Πιθανά προβλήματα

- Απουσία αρχικής β.ε.λ.
- Πολλές επιλογές για εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή.
- Απουσία επιλογής για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή.
- Πολλές επιλογές για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή.
- Η αντικειμενική συνάρτηση δεν βελτιώνεται στο επόμενο λεξικό.

Πρόβλημα Ι: Απουσία αρχικής β.ε.λ.

- Ξεκινάμε με λεξικό που αντιστοιχεί σε β.ε.λ.
- Τι κάνουμε αν δεν έχουμε τέτοιο αρχικό λεξικό;
- Χρησιμοποιούμε ένα βοηθητικό πρόβλημα που μας δίνει αρχική β.ε.λ. ή μας δείχνει ότι το π.γ.π. δεν έχει εφικτές λύσεις.
- Η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως φάση Ι της Simplex: Από βασική λύση σε β.ε.λ.
- Η κλασική διαδικασία που περιγράψαμε είναι η φάση ΙΙ: Από β.ε.λ. σε βέλτιστη λύση.

Πρόβλημα Ι - Παράδειγμα

- Θεωρούμε το π.γ.π. σε τυπική μορφή

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & -3x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{υπό} & -4x_1 & - & 2x_2 & \leq & -8 \\
 & -2x_1 & & & \leq & -2 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 1 \\
 & & & -3x_2 & \leq & -2 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

με αρχικό λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & - & 3x_1 & + & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & -8 & + & 4x_1 & + & 2x_2 \\
w_2 & = & -2 & + & 2x_1 & & \\
w_3 & = & 10 & - & 3x_1 & - & 2x_2 \\
w_4 & = & 1 & + & x_1 & - & 3x_2 \\
w_5 & = & -2 & & & + & 3x_2
\end{array}
$$

Η βασική λύση που αντιστοιχεί σε αυτό το λεξικό είναι η $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (0, 0, -8, -2, 10, 1, -2)$ Δεν είναι εφικτή

Πρόβλημα Ι - Παράδειγμα

- Το λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & - & 3x_1 & + & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & -8 & + & 4x_1 & + & 2x_2 \\
w_2 & = & -2 & + & 2x_1 & & \\
w_3 & = & 10 & - & 3x_1 & - & 2x_2 \\
w_4 & = & 1 & + & x_1 & - & 3x_2 \\
w_5 & = & -2 & & & + & 3x_2
\end{array}
$$

  αντιστοιχεί στη βασική λύση
  $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (0, 0, -8, -2, 10, 1, -2)$
  που δεν είναι εφικτή.
- Αυτό συμβαίνει διότι το π.γ.π. ήταν σε τυπική μορφή με μερικά από τα δεξιά μέλη των περιορισμών < 0.

$2x_1 + 3x_2 \leq 5$

$2x_1 + 3x_2 \leq 10$ ← πιο χαλαρός

$2x_1 + 3x_2 \leq 5 + x_0$, ← πιο χαλαρός

$x_0 \geq 0$

$\min x_0$

$$
\begin{array}{rcrcrl}
-4x_1 & - & 2x_2 & \leq & -8 & +x_0 \\
-2x_1 & & & \leq & -2 & +x_0 \\
3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 & +x_0 \\
-x_1 & + & 3x_2 & \leq & 1 & +x_0 \\
 & & -3x_2 & \leq & -2 & +x_0 \\
 & & x_0, x_1, x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

$\Longleftrightarrow$

$-\max -x_0$

$$
\begin{array}{l}
-x_0 - 4x_1 - 2x_2 \leq -8 \\
-x_0 - 2x_1 \leq 2 \\
-x_0 + 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\
-x_0 - x_1 + 3x_2 \leq 1 \\
-x_0 - 3x_2 \leq -2 \\
x_0, x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Αυτό το πρόβλημα βρίσκει πόσο πρέπει να χαλαρώσουν οι περιορισμοί για να υπάρξει εφικτή λύση.

Αν $x_0^* = 0$, τότε δεν έπρεπε να χαλαρώσουν καθόλου. Άρα, το αρχικό είχε εφικτές λύσεις.

Αν $x_0^* > 0$, το αρχικό πρόβλημα δεν είναι εφικτό.

Πρόβλημα Ι - Παράδειγμα

- Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό αφαιρούμε μια νέα μεταβλητή x_0 από κάθε αριστερό μέλος της τυπικής μορφής του αρχικού και
- θεωρούμε για αντικειμενική συνάρτηση την $-x_0$ (δηλαδή προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε την x_0).
- Προκύπτει τότε το π.γ.π.

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\max & -x_0 & & & & & \\
\text{υπό} & -x_0 & -4x_1 & - & 2x_2 & \leq & -8 \\
 & -x_0 & -2x_1 & & & \leq & -2 \\
 & -x_0 & +3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & -x_0 & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_0 & & - & 3x_2 & \leq & -2 \\
 & & & & x_0, x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Πρόβλημα I - Παράδειγμα

- Το π.γ.π.

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\max & -x_0 & & & & & \\
\text{υπό} & -x_0 & -4x_1 & - & 2x_2 & \leq & -8 \\
 & -x_0 & -2x_1 & & & \leq & -2 \\
 & -x_0 & +3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & -x_0 & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_0 & & - & 3x_2 & \leq & -2 \\
 & & & & x_0, x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

έχει προφανώς εφικτή λύση, αρκεί να πάρουμε $x_1 = x_2 = 0$ για τις αρχικές μεταβλητές και αρκετά μεγάλη τιμή για την τεχνητή μεταβλητή x_0 (πάνω από 8).

