Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Έστω το πρωτεύον π.γ.π. σε τυπική μορφή

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{υπό} & & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\
 & -3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

- Το δυϊκό του σε τυπική μορφή είναι

$$
\begin{array}{lrcrcr}
-\max & & - & 3y_2 & & \\
\text{υπό} & & & 3y_2 & \leq & 3 \\
 & y_1 & - & 4y_2 & \leq & -2 \\
 & -2y_1 & - & y_2 & \leq & -1 \\
 & & & y_1, y_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{υπό} & & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 0 \\
 & -3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
J = 0 - 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 \\
\hline
w_1 = 0 - 0x_1 + 1x_2 - 2x_3 \\
w_2 = 3 + 3x_1 - 4x_2 - 1x_3
\end{array}
\qquad (\Pi)
$$

$$
\begin{array}{lrcrcr}
-\max & & - & 3y_2 & & \\
\text{υπό} & & & 3y_2 & \leq & 3 \\
 & y_1 & - & 4y_2 & \leq & -2 \\
 & -2y_1 & - & y_2 & \leq & -1 \\
 & & & y_1, y_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
J = 0 + 0y_1 - 3y_2 \\
\hline
z_1 = 3 + 0y_1 - 3y_2 \\
z_2 = -2 - 1y_1 + 4y_2 \\
z_3 = -1 + 2y_1 + 1y_2
\end{array}
\qquad (\Delta)
$$

- Το λεξικό του (Π) είναι αντίθετο-ανάστροφο του λεξικού του (Δ)

- Η μεταβλητή x_j του (Π) $\longleftrightarrow$ j-οστό περιορισμό του (Δ) $\longleftrightarrow$ περιθώρια μετ. z_j του (Δ)

$$x_j \longleftrightarrow z_j \quad , j = 1, \dots, n$$

- Η μεταβλητή y_i του (Δ) $\longleftrightarrow$ i-οστό περιορισμό του (Π) $\longleftrightarrow$ περιθώρια w_i του (Π)

$$y_i \longleftrightarrow w_i \quad , i = 1, \dots, m$$

Θα κάνω το εξής:

Θα λύνω το (Π) με Simplex.

Στο (Δ) θα κάνω ανάλογη οδήγηση.

Στην ανάλογη οδήγηση, όταν μια μηβασική μεταβλητή μπαίνει στη βάση στο (Π), βγάζω την αντίστοιχή της από τη βάση στο (Δ).

Όταν μία βασική μεταβλητή βγαίνει από τη βάση στο (Π), βάζω την αντίστοιχή της στη βάση στο (Δ).

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το αρχικό λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

Η x_2 μπαίνει στη βάση (2>0)

Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

z_2

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & - & 3x_1 & \boxed{+} & \boxed{2x_2} & + & x_3 \\
\hline
w_1 & = & 0 & & & + & x_2 & - & 2x_3 \\
\boxed{w_2} & = & 3 & + & 3x_1 & - & 4x_2 & - & x_3.
\end{array}
$$

y_2

- Το αρχικό λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

Η z_2 βγαίνει από τη βάση.

Η y_2 μπαίνει στη βάση

επειδή έχω $-\max$...

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
-\xi & = & 0 & & & \boxed{-} & \boxed{3y_2} \\
\hline
z_1 & = & 3 & & & - & 3y_2 \\
\boxed{z_2} & = & -2 & - & y_1 & + & 4y_2 \\
z_3 & = & -1 & + & 2y_1 & + & y_2.
\end{array}
$$

- Πίνακας δυϊκού = Αντίθετος ανάστροφος πρωτεύοντος.
- Η βασική λύση του πρωτεύοντος είναι εφικτή.
  Η βασική λύση του δυϊκού δεν είναι εφικτή.

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το αρχικό λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \zeta & = & 0 & - & 3x_1 & + & \boxed{2x_2} & + & x_3 \\ \hline w_1 & = & 0 & & & + & x_2 & - & 2x_3 \\ \boxed{w_2} & = & 3 & + & 3x_1 & - & 4x_2 & - & x_3. \end{array}$$

- Το αρχικό λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcr} -\xi & = & 0 & & & - & \boxed{3y_2} \\ \hline z_1 & = & 3 & & & - & 3y_2 \\ \boxed{z_2} & = & -2 & - & y_1 & + & 4y_2 \\ z_3 & = & -1 & + & 2y_1 & + & y_2. \end{array}$$

- Στο πρωτεύον η x_2 μπαίνει στη βάση, η w_2 βγαίνει.
- Εφαρμόζω την ανάλογη οδήγηση στο δυϊκό:
  Η z_2 βγαίνει, η y_2 μπαίνει στη βάση.

