Πρόβλημα ελέγχου αποθεμάτων

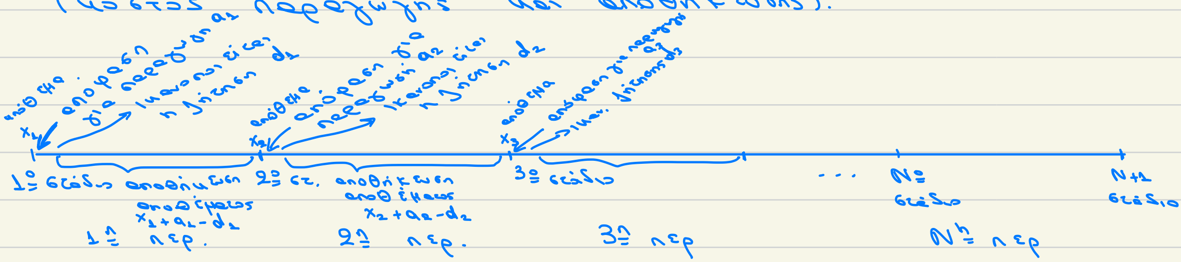
Εταιρεία παράγει ένα προϊόν και πρόκειται να λειτουργήσει τις επόμενες N χρονικές περιόδους.

Στην αρχή κάθε περιόδου η εταιρεία αποφασίζει την ποσότητα προϊόντος που θα παράξει για να καλύψει τη ζήτηση της περιόδου ή να χρησιμοποιηθεί σαν απόθεμα για επόμενες περιόδους.

Μετά την παραγωγή των προϊόντων ικανοποιείται η ζήτηση η οποία θεωρείται γνωστή.

Το απόθεμα αποθηκεύεται για μελλοντική χρήση.

Θέλουμε να βρούμε τον βέλτιστο προγραμματισμό παραγωγής (# μονάδων που θα παραχθούν σε κάθε περίοδο) ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος (κόστος παραγωγής και αποθήκευσης).



Δεδομένα:

N = μήκος χρονικού ορίζοντα = # περιόδων

d_t = ζήτηση για την περίοδο t, $t=1,\dots,N$.

m = μέγιστη δυνατή παραγωγή σε ένα στάδιο

M = χωρητικότητα αποθήκης

$k_t(a)$ = κόστος για παραγωγή a μονάδων την περίοδο t, $t=1,2,\dots,N$.

h_t = κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος την περίοδο t, $t=1,2,\dots,N$.

x_1 = απόθεμα στην αρχή του χρονικού ορίζοντα.

Διατύπωση ως π.δ.π

□ **Στάδια:** Στην αρχή κάθε περιόδου αποφασίζουμε πόσες μονάδες προϊόντος θα φτιάξουμε

$t = 1, 2, \dots, N$, $(N+1)$ → τερματικό στάδιο

N = χρονικός ορίζοντας

□ **Κατάσταση:** x_t = απόθεμα στην αρχή της περιόδου t (πριν γίνει παραγωγή)

□ **Αποφάσεις:** a_t = ποσότητα προϊόντος που θα παραχθεί στο στάδιο t (περίοδος t)

Δέσμη δυνατών αποφάσεων

$D_t(x_t)$

$0 \le a_t \le m$ ← δυναμικότητα παραγωγής

$x_t + a_t \ge d_t$ ← ικανοποίηση ζήτησης

$\Leftrightarrow a_t \ge d_t - x_t$

$x_t + a_t - d_t \le M$ ← χωρητικότητα αποθήκης

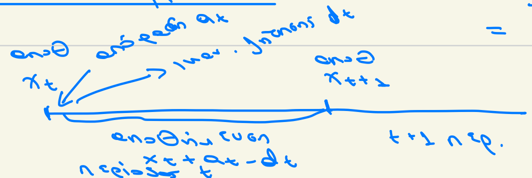
$\Leftrightarrow a_t \le M - x_t + d_t$

$$\max\{0, d_t - x_t\} \le a_t \le \min\{m, M - x_t + d_t\}$$

Άρα, $D_t(x_t) = \{ a_t \in \mathbb{N} : \max\{0, d_t - x_t\} \le a_t \le \min\{m, M - x_t + d_t\} \}$

□ **Δυναμική συστήματος:** $x_{t+1} = g_t(x_t, a_t)$

$$= x_t + a_t - d_t$$



□ <u>άμεσο κόστος</u> : $C_t(x_t,a_t) = \underbrace{K_t(a_t)}_{\text{κόστος παραγωγής}} + \underbrace{h_t\cdot(x_t+a_t-d_t)}_{\text{κόστος αποθήκευσης}}$