Πρόβλημα I - Αιτιολόγηση μεθόδου

- Το αρχικό π.γ.π. έχει εφικτή λύση, αν και μόνο αν το τροποποιημένο π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση με $\zeta = -x_0 = 0$.
- Αποδ:

  Αν το αρχικό π.γ.π. έχει εφικτή λύση, τότε παίρνουμε εφικτή λύση του τροποποιημένου, θέτοντας $x_0 = 0$. Αυτή είναι και βέλτιστη αφού $\zeta = -x_0 \leq 0$.

  Αν το τροποποιημένο π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση με $\zeta = -x_0 = 0$, τότε αγνοώντας το x_0 έχουμε μια εφικτή λύση του αρχικού.

Πρόβλημα I - Σύνοψη Θεωρίας

- Αν το αρχικό π.γ.π. τεθεί σε τυπική μορφή που δίνει βασική αλλά όχι εφικτή λύση θεωρούμε το τροποποιημένο π.γ.π. και βρίσκουμε τη βέλτιστη λύση του (Φάση I της Simplex).
- Αν το τροποποιημένο π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση με $x_0 = 0$, τότε αυτή δίνει β.ε.λ. για το αρχικό π.γ.π. και εφαρμόζουμε την Simplex για να βρούμε τη βέλτιστη λύση του αρχικού (Φάση II της Simplex).
- Αν το τροποποιημένο π.γ.π. δεν έχει βέλτιστη λύση με $x_0 = 0$, τότε το αρχικό π.γ.π. δεν έχει εφικτές λύσεις.

Πρόβλημα Ι - Παράδειγμα

- Αρχικό λεξικό τροποποιημένου π.γ.π. όχι εφικτό:

Μπαίνει στη βάση η x_0
Βγαίνει από τη βάση η w_1.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & \boxed{-} & \boxed{x_0} & & & & \\
\hline
\boxed{w_1} & = & -8 & + & 1x_0 & + & 4x_1 & + & 2x_2 \\
w_2 & = & -2 & + & x_0 & + & 2x_1 & & \\
w_3 & = & 10 & + & x_0 & - & 3x_1 & - & 2x_2 \\
w_4 & = & 1 & + & x_0 & + & x_1 & - & 3x_2 \\
w_5 & = & -2 & + & x_0 & & & + & 3x_2
\end{array}
$$

- Στη Φάση Ι της Simplex, στο αρχικό λεξικό απαιτούμε να μπει η τεχνητή μεταβλητή στη βάση στο πρώτο βήμα.
- Απαιτούμε να βγει από τη βάση η πιο αρνητική μεταβλητή, εδώ η w_1.
- Προκύπτει έτσι β.ε.λ. για το τροποποιημένο π.γ.π. στο επόμενο λεξικό.

Πρόβλημα Ι - Παράδειγμα

- Από το όχι εφικτό λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & - & x_0 & & & & \\
\hline
w_1 & = & -8 & + & x_0 & + & 4x_1 & + & 2x_2 \\
w_2 & = & -2 & + & x_0 & + & 2x_1 & & \\
w_3 & = & 10 & + & x_0 & - & 3x_1 & - & 2x_2 \\
w_4 & = & 1 & + & x_0 & + & x_1 & - & 3x_2 \\
w_5 & = & -2 & + & x_0 & & & + & 3x_2
\end{array}
$$

- πάμε στο εφικτό λεξικό (β.ε.λ.)

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & -8 & - & w_1 & \boxed{+} & \boxed{4x_1} & + & 2x_2 \\
\hline
x_0 & = & 8 & + & w_1 & - & 4x_1 & - & 2x_2 \\
w_2 & = & 6 & + & w_1 & - & 2x_1 & - & 2x_2 \\
w_3 & = & 18 & + & w_1 & - & 7x_1 & - & 4x_2 \\
w_4 & = & 9 & + & w_1 & - & 3x_1 & - & 5x_2 \\
\boxed{w_5} & = & 6 & + & w_1 & - & 4x_1 & + & x_2
\end{array}
$$

μηδ για $x_1 = \frac{8}{4}$

μηδ για $x_1 = \frac{6}{2}$

μηδ για $x_1 = \frac{18}{7}$

μηδ για $x_1 = \frac{9}{3}$

μηδ για $x_1 = \frac{6}{4}$

Δεν είναι βέλτιστο. Η x_1 μπαίνει στη βάση ($4>0$).

Η w_5 βγαίνει από τη βάση ($\min\{\frac{8}{4}, \frac{6}{2}, \frac{18}{7}, \frac{9}{3}, \frac{6}{4}\} = \frac{6}{4}$)

Πρόβλημα I - Παράδειγμα

- Τώρα στο εφικτό λεξικό του τροποποιημένου π.γ.π. εφαρμόζουμε κανονικά την Simplex για να βελτιστοποιήσουμε την αντικειμενική:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & -8 & - & w_1 & + & 4x_1 & + & 2x_2 \\
\hline
x_0 & = & 8 & + & w_1 & - & 4x_1 & - & 2x_2 \\
w_2 & = & 6 & + & w_1 & - & 2x_1 & - & 2x_2 \\
w_3 & = & 18 & + & w_1 & - & 7x_1 & - & 4x_2 \\
w_4 & = & 9 & + & w_1 & - & 3x_1 & - & 5x_2 \\
w_5 & = & 6 & + & w_1 & - & 4x_1 & + & x_2
\end{array}$$

- Εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή: x_1 ή x_2. Ας επιλέξουμε την x_1.
- Εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή: w_5.
- Εφαρμόζουμε τη συνήθη διαδικασία οδήγησης.

