w_2 \\ \hline x_1 & = & 3 & -\frac{3}{2}x_2 & -\frac{1}{2}w_2 \\ w_1 & = & 1 & -\frac{7}{2}x_2 & -\frac{1}{2}w_2 \end{array}$$

Το λεξικό είναι βέλτιστο.

Η βέλτιστη β.ε.λ. είναι

$(x_1^*, x_2^*, w_1^*, w_2^*) = (3, 0, 1, 0)$

και η βέλτιστη τιμή της α.σ. είναι $\zeta^* = 9$

Γενικά

Εφικτότητα ✓
"βελτιστότητα" ✗ } => Simplex =>
- βέλτιστη Β.Ε.Λ (Άσκ 1)
- μη-φραγμένο (Άσκ. 2)

Εφικτότητα ✗
"βελτιστότητα" ✓ } => Δυϊκή μέθοδος Simplex =>
- βέλτιστη Β.Ε.Λ. (Άσκ 3)
- μη-εφικτό (Άσκ 4)

π.χ.

$$
\begin{aligned}
J &= 5 - 5x_1 - 3x_2 \\
\hline
\boxed{w_1} &= -3 - 1x_1 - 2x_2 \\
w_2 &= 2 + 1x_1 - 2x_2
\end{aligned}
$$

Εφικτότητα ✗
"βελτιστότητα" ✗ } => Δυϊκή μέθοδος Simplex σε τροποποιημένο

⇓

Το τροποποιημένο έχει βέλτιστη Β.Ε.Λ.

⇓

και το αρχικό έχει την ίδια εφικτή λύση. Επιστρέφω στο αρχικό πρόβλημα και συνεχίζω με Simplex. (Άσκ. 6)

Το τροποποιημένο είναι μη-εφικτό

⇓

Το αρχικό είναι μη-εφικτό (Άσκ. 5)