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το 2ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 3/2 & - & 3/2x_1 & - & 1/2w_2 & + & \boxed{1/2x_3} \\
\hline
\boxed{w_1} & = & 3/4 & + & 3/4x_1 & - & 1/4w_2 & - & 9/4x_3 \\
x_2 & = & 3/4 & + & 3/4x_1 & - & 1/4w_2 & - & 1/4x_3.
\end{array}
$$

$\to z_3$

Η x_3 μπαίνει στη βάση ($1/2 > 0$)

Η w_1 βγαίνει από τη βάση ($\min\{\frac{1}{3}, 3\} = \frac{1}{3}$) y_1

Μηδ για $x_3 = 1/3$

Μηδ για $x_3 = 3$

- Το 2ο λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
-\xi & = & -3/2 & \boxed{-} & \boxed{3/4y_1} & - & 3/4z_2 \\
\hline
z_1 & = & 3/2 & - & 3/4y_1 & - & 3/4z_2 \\
y_2 & = & 1/2 & + & 1/4y_1 & + & 1/4z_2 \\
\boxed{z_3} & = & -1/2 & + & 9/4y_1 & + & 1/4z_2.
\end{array}
$$

Η z_3 βγαίνει από τη βάση

Η y_1 μπαίνει στη βάση

- Πίνακας δυϊκού = Αντίθετος ανάστροφος πρωτεύοντος
- Στο πρωτεύον: η x_3 μπαίνει στη βάση, η w_1 βγαίνει.
- Ανάλογη οδήγηση στο δυϊκό: Η z_3 βγαίνει, η y_1 μπαίνει.

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα - Παράδειγμα

- Το 3ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 5/3 & - & 4/3x_1 & - & 5/9w_2 & - & 2/9w_1 \\
\hline
x_3 & = & 1/3 & + & 1/3x_1 & - & 1/9w_2 & - & 4/9w_1 \\
x_2 & = & 2/3 & + & 2/3x_1 & - & 2/9w_2 & + & 1/9w_1.
\end{array}$$

βέλτιστη λύση (Π): $(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, \frac{2}{3}, 1/3, 0, 0)$, $\zeta = \frac{5}{3}$

- Το 3ο λεξικό του δυϊκού π.γ.π. είναι

$$\begin{array}{rcrcrcr}
-\xi & = & -5/3 & - & 1/3z_3 & - & 2/3z_2 \\
\hline
z_1 & = & 4/3 & - & 1/3z_3 & - & 2/3z_2 \\
y_2 & = & 5/9 & + & 1/9z_3 & + & 2/9z_2 \\
y_1 & = & 2/9 & + & 4/9y_1 & - & 1/9z_2.
\end{array}$$

βέλτιστη λύση (Δ): $(y_1, y_2, z_1, z_2, z_3) = (2/9, 5/9, 4/3, 0, 0)$, $-\xi = -\frac{5}{3}$

- Πίνακας δυϊκού = Αντίθετος ανάστροφος πρωτεύοντος
- Στο πρωτεύον η βασική λύση είναι και εφικτή και βέλτιστη.
- Στο δυϊκό η βασική λύση είναι και εφικτή και βέλτιστη.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 5/3 & - & 4/3x_1 & - & 5/9w_2 & - & 2/9w_1 \\
\hline
x_3 & = & 1/3 & + & 1/3x_1 & - & 1/9w_2 & - & 4/9w_1 \\
x_2 & = & 2/3 & + & 2/3x_1 & - & 2/9w_2 & + & 1/9w_1.
\end{array}
$$

$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, w_1^*, w_2^*) = (0, 2/3, 1/3, 0, 0)$

$\zeta^* = 5/3$

Διαβάζω τη βέλτιστη λύση του (Δ) από το λεξικό του (Π).

$(y_1^*, y_2^*, z_1^*, z_2^*, z_3^*) = \left(\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{4}{3}, 0, 0\right)$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
-\xi & = & -5/3 & - & 1/3z_3 & - & 2/3z_2 \\
\hline
z_1 & = & 4/3 & - & 1/3z_3 & - & 2/3z_2 \\
y_2 & = & 5/9 & + & 1/9z_3 & + & 2/9z_2 \\
y_1 & = & 2/9 & + & 4/9y_1 & - & 1/9z_2.
\end{array}
$$

$(y_1^*, y_2^*, z_1^*, z_2^*, z_3^*) = (2/9, 5/9, 4/3, 0, 0)$

$-\xi^* = -\frac{5}{3} \Rightarrow \xi^* = \frac{5}{3}$

Μέθοδος Simplex και δυϊκότητα

- Περιθώριες μεταβλητές του πρωτεύοντος σε 1-1 αντιστοιχία με τις αρχικές μεταβλητές του δυϊκού. $w_i \leftrightarrow y_i$
- Αρχικές μεταβλητές του πρωτεύοντος σε 1-1 αντιστοιχία με τις περιθώριες μεταβλητές του δυϊκού. $x_j \leftrightarrow z_j$
- Ο πίνακας του αρχικού λεξικού του πρωτεύοντος είναι ο αντίθετος ανάστροφος του αρχικού λεξικού του δυϊκού.
- Οδήγηση στο πρωτεύον → Αντίστ. οδήγηση στο δυϊκό. Τότε ο πίνακας κάθε λεξικού του πρωτεύοντος είναι ο αντίθετος ανάστροφος του αντίστ. λεξικού του δυϊκού.

Μέθοδος Simplex, δυϊκότητα, βέλτιστες β.ε.λ.