Πρόβλημα Ι - Παράδειγμα

- Από το λεξικό :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & -8 & - & w_1 & + & 4x_1 & + & 2x_2 \\
\hline
x_0 & = & 8 & + & w_1 & - & 4x_1 & - & 2x_2 \\
w_2 & = & 6 & + & w_1 & - & 2x_1 & - & 2x_2 \\
w_3 & = & 18 & + & w_1 & - & 7x_1 & - & 4x_2 \\
w_4 & = & 9 & + & w_1 & - & 3x_1 & - & 5x_2 \\
w_5 & = & 6 & + & w_1 & - & 4x_1 & + & x_2
\end{array}
$$

- πάμε στο:

Δεν είναι βέλτιστο η x_2 μπαίνει στη βάση (3>0).

Η x_0 βγαίνει από τη βάση.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & -2 & & & - & w_5 & \boxed{+} & \boxed{3x_2} \\
\hline
\boxed{x_0} & = & 2 & & & + & w_5 & \boxed{-} & \boxed{3x_2} \\
w_2 & = & 3 & + & 0.5w_1 & + & 0.5w_5 & - & 2.5x_2 \\
w_3 & = & 7.5 & - & 0.75w_1 & + & 1.75w_5 & - & 5.75x_2 \\
w_4 & = & 4.5 & + & 0.25w_1 & + & 0.75w_5 & - & 5.75x_2 \\
x_1 & = & 1.5 & + & 0.25w_1 & - & 0.25w_5 & + & 0.25x_2
\end{array}
$$

μηδ. για $x_2 = \frac{2}{3}$

μηδ. για $x_2 = \frac{3}{2.5}$

μηδ. για $x_2 = \frac{7.5}{5,75}$

μηδ. για $x_2 = \frac{4.5}{5.75}$

Πρόβλημα I - Παράδειγμα

- Από το λεξικό:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & -2 & & & - & w_5 & + & \boxed{3x_2} \\
\hline
\boxed{x_0} & = & 2 & & & + & w_5 & - & 3x_2 \\
w_2 & = & 3 & + & 0.5w_1 & + & 0.5w_5 & - & 2.5x_2 \\
w_3 & = & 7.5 & - & 0.75w_1 & + & 1.75w_5 & - & 5.75x_2 \\
w_4 & = & 4.5 & + & 0.25w_1 & + & 0.75w_5 & - & 5.75x_2 \\
x_1 & = & 1.5 & + & 0.25w_1 & - & 0.25w_5 & + & 0.25x_2
\end{array}
$$

- πάμε στο:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & & & & & - & x_0 \\
\hline
x_2 & = & 2/3 & & & + & 1/3w_5 & - & 1/3x_0 \\
w_2 & = & 4/3 & + & 1/2w_1 & - & 1/3w_5 & + & 5/6x_0 \\
w_3 & = & 11/3 & - & 3/4w_1 & - & 1/6w_5 & + & 23/12x_0 \\
w_4 & = & 2/3 & + & 1/4w_1 & - & 7/6w_5 & + & 23/12x_0 \\
x_1 & = & 5/3 & + & 1/4w_1 & - & 1/6w_5 & - & 1/12x_0
\end{array}
$$

Βέλτιστο λεξικό.

Βέλτιστη λύση $(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (0, 5/3, 2/3, 0, 4/3, 11/3, 2/3, 0)$

$x_0^* = 0$

Πρόβλημα I - Παράδειγμα

- Το λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & & & & & - & x_0 \\
\hline
x_2 & = & 2/3 & & & + & 1/3w_5 & - & 1/3x_0 \\
w_2 & = & 4/3 & + & 1/2w_1 & - & 1/3w_5 & + & 5/6x_0 \\
w_3 & = & 11/3 & - & 3/4w_1 & - & 1/6w_5 & + & 23/12x_0 \\
w_4 & = & 2/3 & + & 1/4w_1 & - & 7/6w_5 & + & 23/12x_0 \\
x_1 & = & 5/3 & + & 1/4w_1 & - & 1/6w_5 & - & 1/12x_0
\end{array}
$$

  είναι βέλτιστο για το τροποποιημένο πρόβλημα, οπότε η φάση I της Simplex τελείωσε.

- Αφού η βέλτιστη τιμή της ζ είναι 0, το αρχικό πρόβλημα έχει εφικτή λύση, που βρίσκεται παραλείποντας την x_0 από το λεξικό: $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (5/3, 2/3, 0, 4/3, 11/3, 2/3, 0)$.

Επίσης, το τροποποιημένο έχει βελ. λύση με $x_0^* = 0$, το αρχικό έχει εφικτή λύση.

Μια εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος παίρνω αν στη βέλτιστη λύση του τροποποιημένου αγνοήσω το x_0.

$$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{4}{3}, \frac{11}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & -\frac{7}{3} & - & \frac{3}{4}w_1 & + & \frac{11}{6}w_5 \\
\hline
x_2 & = & 2/3 & & & + & 1/3w_5 \\
w_2 & = & 4/3 & + & 1/2w_1 & - & 1/3w_5 \\
w_3 & = & 11/3 & - & 3/4w_1 & - & 1/6w_5 \\
w_4 & = & 2/3 & + & 1/4w_1 & - & 7/6w_5 \\
x_1 & = & 5/3 & + & 1/4w_1 & - & 1/6w_5
\end{array}$$

Για να μεταβάλω σε ένα βέλτιστο πρέπει να γράψω το αντίστοιχο λεξικό.