□ <u>τερματικό κόστος</u>: $\hat{c}(x_{N+1}) = 0$

□ <u>Εξισώσεις βελτιστοποίησης</u>:

$v(t,x_t)$: ελάχιστο κόστος από το στάδιο t μέχρι το τέλος αν στην αρχή του σταδίου t η κατάσταση ήταν x_t.

$$v(t,x_t) = \min_{a_t\in D_t(x_t)} \left\{ C_t(x_t,a_t) + v(t+1,\, g_t(x_t,a_t)) \right\}$$

$t = 1, 2, \dots, N$

με τερματικές συνθήκες
$v(N+1, x_{N+1}) = \hat{c}(x_{N+1}) = 0$.

Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα ελέγχου αποθεμάτων

$N = 3$

$d_t = 3 \quad , t = 1, 2, 3.$

$h_t = 1 \quad , t = 1, 2, 3.$

a_t	0	1	2	3	4
$k_t(a_t)$	0	5	9	13	14

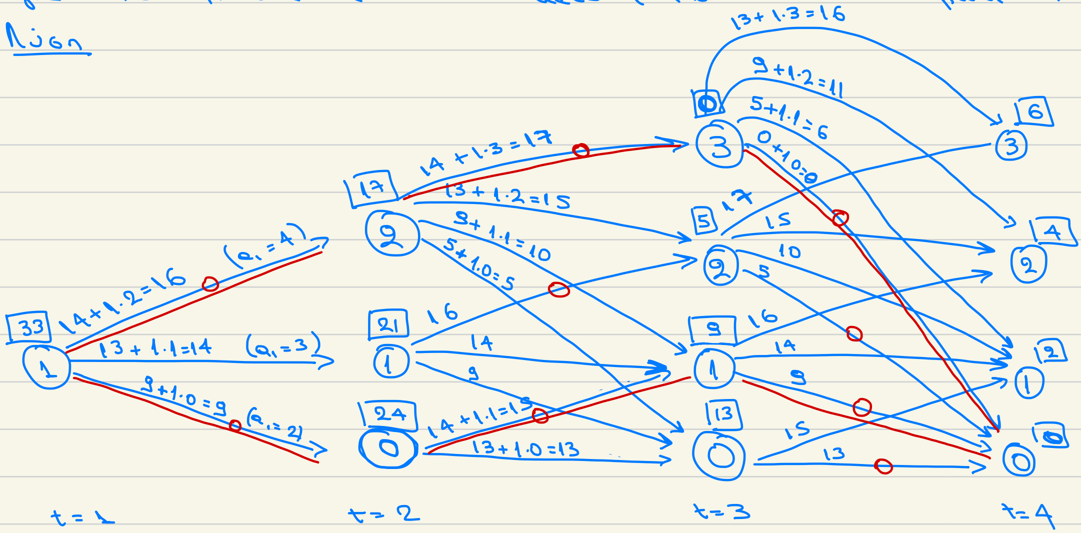
$m = 4$

$M = 3$

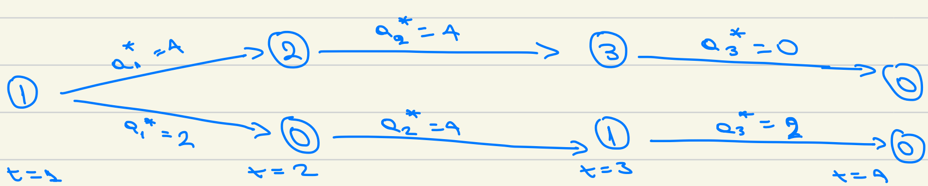
$x_1 = 1$

Στο τέλος του χρονικού ορίζοντα για κάθε μονάδα προϊόντος που μένει στην αποθήκη υπάρχει κόστος μετατροπής 2 χρηματικών μονάδων.

Λύση



Ελάχιστο κόστος = 33



Πρόβλημα κατανομής πόρων ή φόρτωσης φορτίου

Υπάρχουν b μονάδες κάποιου αγαθού (π.χ. κεφάλαιο χρημάτων, ώρες εργασίας, μονάδες πρώτης ύλης) οι οποίες πρέπει να κατανεμηθούν σε N δραστηριότητες.