Όταν θα φτάσω σε βέλτιστο λεξικό για το (Π), θα έχω και βέλτιστο λεξικό του (Δ)

- ~~Το τελικό λεξικό της Simplex του πρωτεύοντος δίνει βέλτιστη β.ε.λ. και για το πρωτεύον και για το δυϊκό.~~
- Εφικτότητα βασικής λύσης του δυϊκού:
  Η βασική λύση του πρωτεύοντος είναι βέλτιστη $\Rightarrow$
  Συντελεστές αντικειμενικής πρωτεύοντος $\leq 0 \Rightarrow$
  Σταθεροί όροι περιορισμών δυϊκού $\geq 0 \Rightarrow$
  Η βασική λύση του δυϊκού είναι εφικτή.
- Βελτιστότητα βασικής λύσης του δυϊκού:
  Η βασική λύση του πρωτεύοντος είναι εφικτή $\Rightarrow$
  Σταθεροί όροι περιορισμών πρωτεύοντος $\geq 0 \Rightarrow$
  Συντελεστές αντικειμενικής δυϊκού $\leq 0 \Rightarrow$
  Η βασική λύση του δυϊκού είναι βέλτιστη.

Μέθοδος Simplex, δυϊκότητας, βέλτιστες β.ε.λ.

- Το τελικό λεξικό της Simplex δίνει βέλτιστη β.ε.λ. και για το πρωτεύον και για το δυϊκό.
- Η βέλτιστη λύση του δυϊκού βρίσκεται διαβάζοντας του συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης του βέλτιστου λεξικού του πρωτεύοντος.
- Οι τιμές των βασικών μεταβλητών του δυϊκού στη βέλτιστη λύση είναι οι αντίθετοι των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης του βέλτιστου λεξικού του πρωτεύοντος.
- Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η ίδια και για το πρωτεύον και για το δυϊκό.
- Όλα βασίζονται στο ότι σε κάθε βήμα οι πίνακες των λεξικών είναι αντίθετοι ανάστροφοι.

Ισχυρό Δυϊκό Θεώρημα

Θεώρημα

Αν το πρωτεύον π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

τότε και το δυϊκό έχει άριστη λύση

$$y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$$

και οι βέλτιστες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων συμπίπτουν:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*.$$

Δ \ Π	βέλτιστη λύση	μη-φραγμένο	μη-εφικτό
βέλτιστη λύση	✓	✗	✗
μη-φραγμένο	✗	✗	✓
μη-εφικτό	✗	✓	✓

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = +\infty$$

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}_{\substack{\text{τιμή α.σ.} \\ (\Pi) \\ \text{για εφ.λ.}}} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i y_i}_{\substack{\text{τιμή α.σ.} \\ \text{του } (\Delta) \\ \text{για εφ.λ}}}$$

Σχέση λύσεων πρωτεύοντος και δυϊκού

- Από τις 9 περιπτώσεις ζευγών λύσεων πρωτεύοντος-δυϊκού μόνο 4 είναι δυνατές:
  - Ύπαρξη βέλτιστης λύσης πρωτεύοντος, ύπαρξη βέλτιστης λύσης δυϊκού.
  - Μη-φραγμένο πρωτεύον, μη-εφικτό δυϊκό.
  - Μη-εφικτό πρωτεύον, μη-φραγμενο δυϊκό.
  - Μη-εφικτό πρωτεύον, μη-εφικτό δυϊκό.
- Αλλιώς:
  - Ύπαρξη βέλτιστης λύσης πρωτεύοντος $\Rightarrow$ Ύπαρξη βέλτιστης λύσης δυϊκού, με ίδια τιμή αντικ. συνάρτησης.
  - Μη-φραγμένο πρωτεύον $\Rightarrow$ Μη-εφικτό δυϊκό.
  - Μη-εφικτό πρωτεύον $\Rightarrow$ Μη-φραγμένο ή μη-εφικτό δυϊκό.
- Αποδ: Ασθενές και Ισχυρό Δυϊκά Θεωρήματα.

Αντιστοιχίες μεταβλητών-περιορισμών π και δ

- Έστω το π.γ.π.

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, \qquad\qquad\quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

και το δυϊκό του π.γ.π.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, \qquad\qquad\quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

- Υπάρχει μια αντιστοιχία περιορισμών του αρχικού και μεταβλητών του δυϊκού και μεταβλητών του αρχικόυ και περιορισμών του δυϊκού.

Αντιστοιχίες μεταβλητών-περιορισμών π και δ

- Έστω το π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

και το δυϊκό του π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \right) \leftrightarrow y_i, \quad \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \right) \leftrightarrow x_j.$$

Αντιστοιχίες αρχικών-περιθωρίων π και δ

- Εισάγωντας περιθώριες το πρωτεύον γίνεται:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i = b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n, \\ & w_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m, \end{array}$$

και το δυϊκό του γίνεται

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - z_j = c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m, \\ & z_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

- Υπάρχει αντιστοιχία αρχικών-περιθώριων μεταβλητών μεταξύ των δυο προβλημάτων: $x_j \leftrightarrow z_j$, $w_i \leftrightarrow y_i$.

Θεώρημα συμπληρωματικής χαλαρότητας

Θεώρημα

Αν το πρωτεύον π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση

$$(x^*, w^*) = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, w_1^*, w_2^*, \ldots, w_m^*)$$

και το δυϊκό έχει αντίστοιχη βέλτιστη λύση

$$(z^*, y^*) = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*, y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$$

τότε

$$\begin{aligned} x_j^* z_j^* &= 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ w_i^* y_i^* &= 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i = b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \quad (1) \\
 & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n, \quad (2) \\
 & w_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m, \quad (3)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - z_j = c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \quad (4) \\
 & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m, \quad (5) \\
 & z_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \quad (6)
\end{array}
$$

$$
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \overset{(2)(6)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} (c_j + z_j) \cdot x_j \overset{(4)}{=} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j =
$$

$$
\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{m} (b_i - w_i) y_i \overset{(3)(5)}{\leq} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i
$$

Αν έχω βέλτιστες λύσεις, από Ισχυρό Δυϊκό Θεώρημα:

$$
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*
$$

Για να έχω ισότητα πρέπει

$$
\boxed{\begin{array}{l} x_j^* z_j^* = 0 \\ y_i^* \cdot w_i^* = 0 \end{array}}
$$

Θεώρημα συμπληρωματικής χαλαρότητας - Αποδ.