Φτιάχνω το λεξικό ως εξής:

- Παίρνω τους περιορισμούς από το βέλτιστο λεξικό του τροποποιημένου αγνοώντας το x_0.
- Οι w_1 και w_5 είναι οι μη-βασικές μεταβλητές. Αυτές εμφανίζονται στο δεξί μέλη των περιορισμών και πρέπει να εμφανίζονται και στο δεξί μέρος της α.σ.
- Η α.σ. είναι $\zeta = 0 - 3x_1 + 4x_2$. Εμφανίζονται βασικές μεταβλητές. Θα τις αντικαταστήσω από τους περιορισμούς.

$$\zeta = 0 - 3x_1 + 4x_2$$

$$\zeta = 0 - 3\left(\tfrac{5}{3} + \tfrac{1}{4}w_1 - \tfrac{1}{6}w_5\right) + 4\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}w_5\right)$$

$$\zeta = -\frac{7}{3} - \frac{3}{4}w_1 + \frac{11}{6}w_5$$

Πρόβλημα I - Παράδειγμα

- Κρατάμε τους περιορισμούς του λεξικού

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & & & & & - & x_0 \\
\hline
x_2 & = & 2/3 & & & + & 1/3 w_5 & - & 1/3 x_0 \\
w_2 & = & 4/3 & + & 1/2 w_1 & - & 1/3 w_5 & + & 5/6 x_0 \\
w_3 & = & 11/3 & - & 3/4 w_1 & - & 1/6 w_5 & + & 23/12 x_0 \\
w_4 & = & 2/3 & + & 1/4 w_1 & - & 7/6 w_5 & + & 23/12 x_0 \\
x_1 & = & 5/3 & + & 1/4 w_1 & - & 1/6 w_5 & - & 1/12 x_0
\end{array}
$$

  παραλείποντας την x_0.
- Υπολογίζουμε την αντικειμενική συνάρτηση του αρχικού συναρτήσει των μη βασικών μεταβλητών του λεξικού:

$$
\begin{aligned}
\zeta &= -3x_1 + 4x_2 \\
&= -3(5/3 + 1/4 w_1 - 1/6 w_5) + 4(2/3 + 1/3 w_5) \\
&= -7/3 - 3/4 w_1 + 11/6 w_5.
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα I - Παράδειγμα

- Για τη φάση II ξεκινάμε από το λεξικό

Δεν είναι βέλτιστο
Η w_5 μπαίνει στη βάση
Η w_4 βγαίνει από τη βάση

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & -7/3 & - & 3/4w_1 & + & 11/6w_5 \\
\hline
x_2 & = & 2/3 & & & + & 1/3w_5 \\
w_2 & = & 4/3 & + & 1/2w_1 & - & 1/3w_5 \\
w_3 & = & 11/3 & - & 3/4w_1 & - & 1/6w_5 \\
w_4 & = & 2/3 & + & 1/4w_1 & - & 7/6w_5 \\
x_1 & = & 5/3 & + & 1/4w_1 & - & 1/6w_5
\end{array}
$$

μηδ. για $w_5=4$
μηδ για $w_5=22$
μηδ για $w_5=\frac{4}{7}$
μηδ. για $w_5=10$

- και πάμε στο

Είναι βέλτιστο.
Η βέλτιστη λύση είναι
$(x_1,x_2,w_1,w_2,w_3,w_4,w_5)$
$(11/7, 6/7, 0, 8/7, 25/7, 0, 4/7)$
με $\zeta = -9/7$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & -9/7 & - & 5/14w_1 & - & 11/7w_4 \\
\hline
x_2 & = & 6/7 & + & 1/14w_1 & - & 2/7w_4 \\
w_2 & = & 8/7 & + & 3/7w_1 & + & 2/7w_4 \\
w_3 & = & 25/7 & - & 11/14w_1 & + & 1/7w_4 \\
w_5 & = & 4/7 & + & 3/14w_1 & - & 6/7w_4 \\
x_1 & = & 11/7 & + & 3/14w_1 & + & 1/7w_4
\end{array}
$$

Πρόβλημα I - Παράδειγμα

- Το τελευταίο λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & -9/7 & - & 5/14w_1 & - & 11/7w_4 \\
\hline
x_2 & = & 6/7 & + & 1/14w_1 & - & 2/7w_4 \\
w_2 & = & 8/7 & + & 3/7w_1 & + & 2/7w_4 \\
w_3 & = & 25/7 & - & 11/14w_1 & + & 1/7w_4 \\
w_5 & = & 4/7 & + & 3/14w_1 & - & 6/7w_4 \\
x_1 & = & 11/7 & + & 3/14w_1 & + & 1/7w_4
\end{array}
$$

είναι βέλτιστο και δίνει την βέλτιστη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (11/7, 6/7, 0, 8/7, 25/7, 0, 4/7)$.

Πρόβλημα II: Πολλές επιλογές για εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή

- Αν υπάρχουν μη-βασικές μεταβλητές των οποίων οι συντελεστές στην ζ είναι θετικοί, διαλέγουμε μία για να μπει στη βάση.
- Ποια να διαλέξουμε;
- Υπάρχουν διάφοροι κανόνες επιλογής εισερχόμενης στη βάση μεταβλητής.

Πρόβλημα ΙΙ - Κανόνες επιλογής για την εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή

- Ο κανόνας του μέγιστου συντελεστή.
  Επίλεξε τη μη-βασική μεταβλητή με το μεγαλύτερο συντελεστή στην ζ.
- Ο κανόνας του τυχαίου θετικού συντελεστή.
  Επίλεξε στην τύχη μια μη-βασική μεταβλητή από αυτές που έχουν θετικό συντελεστή στην ζ.
- Ο κανόνας του πρώτου θετικού συντελεστή.
  Επίλεξε τη μη-βασική μεταβλητή που αντιστοιχεί στον πρώτο θετικό συντελεστή που συναντάται στη ζ.
- Ο κανόνας του μικρότερου δείκτη (Bland).
  Επίλεξε τη μεταβλητή με το μικρότερο δείκτη.
- Ο κανόνας της μέγιστης άμεσης αύξησης.
  Επίλεξε τη μεταβλητή που αυξάνει περισσότερο την ζ.