Έστω:

a_t = ένταση της δραστηριότητας t, $t=1,2,\dots,N$

$n_t(a_t)$ = η ποσότητα του αγαθού που απαιτείται για να κάνουμε τη δραστηριότητα t με ένταση a_t, $t=1,2,\dots,N$

$R_t(a_t)$ = απόδοση δραστηριότητας t αν αυτή γίνει με ένταση a_t, $t=1,2,\dots,N$.

Να βρεθεί η κατανομή των b μονάδων αγαθού στις N δραστηριότητες ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική απόδοση.

Διατύπωση σαν π.δ.π

- Στάδια: Στο στάδιο t αποφασίζω την ένταση με την οποία θα κάνω τη δραστηριότητα t, $t=1,2,\dots,N$

  $t = 1, 2, \dots, N, N+1 \rightarrow$ τερματικό στάδιο

- Κατάσταση: x_t = διαθέσιμες μονάδες αγαθού στην αρχή του σταδίου t

  $x_1 = b$

□ <u>Αποφάσεις:</u> a_t = ένταση της δραστηριότητος t

$D_t(x_t)$: πρέπει $\eta_t(a_t) \le x_t$

$$D_t(x_t) = \{ a_t \ge 0 \ : \ \eta_t(a_t) \le x_t \}$$

□ <u>Δυναμική συστήματος:</u> $x_{t+1} = g_t(x_t, a_t) \Leftrightarrow$

$$x_{t+1} = x_t - \eta_t(a_t)$$

□ <u>Άμεσο κέρδος:</u> $c_t(x_t, a_t) = R_t(a_t)$

□ <u>Τερματικό κέρδος:</u> $\hat{c}(x_{N+1}) = 0$

<u>Εξισώσεις βελτιστοποίησης:</u>

$v(t, x_t)$: μέγιστο κέρδος από το στάδιο t μέχρι το τέλος αν στην αρχή του σταδίου t η κατάσταση ήταν x_t.

$$v(t, x_t) = \max_{a_t \in D_t(x_t)} \{ c_t(x_t, a_t) + v(t+1, g_t(x_t, a_t)) \} \quad t = 1, 2, \ldots, N$$

με τερματικές συνθήκες

$$v(N+1, x_{N+1}) = \hat{c}(x_{N+1}) = 0.$$

Εφαρμογή

Ένας οδηγός θέλει να φορτώσει το φορτηγό του με κουτιά 3 τύπων. Ο διαθέσιμος όγκος είναι 9 μονάδες. Η αξία ενός κουτιού τύπου t είναι w_t και ο όγκος είναι v_t, $t=1,2,3$.

τύπος t	v_t	w_t
1	3	7
2	6	15
3	4	12

Θέλουμε να βρούμε πόσα κουτιά από κάθε τύπο θα μπουν στο φορτηγό ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική αξία.

Λύση

Είναι πρόβλημα φόρτωσης φορτίου με

$b = 9$

$a_t = \#$ κουτιών τύπου t που θα φορτωθούν

$\Pi_t(a_t) = v_t \cdot a_t$

$R_t(a_t) = w_t \cdot a_t$

t	x_t	a_t	$C_t(x_t,a_t)$	x_{t+1}	$V(t,x_t)$	
1	9	0	0	9	$0+24=24$	*
		1	$1\cdot 7=7$	$9-3\cdot 1=6$	$7+15=22$	
		2	$2\cdot 7=14$	$9-2\cdot 3=3$	$14+0=14$	
		3	$3\cdot 7=21$	$9-3\cdot 3=0$	$21+0=21$	
2	9	0	0	9	$0+24=24$	*
		1	$1\cdot 15=15$	$9-1\cdot 6=3$	$15+0=15$	
	6	0	0	6	$0+12=12$	
		1	15	$6-1\cdot 6=0$	$15+0=15$	*
	3	0	0	3	$0+0=0$	*
	0	0	0	0	$0+0=0$	*
3	9	0	0	9	$0+0=0$	
		1	12	$9-4=5$	$12+0=12$	
		2	$2\cdot 12=24$	$9-24=1$	$24+0=24$	*
	6	0	0	6	$0+0=0$	
		1	12	$6-4=2$	$12+0=12$	*
	3	0	0	3	$0+0=0$	*
	0	0	0	0	$0+0=0$	*
4	9				0	
	6				0	
	5				0	
	3				0	
	2				0	
	1				0	
	0				0	

Μέγιστο κέρδος $=24$

$$9 \xrightarrow{a_1^*=0} 9 \xrightarrow{a_2^*=0} 9 \xrightarrow{a_3^*=2} 1$$

$t=1$ $t=2$ $t=3$ $t=4$