- Απόδειξη ασθενούς δυϊκού θεωρήματος με περιθώριες:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\leq \sum_{j=1}^{n} (c_j + z_j) x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i = \sum_{i=1}^{m} (b_i - w_i) y_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .
\end{aligned}$$

- Από ισχυρό δυϊκό θεώρημα $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$, οπότε οι ανισότητες πρέπει να ισχύουν ως ισότητες: $z_j^* x_j^* = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$ και $w_i^* y_i^* = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$.

Δυϊκή Simplex - Ιδέα

- Η δυϊκή μέθοδος Simplex προκύπτει εφαρμόζοντας τη μέθοδο Simplex στο δυϊκό πρόβλημα και μεταφράζοντας με όρους λεξικών του πρωτεύοντος.
- Η μετάφραση γίνεται με βάση το ότι σε κάθε βήμα ο πίνακας του λεξικού του πρωτεύοντος είναι ο αντίθετος ανάστροφος του πίνακα του λεξικού του δυϊκού.

Δυϊκή Simplex - Παράδειγμα

- Έχουμε το λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π.

Η w_2 βγαίνει από τη βάση.
Η x_2 μπαίνει στη βάση.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & - & 2x_1 & \boxed{-} & \boxed{4x_2} & & & - & 6x_4 \\
\hline
w_1 & = & -3 & + & x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 \\
\boxed{w_2} & = & -5 & - & 2x_1 & + & 3x_2 & & & + & 2x_4 \\
w_3 & = & 8 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4
\end{array}
$$

με δυϊκό π.γ.π.

Η y_2 μπαίνει στη βάση.
Η z_2 βγαίνει από τη βάση.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
-\xi & = & 0 & + & 3y_1 & \boxed{+} & \boxed{5y_2} & - & 8y_3 \\
\hline
z_1 & = & 2 & - & y_1 & + & 2y_2 & + & 2y_3 \\
\boxed{z_2} & = & 4 & + & 2y_1 & - & 3y_2 & + & 3y_3 \\
z_3 & = & 0 & & & & & + & 3y_3 \\
z_4 & = & 6 & - & y_1 & - & 2y_2 & + & 2y_3.
\end{array}
$$

→ λύσης για $y_2=\frac{4}{3}$

→ λύσης για $y_2=\frac{6}{2}$

- Simplex στο δυϊκό: η y_2 μπαίνει, η z_2 βγαίνει.
  Στο πρωτεύον: η w_2 βγαίνει, η x_2 μπαίνει.

Δυϊκή Simplex - Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έχουμε το 2ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\zeta & = & -20/3 & - & 14/3x_1 & - & 4/3w_2 & & & - & 10/3x_4 \\
\hline
w_1 & = & -19/3 & - & 1/3x_1 & - & 2/3w_2 & & & + & 7/3x_4 \\
x_2 & = & 5/3 & + & 2/3x_1 & + & 1/3w_2 & & & - & 2/3x_4 \\
w_3 & = & 3 & - & 4x_1 & - & w_2 & - & 3x_3 & &
\end{array}
$$

Η w_1 βγαίνει από τη βάση
Η x_4 μπαίνει στη βάση

με αντίστοιχο λεξικό του δυϊκού π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
-\xi & = & 20/3 & + & 19/3y_1 & - & 5/3z_2 & - & 3y_3 \\
\hline
z_1 & = & 14/3 & + & 1/3y_1 & - & 2/3z_2 & + & 4y_3 \\
y_2 & = & 4/3 & + & 2/3y_1 & - & 1/3z_2 & + & y_3 \\
z_3 & = & 0 & & & & & + & 3y_3 \\
z_4 & = & 10/3 & - & 7/3y_1 & + & 2/3z_2 & &
\end{array}
$$

Η y_1 μπαίνει στη βάση
Η z_4 βγαίνει από τη βάση

- Στο δυϊκό: η y_1 μπαίνει, η z_4 βγαίνει.
  Στο πρωτεύον: η w_1 βγαίνει, η x_4 μπαίνει.

Δυϊκή Simplex - Παράδειγμα (συνέχεια)

Η x_2 βγαίνει από τη βάση

Η x_1 μπαίνει στη βάση

- Έχουμε το 3ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\zeta & = & -110/7 & - & 36/7x_1 & - & 16/7w_2 & & & - & 10/7w_1 \\
\hline
x_4 & = & 19/7 & + & 1/7x_1 & + & 2/7w_2 & & & + & 3/7w_1 \\
\boxed{x_2} & = & -1/7 & + & 4/7x_1 & + & 1/7w_2 & & & - & 2/7w_1 \\
w_3 & = & 3 & - & 4x_1 & - & w_2 & - & 3x_3 & &
\end{array}
$$

$\frac{36/7}{4/7} = 9$ $\quad$ $\frac{16/7}{1/7} = 16$

με αντίστοιχο λεξικό του δυϊκού π.γ.π.