$J = 5 + 3x_1 \boxed{+ 4x_2}$

$\boxed{w_1} = 8 - 2x_1 - 4x_2 \searrow$ μηδ. για $x_2 = 2$

$w_2 = 6 - 2x_1 + x_2 \nearrow$

$w_3 = 9 + x_1 - 3x_2 \searrow$ μηδ. για $x_2 = \frac{9}{3} = 3$

- Σύμφωνα με τον κανόνα του μέγιστου συντελεστή,

  Θα μπει στη βάση η x_2

  Θα βγει από τη βάση η w_1

- Σύμφωνα με τον κανόνα του τυχαίου θετικού συντελεστή,

  είτε θα μπει η x_2 και θα βγει η w_1

  είτε θα μπει η x_1 και θα βγει η w_2

- Σύμφωνα με τον κανόνα του πρώτου θετικού συντελεστή

  Θα μπει η x_1, θα βγει η w_2.

- Σύμφωνα με τον κανόνα Bland

  Θα μπει η x_1, θα βγει η w_2

$J = 5 \boxed{+ 3x_1} + 4x_2$

$w_1 = 8 - 2x_1 - 4x_2 \searrow$ μηδ για $x_1 = 4$

$\boxed{w_2} = 6 - 2x_1 + x_2 \searrow$ μηδ. για $x_1 = 3$

$w_3 = 9 + x_1 - 3x_2 \nearrow$

- Σύμφωνα με τον κανόνα της μέγιστης άμεσης αύξησης;

  Αν μπει στη βάση η x_2, η α.σ. θα αυξηθεί κατά $4 \cdot 2 = 8$

  Αν μπει στη βάση η x_1, η α.σ. θα αυξηθεί κατά $3 \cdot 3 = 9$

  Θα μπει στη βάση η x_1, θα βγει η w_2

Πρόβλημα ΙΙΙ: Απουσία επιλογής για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή

- Από τις βασικές μεταβλητές που μειώνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται διαλέγουμε την πρώτη που θα μηδενιστεί για να βγει από τη βάση.
- Αν δεν υπάρχει τέτοια μεταβλητή, δηλαδή όλες οι βασικές μεταβλητές αυξάνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται τότε το π.γ.π. είναι μη φραγμένο.
- Η ζ μπορεί να πάρει οσοδήποτε μεγάλες τιμές, οπότε δεν υπάρχει βέλτιστη λύση.

Πρόβλημα ΙΙΙ - Παράδειγμα

- Έστω ότι εμφανίζεται το λεξικό

Δεν είναι βέλτιστο

Η x_1 μπαίνει στη βάση

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & \boxed{+} & \boxed{2x_1} & - & x_2 & + & x_3 \\
\hline
w_1 & = & 4 & + & 5x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 \\
w_2 & = & 10 & + & x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 \\
w_3 & = & 7 & & & + & 4x_2 & - & 3x_3 \\
w_4 & = & 6 & + & 2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 \\
w_5 & = & 6 & + & 3x_1 & & & + & 3x_3
\end{array}
$$

- Οι x_1 και x_3 μπορούν να γίνουν βασικές.
- Ας διαλέξουμε την x_1.
- Όσο αυξάνει η x_1 καμιά βασική μεταβλητή δεν μειώνεται και η αντικειμενική συνάρτηση αυξάνει.
- Το π.γ.π. είναι μη-φραγμένο.

Πρόβλημα IV: Πολλές επιλογές για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή

- Από τις βασικές μεταβλητές που μειώνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται διαλέγουμε την πρώτη που θα μηδενιστεί για να βγει από τη βάση.
- Αν υπάρχουν δυο μεταβλητές που μηδενίζονται ταυτόχρονα, ποια να διαλέξουμε; → Οποιαδήποτε
- Στο επόμενο λεξικό θα εμφανιστεί κάποια βασική μεταβλητή με τιμή 0.
- Μια β.ε.λ. στην οποία κάποια βασική μεταβλητή έχει τιμή 0 λέγεται εκφυλισμένη.

$\zeta = 5 \boxed{+2x_1} - 7x_2$

$\boxed{w_1} = 10 - 5x_1 + 3x_2$ → μηδ για $x_1 = \frac{10}{5} = 2$

$w_2 = 2 - 1x_1 - 3x_2$ → μηδ για $x_1 = \frac{2}{1} = 2$

Επόμενο λεξικό

$\zeta = \quad w_1 \quad x_2$

$x_1 =$

$w_2 = 0$

Πρόβλημα V: Η αντικειμενική συνάρτηση δεν βελτιώνεται στο επόμενο λεξικό

- Μετασχηματίζουμε το λεξικό ώστε η αντικειμενική συνάρτηση και οι βασικές μεταβλητές να εκφράζονται συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών.
- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη νέα β.ε.λ. θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από την προηγούμενη β.ε.λ.
- Αν κάποια βασική μεταβλητή έχει τιμή 0 και επιλεγεί να βγει από τη βάση τότε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη νέα β.ε.λ. θα είναι ίση με την προηγούμενη β.ε.λ.
- Υπάρχει έτσι η περίπτωση η Simplex να κολλήσει και να κάνει κύκλους ανάμεσα σε ορισμένες β.ε.λ. χωρίς να βελτιώνεται η ζ.
- Υπάρχει τρόπος να αποφύγουμε τους κύκλους.

Προβλήματα IV και V - Παράδειγμα

- Θεωρούμε το π.γ.π. σε τυπική μορφή

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

με αρχικό λεξικό

Δεν είναι βέλτιστο.

