Ενότητα 5

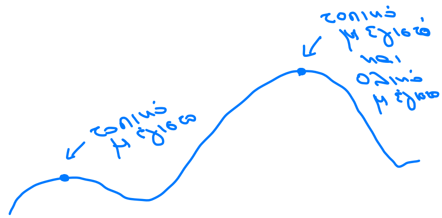
Μη-γραμμικός προγραμματισμός

5.1. Προβλήματα μη-γραμμικού προγραμματισμού χωρίς περιορισμούς.

$$\max \ f(\underline{x}) \qquad \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\text{υπό} \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

όπου $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους 2ης τάξης.

π.χ.
$$\max \ 6x_1^2 - 7x_1x_2 + 4x_2^2 x_1 - 7x_2^3$$
$$\text{υπό} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$



Ορισμοί

- $\underline{x}^*$ ολικό μέγιστο της f, αν
  $f(\underline{x}^*) \geq f(\underline{x}), \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\underline{x}^*$ τοπικό μέγιστο της f, αν $\exists \ \varepsilon > 0 : f(\underline{x}^*) \geq f(\underline{x}) \ \forall \ \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\| \underline{x} - \underline{x}^* \| < \varepsilon$

Αναγκαία συνθήκη για τοπικό μέγιστο

$$\left. \begin{array}{l} \nabla f(\underline{x}^*) = \underline{0} \\ Hf(\underline{x}^*) \ \text{θετικά ορισμένος} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x}^* \ \text{τοπικό μέγιστο}$$

Ορισμοί

- Ανάδελτα της f στο $\underline{x}$ είναι το

$$\nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_n} \right)$$

- Εσσιανός πίνακας της f στο $\underline{x}$ είναι ο

$$Hf(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2 \cdot x_3 - x_1^2 - x_2^3 - x_3 \cdot x_1$$

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_2}, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_3} \right)$$

$$= \left(1 - 2x_1 - x_3,\ x_3 - 3x_2^2,\ 2 + x_2 - x_1 \right)$$

$$Hf(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -6x_2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ορισμοί

Έστω A $n \times n$ συμμετρικός πίνακας ($A^T = A$). Ο A λέγεται:

(i) θετικά ορισμένος, αν $\underline{x}^T A \underline{x} > 0$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$

(ii) θετικά ημιορισμένος, αν $\underline{x}^T A \underline{x} \geq 0$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

(iii) αρνητικά ορισμένος, αν $\underline{x}^T A \underline{x} < 0$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{0}$

(iv) αρνητικά ημιορισμένος, αν $\underline{x}^T A \underline{x} \leq 0$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

(v) μη ορισμένος, αν $\exists\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x}^T A \underline{x} > 0$ και $\exists\, \underline{y} \in \mathbb{R}^n : \underline{y}^T A \underline{y} < 0$.

Κριτήρια

- A θετικά ορισμένος $\Longleftrightarrow$ οι κύριες υποορίζουσες του είναι θετικές

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

- A αρνητικά ορισμένος (αρνητικά ημιορισμένος) $\Longleftrightarrow$ ο $-A$ θετικά ορισμένος (θετικά ημιορισμένος).

Παράδειγμα

Ν.δ.ο ο $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ είναι αρνητικά ημιορισμένος.

Λύση

Αρκεί ν.δ.ο ο $-A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ είναι θετικά ημιορισμένος.

$$\left.\begin{array}{l} |2| = 2 > 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1)\cdot(-1) = 6 - 1 = 5 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$-A$ θετικά ορισμένος $\Rightarrow$

$-A$ θετικά ημιορισμένος $\Rightarrow$

A αρνητικά ημιορισμένος.

Ικανή συνθήκη τοπικού μεγίστου

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(\underline{x}^*) = 0 \\ Hf(\underline{x}^*) \text{ αρνητικά ορισμένος} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x}^* \text{ τοπικό μέγιστο.}$$

Άσκηση 1

Να βρεθεί τοπικό μέγιστο της

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 - 3x_2 + x_1 \cdot x_2$$

Λύση

$$\nabla f(x_1, x_2) = (-2x_1 + 2 + x_2 \,,\, -2x_2 - 3 + x_1)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$(-2x_1 + 2 + x_2 \,,\, -2x_2 - 3 + x_1) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} -2x_1 + 2 + x_2 = 0 \\ -2x_2 - 3 + x_1 = 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} -4x_2 - 6 + 2 + x_2 = 0 \\ x_1 = 2x_2 + 3 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{cases} x_2 = -\frac{4}{3} \\ x_1 = \frac{1}{3} \end{cases}\right\}$$

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

$$\nabla f(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$$

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Για να δείξω ότι είναι αρνητικά ορισμένος, αρκεί ν.δ.ο ο αντίθετος, δηλαδή ο $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος.