Η z_2 μπαίνει στη βάση

Η z_1 βγαίνει από τη βάση

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
-\xi & = & 110/7 & - & 19/7z_4 & + & 1/7z_2 & - & 3y_3 \\
\hline
z_1 & = & 36/7 & - & 1/7z_4 & - & 4/7z_2 & + & 4y_3 \\
y_2 & = & 16/7 & - & 2/7z_4 & - & 1/7z_2 & + & y_3 \\
z_3 & = & 0 & & & & & + & 3y_3 \\
y_1 & = & 10/7 & - & 3/7z_4 & + & 2/7z_2 & &
\end{array}
$$

ΜΗΣ για $z_2 = \frac{36/7}{4/7} = 9$

ΜΗΣ για $z_2 = \frac{16/7}{1/7} = 16$

- Στο δυϊκό: η z_2 μπαίνει, η z_1 βγαίνει.
  Στο πρωτεύον: η x_2 βγαίνει, η x_1 μπαίνει.

Δυϊκή Simplex - Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έχουμε το 4ο λεξικό του πρωτεύοντος π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\zeta & = & -17 & - & 9x_2 & - & w_2 & & & - & 4w_1 \\
\hline
x_4 & = & 11/4 & + & 1/4x_2 & + & 1/4w_2 & & & + & 1/2w_1 \\
x_1 & = & 1/4 & + & 7/4x_2 & - & 1/4w_2 & & & + & 1/2w_1 \\
w_3 & = & 2 & - & 7x_2 & & & - & 3x_3 & - & 2w_1
\end{array}
$$

με αντίστοιχο λεξικό του δυϊκού π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
-\xi & = & 17 & - & 11/4z_4 & - & 1/4z_1 & - & 2y_3 \\
\hline
z_2 & = & 9 & - & 1/4z_4 & - & 7/4z_1 & + & 7y_3 \\
y_2 & = & 1 & - & 1/4z_4 & + & 1/4z_1 & & \\
z_3 & = & 0 & & & & & + & 3y_3 \\
y_1 & = & 4 & - & 1/2z_4 & - & 1/2z_1 & + & 2y_3
\end{array}
$$

βέλτιστο

- Τα λεξικά αντιστοιχούν σε βέλτιστες β.ε.λ.

Κανόνες οδήγησης - Επιλογή εξερχ. μεταβλητής

- Στο δυϊκό λεξικό διαλέγουμε για εισερχόμενη μεταβλητή, κάποια που έχει θετικό συντελεστή στην αντικειμενική συνάρτηση.

$$\downarrow$$

Στο πρωτεύον λεξικό διαλέγουμε για εξερχόμενη μεταβλητή κάποια που έχει αρνητικό σταθερό όρο στο δεξιό σκέλος των περιορισμών.

Κανόνες οδήγησης - Επιλογή εισερχ. μεταβλητής

- Στο δυϊκό λεξικό διαλέγουμε για εξερχόμενη μεταβλητή, αυτή που αντιστοιχεί στο μικρότερο λόγο σταθερού όρου προς την απόλυτη τιμή αρνητικού συντελεστή της εισερχόμενης μεταβλητής του αντίστοιχου περιορισμού.

$$\downarrow$$

Στο πρωτεύον λεξικό διαλέγουμε για εισερχόμενη μεταβλητή, αυτή που αντιστοιχεί στο μικρότερο λόγο αντίθετου συντελεστή της αντικειμενικής συνάρτησης προς το θετικό συντελεστή της εξερχόμενης μεταβλητής του αντίστοιχου περιορισμού.

- Αλγόριθμος Simplex:
  - Αρχίζει από βασική εφικτή λύση.
  - Διατηρεί την εφικτότητα σε κάθε επανάληψη.
  - Βελτιώνει την αντικειμενική σε κάθε επανάληψη.
  - Καταλήγει σε βέλτιστη β.ε.λ. ή αποφαίνεται για μη-φραγμένο.
- Δυϊκός αλγόριθμος Simplex:
  - Αρχίζει από βασική "βέλτιστη" λύση (δηλ. οι συντελεστές των μη-βασικών μεταβλητών στην αντικειμενική ≤ 0).
  - Διατηρεί την "βελτιστότητα" σε κάθε επανάληψη.
  - Μειώνει την αντικειμενική $(-\xi)$ σε κάθε επανάληψη.
  - Καταλήγει σε βέλτιστη β.ε.λ. ή αποφαίνεται για μη-εφικτό.

$$J = 0 + 5x_1 - 5x_2$$

$$w_1 = 3 - 2x_1 + 1x_2$$

$$w_2 = 2 + 1x_1 - 2x_2$$

Εφικτότητα ✓
"βελτιστότητα" ✗ } ⇒

Εφαρμόζω Simplex.

Όσο εφαρμόζω μέθοδο Simplex:

- Η τιμή της α.σ. αυξάνεται ή διατηρείται σταθερή.
- Η εφικτότητα διατηρείται.

Μπορεί να καταλήξω σε βέλτιστη λύση ή μη-φραγμένο.

$$J = 0 - 5x_1 - 5x_2$$

$$w_1 = -3 - 2x_1 + 1x_2$$

$$w_2 = 2 + 1x_1 - 2x_2$$

Εφικτότητα ✗
"βελτιστότητα" ✓ } ⇒

Εφαρμόζω Δυική μέθοδο Simplex:

Όσο εφαρμόζω τη μέθοδο:

- Η τιμή της α.σ. μειώνεται ή διατηρείται σταθερή
- Η "βελτιστότητα" διατηρείται.