Η x_2 μπαίνει στη βάση $(3>0)$

Η w_3 βγαίνει από τη βάση.

$$
\begin{array}{rclcrl}
\zeta & = & 0 & + & 2x_1 & \boxed{+\ 3x_2} \\
\hline
w_1 & = & 2 & - & x_1 & -\ 2x_2 \\
w_2 & = & 1 & - & x_1 & +\ x_2 \\
\boxed{w_3} & = & 1 & + & x_1 & -1\,x_2
\end{array}
$$

μηδ. για $x_2 = \frac{2}{2} = 1$

μηδ. για $x_2 = \frac{1}{1} = 1$

Προβλήματα IV και V - Παράδειγμα

- Από το αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 2x_1 & + & 3x_2 \\ \hline w_1 & = & 2 & - & x_1 & - & 2x_2 \\ w_2 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \end{array}$$

πάμε στο

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 3 & + & 5x_1 & - & 3w_3 \\ \hline w_1 & = & 0 & - & 3x_1 & + & 2w_3 \\ w_2 & = & 2 & & & - & w_3 \\ x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & w_3 \end{array}$$

Η β.ε.λ. που αντιστοιχεί στο λεξικό αυτό είναι $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 1, 0, 2, 0)$

- Στο 1ο λεξικό, καθώς αυξάνουμε την x_2, οι w_1, w_3 γίνονται ταυτόχρονα 0.
- Υπάρχει επιλογή για την εξερχόμενη μεταβλητή.
- Στο επόμενο λεξικό υπάρχει βασική με τιμή 0. Έχουμε εκφυλισμένη β.ε.λ.

Προβλήματα IV και V - Παράδειγμα

- Από το 2ο λεξικό

Δεν είναι βέλτιστο
Η x_1 μπαίνει στη βάση.
Η w_1 βγαίνει από τη βάση

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 3 & + & 5x_1 & - & 3w_3 \\
\hline
\boxed{w_1} & = & 0 & - & 3x_1 & + & 2w_3 \\
w_2 & = & 2 & & & - & w_3 \\
x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & w_3
\end{array}
$$

πάμε στο

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 3 & - & 5/3w_1 & + & 1/3w_3 \\
\hline
x_1 & = & 0 & - & 1/3w_1 & + & 2/3w_3 \\
w_2 & = & 2 & & & - & w_3 \\
x_2 & = & 1 & - & 1/3w_1 & - & 1/3w_3
\end{array}
$$

- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν άλλαξε.
- Η β.ε.λ. δεν άλλαξε.
- Άλλαξε η βάση (ποιές μεταβλητές είναι βασικές).

Προβλήματα IV και V - Παράδειγμα

- Από το 3ο λεξικό

Δεν είναι βέλτιστο
Η w_3 μπαίνει στη βάση
Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

$$
\begin{array}{rclllll}
\zeta & = & 3 & - & 5/3w_1 & + & \boxed{1/3w_3} \\
\hline
x_1 & = & 0 & - & 1/3w_1 & + & 2/3w_3 \\
\boxed{w_2} & = & 2 & & & - & 1\,w_3 \\
x_2 & = & 1 & - & 1/3w_1 & - & 1/3w_3
\end{array}
$$

μηδ. για $w_3 = \frac{2}{1} = 2$

μηδ. για $w_3 = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

πάμε στο

βέλτιστο

$$
\begin{array}{rclllll}
\zeta & = & 11/3 & - & 5/3w_1 & - & 1/3w_2 \\
\hline
x_1 & = & 4/3 & - & 1/3w_1 & - & 2/3w_2 \\
w_3 & = & 2 & & & - & w_2 \\
x_2 & = & 1/3 & - & 1/3w_1 & + & 1/3w_2
\end{array}
$$

- Το τελευταίο λεξικό δίνει άριστη λύση.

Εκφυλισμένα λεξικά - Εκφυλισμένες β.ε.λ.

- Ένα λεξικό λέγεται εκφυλισμένο αν μια βασική μεταβλητή του έχει την τιμή 0. Π.χ.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 6 & + & w_3 & + & 5x_2 & + & 4w_1 \\
\hline
x_3 & = & 1 & - & 2w_3 & - & 2x_2 & + & 3w_1 \\
w_2 & = & 4 & + & w_3 & + & x_2 & - & 3w_1 \\
x_1 & = & 3 & - & 2w_3 & & & & \\
w_4 & = & 2 & + & w_3 & & & - & w_1 \\
w_5 & = & 0 & & & - & x_2 & + & w_1
\end{array}
$$

- Ένα βήμα της Simplex (οδήγηση) λέγεται εκφυλισμένο αν δεν αλλάζει την αντικειμενική συνάρτηση. Π.χ.
  - x_2 μπαίνει, w_5 βγαίνει $\rightarrow$ εκφυλισμένο βήμα.
  - w_1 μπαίνει, w_2 βγαίνει $\rightarrow$ μη-εκφυλισμένο βήμα.

Εκφυλισμένο λεξικό $\not\Rightarrow$ εκφυλισμένο βήμα

Κυκλικότητα

- Ένας κύκλος είναι μια ακολουθία λεξικών Simplex που καταλήγουν στο ίδιο λεξικό από το οποίο ξεκίνησαν.
- Κάθε λεξικό σε έναν κύκλο είναι εκφυλισμένο.
- Όλα τα ενδιάμεσα λεξικά δίνουν στην αντικειμενική συνάρτηση την ίδια τιμή.