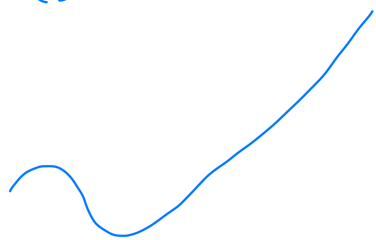
$$\left.\begin{aligned} |2| &= 2 > 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} &= 2 \cdot 2 - (-1)(-1) = 4 - 1 = 3 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ θετ. ορισμ.}$$

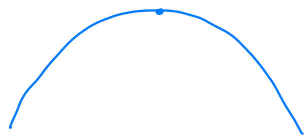
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ αρνητικά ορισμένος.}$$

Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\nabla f(x_1^*, x_2^*) = (0,0) \\ Hf(x_1^*, x_2^*) \text{ αρνητικά ορισμένος}\end{array}\right\} \Rightarrow (x_1^*, x_2^*) \text{ τοπικό μέγιστο}$$

$$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ τοπικό μέγιστο.}$$

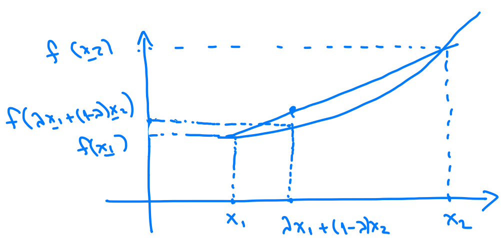




Ορισμός

Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή (κοίλη) όταν $\forall\ \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0,1]$ ισχύει

$$f(\lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2) \underset{(\geq)}{\leq} \lambda f(\underline{x}_1) + (1-\lambda) f(\underline{x}_2)$$



Θεώρημα (κριτήριο κυρτότητας)

Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή (κοίλη) αν και μόνο αν ο $Hf(\underline{x})$ θετικά (αρνητικά) ημιορισμένος $\forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

Θεώρημα

$$\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f \text{ κοίλη} \\ \underline{x}^* \text{ τοπικό μέγιστο} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x}^* \text{ ολικό μέγιστο}$$

Άσκηση 1 (συνέχεια)

Να βρεθεί ολικό μέγιστο

Λύση

$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ τοπικό μέγιστο.

$$Hf(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

έχουμε δείξει ότι είναι αρνητικά ορισμένος

$\Downarrow$

αρνητικά ημιορισμένος

Η f κοίλη, διότι ο $Hf(x_1,x_2)$ είναι αρνητικά ημιορισμένος $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left.\begin{array}{l} (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ τοπικό μέγιστο} \\ f \text{ κοίλη} \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1^*, x_2^*) \text{ ολικό μέγιστο.}$$

5.2 Προβλήματα μη-γραμμικού προγραμματισμού με περιορισμούς

Επίλυση προβλημάτων κυρτού προγραμματισμού με συνθήκες Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Έστω το π.μ-γ.π

$$\max \; f(\underline{x})$$

υπό

$$g_1(\underline{x}) \le 0$$

$$g_2(\underline{x}) \le 0 \qquad \text{ΠΚΠ-1}$$

$$\vdots$$

$$g_p(\underline{x}) \le 0$$

με $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη και $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, p$.

Αυτά τα προβλήματα λέγονται προβλήματα κυρτού προγραμματισμού (τύπου 1)

Κάνουμε τα εξής:

- Για κάθε περιορισμό ($g_i(\underline{x}) \le 0$) θεωρούμε έναν πολλαπλασιαστή $\mu_i \ge 0$.
- Φτιάχνουμε τη Λαγκρανζιανή συνάρτηση (συνάρτηση Lagrange) ως εξής:

$$L(\underline{x}) = f(\underline{x}) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(\underline{x})$$

Θεώρημα

Θεωρούμε το π.μ.γ.π. ΠΚΠ-1. Έστω

$\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ και $\underline{\mu}^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_p^*)$ που ικανοποιούν

τις παρακάτω συνθήκες:

$$\mu_i^* \geq 0 \quad , \; i = 1, 2, \ldots, p \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L(\underline{x}^*)}{\partial x_j} = 0 \quad , \; j = 1, 2, \ldots, n \qquad (2)$$

$$g_i(\underline{x}^*) \leq 0 \quad , \; i = 1, 2, \ldots, p \qquad (3)$$

$$\mu_i^* g_i(\underline{x}^*) = 0 \quad , \; i = 1, 2, \ldots, p. \qquad (4)$$

Τότε το $\underline{x}^*$ θα είναι βέλτιστη λύση του ΠΚΠ-1.