Μπορεί να καταλήξω σε βέλτιστη λύση ή μη-εφικτό.

$$J = 0 - 5x_1 - 5x_2$$

$$w_1 = 3 - 2x_1 + 1x_2$$

$$w_2 = 2 + 1x_1 - 2x_2$$

εφικτότητα ✓
"βελτιστότητα" ✓ } ⇒ έχω βέλτιστη λύση.

$$J = 0 + 5x_1 - 5x_2$$

$$w_1 = -3 - 2x_1 + 1x_2$$

$$w_2 = 2 + 1x_1 - 2x_2$$

εφικτότητα ✗
"βελτιστότητα" ✗ } ⇒

Δε μπορώ να κάνω Simplex ούτε δυϊκή μέθοδο Simplex.

Θα ξεκινήσω με τη φάση I της Simplex

ή

θα κάνω δυϊκή Simplex σε τροποποιημένο και μετά θα περάσω στο αρχικό.

Χρησιμοποιώντας τη Δυϊκή Simplex για τη Φάση Ι

- Έστω π.γ.π. όπου η αρχική βασική λύση δεν είναι εφικτή αλλά οι συντελεστές των μη-βασικών μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση είναι όλοι ≤ 0.
- Η δυϊκή Simplex βρίσκει βέλτιστη λύση ή αποφαίνεται ότι το π.γ.π. είναι μη εφικτό.
- Δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τη Φάση Ι της Simplex.

Χρησιμοποιώντας τη Δυϊκή Simplex για τη Φάση Ι

- Π.γ.π. σε τυπική μορφή με
  - Τουλάχιστον έναν θετικό συντελεστή στην αντικειμενική,
  - Τουλάχιστον ένα αρνητικό δεξιό μέλος περιορισμού.
- Ούτε η Simplex ούτε η δυϊκή Simplex μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα.

Χρησιμοποιώντας τη Δυϊκή Simplex για τη Φάση Ι

- Λύση:
  - Αλλάζω την αντικειμενική θεωρώντας κάποια με όλους τους συντελεστές αρνητικούς (π.χ. την $\sum_{j=1}^{n}(-1)x_j$).
  - Η εφικτή περιοχή δεν αλλάζει.
  - Εφαρμόζουμε τη δυϊκή Simplex.
  - Βρίσκεται βέλτιστη β.ε.λ. που θα είναι αρχική β.ε.λ. για το αρχικό πρόβλημα ή αποφαίνεται ότι δεν είναι εφικτό.
  - Εκφράζουμε τηναρχική αντικειμενική συναρτήσει των μη-βασικών μεταβλητών της β.ε.λ.
  - Εφαρμόζουμε την Simplex.

Να λυθεί το π.γ.π:

max $2x_1 + x_2$

υπό $3x_1 - x_2 \le -3$

$x_1 + x_2 \le 4$

$x_1, x_2 \ge 0$

Είναι σε τυπική μορφή.

Το αρχικό λεξικό είναι:

$$\begin{aligned} \zeta &= 0 + 2x_1 + x_2 \\ \hline w_1 &= -3 - 3x_1 + x_2 \\ w_2 &= 4 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$

"βελτιστότητα" ✗
εφικτότητα ✗ } ⇒ Δε μπορώ να εφαρμόσω Simplex αλλά δυική Simplex.

Θα τροποποιήσω το πρόβλημα αλλάζοντας την α.σ. σε

$$\zeta' = 0 - 1x_1 - 1x_2$$

και εφαρμόζω δυική μέθοδο Simplex στο τροποποιημένο.

Το τροποποιημένο πρόβλημα είναι:

$$\begin{aligned} \zeta' &= 0 - 1x_1 \boxed{- 1x_2} \\ \hline \boxed{w_1} &= -3 - 3x_1 + 1x_2 \\ w_2 &= 4 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Η w_1 βγαίνει

Η x_2 μπαίνει στη βάση

Επόμενο λεξικό:

$$J' = -3 - 4x_1 - w_1$$

$$x_2 = 3 + 3x_1 + w_1$$

$$w_2 = 1 - 4x_1 - w_1$$

$$J = 0 + 2x_1 + x_2 = 2x_1 + (3 + 3x_1 + w_1) = 3 + 5x_1 + w_1$$

$$J = 3 \boxed{+5x_1} + 1w_1$$

$$x_2 = 3 + 3x_1 + w_1$$

$$\boxed{w_2} = 1 - 4x_1 - w_1$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{εφικτότητα } ✓ \\ \text{“βελτιστότητα” } ✗\end{array}\right\} \Rightarrow$$

Συνεχίζω με Simplex

Η x_1 μπαίνει στη βάση.

Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

Επόμενο λεξικό:

$$J = 17/4 - 5/4\, w_2 - 1/4\, w_1$$

$$x_2 = 15/4 - 3/4\, w_2 + 1/4\, w_1$$

$$x_1 = 1/4 - 1/4\, w_2 - 1/4\, w_1$$

Το τροποποιημένο έχει βέλτιστη β.ε.λ.

$\Downarrow$

Το αρχικό πρόβλημα έχει εφικτή λύση, άρα δεν είναι μη-εφικτό.