Κυκλικότητα

- Όταν η Simplex πέσει σε εκφυλισμένο λεξικό υπάρχει η περίπτωση να "παγιδευθεί" σε κύκλο και να μη φθάσει σε βέλτιστη λύση.
- Ερώτημα: Υπάρχει τρόπος να αποφευχθεί αυτό;
- Ερώτημα: Υπάρχει κάποιος κανόνας οδήγησης (επιλογή εισερχόμενης και εξερχόμενης μεταβλητής) ώστε να αποφευχθεί η κυκλικότητα;

Κανόνες οδήγησης και κυκλικότητα

- Ο συνήθης κανόνας οδήγησης του μέγιστου συντελεστή (επίλεξε τη μη-βασική μεταβλητή με το μεγαλύτερο συντελεστή στην ζ) μπορεί να οδηγήσει σε κυκλικότητα.
- Έχει κατασκευαστεί τέτοιο παράδειγμα.
- Ο απλός κανόνας οδήγησης του Bland (επίλεξε τη μη-βασική μεταβλητή με το μικρότερο δείκτη να μπει και τη βασική μεταβλητή με το μικρότερο δείκτη για να βγει) δεν οδηγεί ποτέ σε κυκλικότητα.
  Για την εφαρμογή του κανόνα αυτού ονομάζουμε τις περιθώριες μεταβλητές με το ίδιο γράμμα με τις αρχικές και αριθμούμε τους δείκτες τους μετά τους δείκτες των αρχικών μεταβλητών.

Συχνότητα της κυκλικότητας

- Ακόμα και με το συνήθη κανόνα οδήγησης του μέγιστου συντελεστή η κυκλικότητα είναι σπάνια για μικρά προβλήματα.
- Ένα πρόγραμμα που παράγει τυχαία 2×4 εκφυλισμένα λεξικά δεν κατέληξε σε κυκλικότητα σε 1 δισεκατομύριο παραδείγματα.
- Για μεγάλα προβλήματα με πολλά 0, η κυκλικότητα μπορεί να προκύψει κατά φυσικό τρόπο.

Αποφυγή κυκλικότητας - Μέθοδος διαταραχής

- Ένας άλλος τρόπος αποφυγής της κυκλικότητας είναι η διαταραχή των τιμών των βασικών μεταβλητών που είναι 0, κατά ϵ.
- Αυτό γίνεται κάθε φορά που εμφανίζονται σε ένα λεξικό.
- Αν υπάρχουν πολλές βασικές μεταβλητές που είναι 0, τις διαταράσσουμε όλες σε διαφορετικές κλίμακες, δηλαδή εισάγουμε $\epsilon_1, \epsilon_2 \ldots, \epsilon_k$ και εφαρμόζουμε τη Simplex, υποθέτοντας ότι

$$\boxed{\text{Άλλες τιμές} >> \epsilon_1 >> \epsilon_2 >> \cdots >> \epsilon_k > 0.}$$

$5 > \epsilon_1$ $\qquad$ $\epsilon_1 > \epsilon_2$

$0\,5 > 1000\epsilon_1$ $\qquad$ $\epsilon_1 > 1000\epsilon_2$

$\frac{\epsilon_1}{1000} > \epsilon_2$

Μέθοδος διαταραχής - Παράδειγμα

- Θεωρούμε το π.γ.π. σε τυπική μορφή

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 2x_1 & + & 4x_2 & & \\ \text{υπό} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & -3x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & 4x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

με αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 2x_1 & + & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 0 & + & x_1 & - & x_2 \\ w_2 & = & 0 & + & 3x_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & 0 & - & 4x_1 & + & x_2 \end{array}$$

- Οι βασικές μεταβλητές w_1, w_2, w_3 είναι 0 και τις αντικαθιστούμε με $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ με $\epsilon_1 >> \epsilon_2 >> \epsilon_3 > 0$.

Μέθοδος διαταραχής - Παράδειγμα

- Από το αρχικό λεξικό

Οχι βέλτιστο β.ε.λ.
Η αντίστοιχη
$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3)$
$(0, 0, 0, 0, 0)$
$\zeta = 0$

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 2x_1 & + & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & 0 & + & x_1 & - & x_2 \\
w_2 & = & 0 & + & 3x_1 & - & x_2 \\
w_3 & = & 0 & - & 4x_1 & + & x_2
\end{array}
$$

πάμε στο αρχικό διαταραγμένο λεξικό

$$
\begin{array}{rclcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 2x_1 & + & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & 0 + \epsilon_1 & + & x_1 & - & x_2 \\
w_2 & = & 0 + \epsilon_2 & + & 3x_1 & - & x_2 \\
w_3 & = & \underbrace{0 + \epsilon_3}_{\text{σταθεροί όροι}} & - & 4x_1 & + & x_2
\end{array}
$$

Τα $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ είναι σταθερές, όχι μη-βασικές μεταβλητές

Μέθοδος διαταραχής - Παράδειγμα

- Από το λεξικό

Όχι βέλτιστο λεξικό. Η x_2 μπαίνει στη βάση. Η w_2 βγαίνει από τη βάση.

$$
\begin{array}{rclllllll}
\zeta & = & 0 & & & & + & 2x_1 & + \; 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & 0 & + \; \epsilon_1 & & & + & x_1 & - \; x_2 \\
\boxed{w_2} & = & 0 & & + \; \epsilon_2 & & + & 3x_1 & - \; 1 \, x_2 \\
w_3 & = & 0 & & & + \; \epsilon_3 & - & 4x_1 & + \; x_2
\end{array}
$$

τιμής για $x_2 = \frac{\epsilon_1}{1}$

τιμής για $x_2 = \frac{\epsilon_2}{1}$

διαλέγουμε εισερχ. x_2, εξερχόμενη w_2 και πάμε στο λεξικό

Δεν είναι βέλτιστο. Η x_1 μπαίνει στη βάση. Η w_3 μπαίνει στη βάση

$$
\begin{array}{rclllllll}
\zeta & = & 0 & & + \; 4\epsilon_2 & & + & 14x_1 & - \; 4w_2 \\
\hline
w_1 & = & 0 & + \; \epsilon_1 & - \; \epsilon_2 & & - & 2x_1 & + \; w_2 \\
x_2 & = & 0 & & + \; \epsilon_2 & & + & 3x_1 & - \; w_2 \\
\boxed{w_3} & = & 0 & & + \; \epsilon_2 & + \; \epsilon_3 & - & 1 \, x_1 & - \; w_2
\end{array}
$$

τιμής για $x_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2}$

τιμής για $x_1 = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_3}{1}$

Μέθοδος διαταραχής - Παράδειγμα

- Από το λεξικό

$$
\begin{array}{rcl}
\zeta & = & 0 + 4\epsilon_2 + \boxed{14x_1} - 4w_2 \\
\hline
w_1 & = & 0 + \epsilon_1 - \epsilon_2 - 2x_1 + w_2 \\
x_2 & = & 0 + \epsilon_2 + 3x_1 - w_2 \\
\boxed{w_3} & = & 0 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - x_1 - w_2
\end{array}
$$

διαλέγουμε εισερχ. x_1, εξερχόμενη w_3 και πάμε στο λεξικό

$$
\begin{array}{rcl}
\zeta & = & 0 + 18\epsilon_2 + 14\epsilon_3 - 14w_3 - 18w_2 \\
\hline
w_1 & = & 0 + \epsilon_1 - 3\epsilon_2 - 2\epsilon_3 + 2w_3 + 3w_2 \\
x_2 & = & 0 + 4\epsilon_2 + 3\epsilon_3 - 3w_3 - 4w_2 \\
x_1 & = & 0 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - w_3 - w_2
\end{array}
$$

Είναι βέλτιστο β βέλτιστη λύση: $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\zeta = 0$

- Εδώ όλοι οι συντελεστές των μη-βασικών μεταβλητών στην ζ είναι ≤ 0. Έχουμε βρει άριστη β.ε.λ.

Μέθοδος διαταραχής - Παράδειγμα

- Οι $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ αντιμετωπίζονται ως παράμετροι, όχι ως μεταβλητές (ούτε μπαίνουν στη βάση, ούτε βγαίνουν).
- Η αντικειμενική συνάρτηση βελτιώνεται σε κάθε βήμα: $0 \to 4\epsilon_2 \to 18\epsilon_2 + 14\epsilon_3$.
- Το ποιά μεταβλητή θα μπει στη βάση καθορίζεται από τον κανόνα του μέγιστου συντελεστή.
- Το ποιά μεταβλητή θα βγει από τη βάση καθορίζεται μονοσήμαντα, λαμβάνοντας υπόψη τη διαφορά τάξης μεγέθους των $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

Τερματισμός της Simplex και κυκλικότητα

Θεώρημα

Η μέθοδος Simplex είτε τερματίζεται σε πεπερασμένο αριθμό λεξικών καταλήγοντας

- *σε διαπίστωση κενής εφικτής περιοχής ή*
- *σε βέλτιστη β.ε.λ. ή*
- *σε διαπίστωση μη-φραγμένης αντικειμενικής συνάρτησης*

είτε

- *καταλήγει σε κυκλικότητα.*

Τερματισμός της Simplex και κυκλικότητα

- Δεν υπάρχει αρχική β.ε.λ. → Φάση I της Simplex.
  Τέλος φάσης I → αρχική β.ε.λ. ή κενή εφικτή περιοχή.
- Αρχική β.ε.λ. → Φάση II της Simplex.
- Αν δεν έχουμε εκφυλισμένες β.ε.λ., σε κάθε λεξικό της φάσης II η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης βελτιώνεται ή αποκαλύπτεται ότι το π.γ.π. είναι μη φραγμένο.
- Πεπερασμένος αριθμός δυνατών λεξικών → Εύρεση βέλτιστης β.ε.λ. σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων, αν δεν έχουμε κυκλικότητα.

Αποφυγή της κυκλικότητας

Θεώρημα

Η μέθοδος Simplex σε συνδυασμό με τη μέθοδο της διαταραχής που επιλέγει ποιά μεταβλητή θα βγει από τη βάση με τον λεξικογραφικό κανόνα οδήγησης αποφεύγει την κυκλικότητα.

Θεώρημα

Η μέθοδος Simplex με τον κανόνα του Bland του μικρότετου δείκτη για την επιλογή εισερχόμενων και εξερχόμενων μεταβλητών αποφεύγει την κυκλικότητα.

Θεμελιώδες Θεώρ. Γραμμικού Προγραμματισμού

Θεώρημα

Για ένα π.γ.π. σε τυπική μορφή ισχύουν τα ακόλουθα:

- *Μη-κενή εφικτή περιοχή ⇒ Ύπαρξη β.ε.λ.*
- *Ανυπαρξία βέλτιστης β.ε.λ. ⇒ Κενή εφικτή περιοχή ή μη-φραγμένο π.γ.π.*
- *Ύπαρξη βέλτιστης εφικτής λύσης ⇒ Ύπαρξη βέλτιστης β.ε.λ.*

- Φάση I → Βρίσκει β.ε.λ. αν η εφικτή περιοχή δεν είναι κενή.
- Φάση II → Βρίσκει βέλτιστη β.ε.λ. ή διαπιστώνει ότι το π.γ.π. είναι μη-φραγμένο.
- Ύπαρξη βέλτιστης εφικτής λύσης → μη-κενή εφικτή περιοχή, φραγμένο π.γ.π. → Ύπαρξη βέλτιστης β.ε.λ.