Επιστρέφω στο αρχικό πρόβλημα:

- Κρατάω τους περιορισμούς του τελικού λεξικού του τροποποιημένου.
- Παρατηρώ ποιές μεταβλητές είναι μη-βασικές.
- Παίρνω την αρχική α.σ. και την εκφράζω ως προς τις μη-βασικές μεταβλητές

Είναι βέλτιστο.

Η βέλτιστη λύση είναι:

$$(x_1^*, x_2^*, w_1^*, w_2^*) = \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{15}{4}, 0, 0\right) \text{ με } J^* = 17/4$$

Η βέλτιστη λύση είναι

$$(y_1, y_2, z_1, z_2) = \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{5}{4}, 0, 0\right) \text{ με } J^* = 17/4.$$

Παράδειγμα

- Έστω το π.γ.π. σε τυπική μορφή

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & & \\
\text{υπό} & -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & -4 \\
 & -3x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & \leq & -7 \\
 & 3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & \leq & 8 \\
 & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 2, \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

- Το αρχικό λεξικό είναι

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 \\
\hline
w_1 & = & -4 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\
w_2 & = & -7 & + & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 \\
w_3 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 \\
w_4 & = & 2 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3.
\end{array}
$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Στο αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 \\
\hline
w_1 & = & -4 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\
w_2 & = & -7 & + & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 \\
w_3 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 \\
w_4 & = & 2 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3.
\end{array}$$

  - υπάρχει θετικός συντελεστής στην αντικειμενική (οπότε δεν μπορεί να αρχίσει ο δυϊκός αλγόριθμος Simplex),
  - υπάρχει αρνητικός σταθερός όρος στους περιορισμούς (οπότε δεν μπορεί να αρχίσει ο αλγόριθμος Simplex).
- Επιλέγω νέα αντικειμενική με όλους τους συντελεστές αρνητικούς. Η εφικτή περιοχή δεν αλλάζει. Έχω π.χ.

$$\zeta' = -x_1 - x_2 - x_3.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Εφαρμόζω δυϊκή Simplex στο λεξικό

η w_2 βγαίνει
η x_2 μπαίνει στη θέση

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta' & = & 0 & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 \\
\hline
w_1 & = & -4 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\
\boxed{w_2} & = & -7 & + & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 \\
w_3 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 \\
w_4 & = & 2 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3. \\
 & & & & 1/3 & & 1/4 & &
\end{array}
$$

- Είναι $\max\{|-4|, |-7|\} = |-7|$. Βγαίνει η w_2.
- Είναι $\min\{1/+3, 1/+4\} = 1/4$. Μπαίνει η x_2.

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Κάνουμε οδήγηση στο αρχικό λεξικό του τροποποιημένου π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta' & = & 0 & - & x_1 & - & \colorbox{yellow}{x_2} & - & x_3 \\
\hline
w_1 & = & -4 & + & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\
\colorbox{yellow}{w_2} & = & -7 & + & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 \\
w_3 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 \\
w_4 & = & 2 & - & x_1 & - & x_2 & + & x_3
\end{array}
$$

- Προκύπτει το 2ο λεξικό του τροποποιημένου π.γ.π.

Η w_1 βγαίνει από τη βάση
Η w_2 μπαίνει στη βάση

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta' & = & -7/4 & - & 1/4x_1 & - & 1/4w_2 & - & 7/4x_3 \\
\hline
\boxed{w_1} & = & -1/2 & - & 1/2x_1 & + & 1/2w_2 & + & 1/2x_3 \\
x_2 & = & 7/4 & - & 3/4x_1 & + & 1/4w_2 & + & 3/4x_3 \\
w_3 & = & 11/4 & - & 3/4x_1 & - & 3/4w_2 & - & 1/4x_3 \\
w_4 & = & 1/4 & - & 1/4x_1 & - & 1/4w_2 & + & 1/4x_3
\end{array}
$$

$\frac{1/4}{1/2}$ $\frac{7/4}{1/2}$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Εφαρμόζουμε δυϊκή Simplex στο 2ο λεξικό του τροποποιημένου π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta' & = & -7/4 & - & 1/4x_1 & - & 1/4w_2 & - & 7/4x_3 \\
\hline
w_1 & = & -1/2 & - & 1/2x_1 & + & 1/2w_2 & + & 1/2x_3 \\
x_2 & = & 7/4 & - & 3/4x_1 & + & 1/4w_2 & + & 3/4x_3 \\
w_3 & = & 11/4 & - & 3/4x_1 & - & 3/4w_2 & - & 1/4x_3 \\
w_4 & = & 1/4 & - & 1/4x_1 & - & 1/4w_2 & + & 1/4x_3
\end{array}
$$

- Είναι $\max\{|-1/2|\} = |-1/2|$. Βγαίνει η w_1.
- Είναι $\min\{(1/4)/(+1/2), (7/4)/(+1/2)\} = (1/4)/(+1/2)$. Μπαίνει η w_2.

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Κάνουμε οδήγηση στο 2ο λεξικό του τροποποιημένου π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta' & = & -7/4 & - & 1/4x_1 & - & 1/4w_2 & - & 7/4x_3 \\
\hline
w_1 & = & -1/2 & - & 1/2x_1 & + & 1/2w_2 & + & 1/2x_3 \\
x_2 & = & 7/4 & - & 3/4x_1 & + & 1/4w_2 & + & 3/4x_3 \\
w_3 & = & 11/4 & - & 3/4x_1 & - & 3/4w_2 & - & 1/4x_3 \\
w_4 & = & 1/4 & - & 1/4x_1 & - & 1/4w_2 & + & 1/4x_3
\end{array}
$$

- Προκύπτει το 3ο λεξικό του τροποποιημένου π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta' & = & \overset{-2}{\cancel{3/2}} & - & 1/2x_1 & - & 1/2w_1 & - & 3/2x_3 \\
\hline
w_2 & = & 1 & + & x_1 & + & 2w_1 & - & x_3 \\
x_2 & = & 2 & - & 1/2x_1 & + & 1/2w_1 & + & 1/2x_3 \\
w_3 & = & 2 & - & 3/2x_1 & - & 3/2w_1 & + & 1/2x_3 \\
w_4 & = & 0 & - & 1/2x_1 & - & 1/2w_1 & + & 1/2x_3
\end{array}
$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Το 3ο λεξικό του τροποποιημένου π.γ.π.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta' & = & \overset{-2}{\cancel{3/2}} & - & 1/2x_1 & - & 1/2w_1 & - & 3/2x_3 \\
\hline
w_2 & = & 1 & + & x_1 & + & 2w_1 & - & x_3 \\
x_2 & = & 2 & - & 1/2x_1 & + & 1/2w_1 & + & 1/2x_3 \\
w_3 & = & 2 & - & 3/2x_1 & - & 3/2w_1 & + & 1/2x_3 \\
w_4 & = & 0 & - & 1/2x_1 & - & 1/2w_1 & + & 1/2x_3
\end{array}
$$

  δίνει β.ε.λ.
- Συνεχίζουμε με Simplex για εύρεση βέλτιστης λύσης.
- Γράφουμε την αρχική αντικειμενική συναρτήσει των μη-βασικών μεταβλητών της β.ε.λ. που έχει προκύψει:

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 3x_1 + x_2 - 4x_3 \\
&= 3x_1 + (2 - 1/2x_1 + 1/2w_1 + 1/2x_3) - 4x_3 \\
&= 2 + 5/2x_1 + 1/2w_1 - 7/2x_3.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Το 1ο λεξικό του αρχικού π.γ.π. είναι

Η x_1 μπαίνει στη βάση

Η w_4 μπαίνει στη βάση

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 2 & + & \boxed{5/2x_1} & + & 1/2w_1 & - & 7/2x_3 \\
\hline
w_2 & = & 1 & + & x_1 & + & 2w_1 & - & x_3 \\
x_2 & = & 2 & - & 1/2x_1 & + & 1/2w_1 & + & 1/2x_3 \\
w_3 & = & 2 & - & 3/2x_1 & - & 3/2w_1 & + & 1/2x_3 \\
\boxed{w_4} & = & 0 & - & 1/2x_1 & - & 1/2w_1 & + & 1/2x_3
\end{array}
$$

$x_1 = 2/\frac{1}{2}$

$x_1 = 2/\frac{3}{2}$

$x_1 = 0/\frac{1}{2}$

- Μπαίνει η x_1, βγαίνει η w_4, κάνουμε οδήγηση:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 2 & - & 5w_4 & - & 2w_1 & - & x_3 \\
\hline
w_2 & = & 1 & - & 2w_4 & + & w_1 & & \\
x_2 & = & 2 & + & w_4 & + & w_1 & & \\
w_3 & = & 2 & + & 3w_4 & & & - & x_3 \\
x_1 & = & 0 & - & 2w_4 & - & w_1 & + & x_3
\end{array}
$$

Βέλτιστο.

- Το λεξικό δίνει βέλτιστη β.ε.λ.

Να λυθεί το π.γ.π.

$$\max \; -x_1 - 3x_2$$

υπό

$$3x_1 - 2x_2 \le -6$$
$$-x_1 + 3x_2 \le -3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Είναι σε τυπική μορφή

Το αρχικό λεξικό είναι

$$\zeta = 0 - x_1 \boxed{-3x_2}$$
$$\boxed{w_1} = -6 - 3x_1 + 2x_2$$
$$w_2 = -3 + x_1 - 3x_2$$

εφικτότητα ✗

"βελτιστότητα" ✓

$\Rightarrow$ λύνω με δυϊκή μέθοδο Simplex.

Η w_1 βγαίνει από τη βάση.

Η x_2 μπαίνει στη βάση.

Επόμενο λεξικό

$$\zeta = -12 - \frac{11}{12}x_1 - \frac{3}{2}w_1$$
$$x_2 = 3 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}w_1$$
$$\boxed{w_2} = -12 - \frac{7}{2}x_1 - \frac{3}{2}w_1$$

Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

Δεν υπάρχει υποψήφια να μπει στη βάση.

Το πρόβλημα ειναι είναι μη-εφικτό.

Αιτιολόγηση:

Το λεξικό του προβλήματος έχει αντίστοιχο λ εφικτό

$$
\begin{aligned}
-\xi &= +12 - 3z_2 + 12y_2 \\
\hline
z_1 &= +\frac{11}{12} - \frac{3}{2}z_2 + \frac{7}{2}y_2 \\
y_1 &= +\frac{3}{2} - \frac{1}{2}z_2 + \frac{3}{2}y_2
\end{aligned}
$$

Το (Δ) είναι μη-φραγμένο $\Rightarrow$

Το (Π) είναι μη-εφικτό.