

(t) κατηγορία	# μαθημάτων				
	1	2	3	4	
1	95	50	60	80	
2	90	70	90	100	= $R(t, a_t)$
3	40	60	80	100	
4	10	20	30	40	

Ν β. ποσα μαθηματα πρεπει να επιλεξει απο καθε κατηγορια για να μεγιστοποιου το σκορ.

Λυση

Μοντελοποιου ως π.δ.π

1. Σταδια :  $t=1, 2, 3, 4, 5$   
↳ ζεπματικο

$$N=4$$

Στο σταδιο  $t$  αποφασιζω ποσα μαθηματα θα παρω απ' την κατηγορια  $t$ .

2. Κατασταση :  $x_t = \#$  μαθηματων που απομειναν στην αρχη του σταδιου  $t$ .

$$x_1 = 7$$

3. Αποφαση :  $a_t = \#$  μαθηματων που παρνω απ' την κατηγορια  $t$ .

$$D_t(x_t) = [1, \dots, x_t - (4-t)]$$

$$D_5(5) = \{1, 2, 3\}$$

↑ στην αρχη του σταδιου 2 απομειναν 5 μαθηματα / υποχρεωτικα στο σταδιο 3 και 4 πρεπει να παρω απο 1 μαθημα

4. Δυναμικό Σύστημα:  $x_{t+1} = g_t(x_t, a_t)$   
 $x_{t+1} = x_t - a_t$

n.x.  $x_3 = 3$  }  $x_4 = 3 - 2 = 1$   
 $a_3 = 2$

# μαθημάτων από τη κατηγορία t

5. Άμεσο Κέρδος:  $C_t(x_t, a_t) = R(t, a_t)$   
 ↓  
 κατηγορία

6. Τερματικό Κέρδος:  $\hat{C}(x_5) = 0$

Αν ερπενεί να παρη  $F$ :  $\hat{C}(x_5) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x_5 = 0 \\ -\infty & \text{αν } x_5 \neq 0 \end{cases}$   
 ακριβώς μαθήματα

7. Εξίσωση Bellman

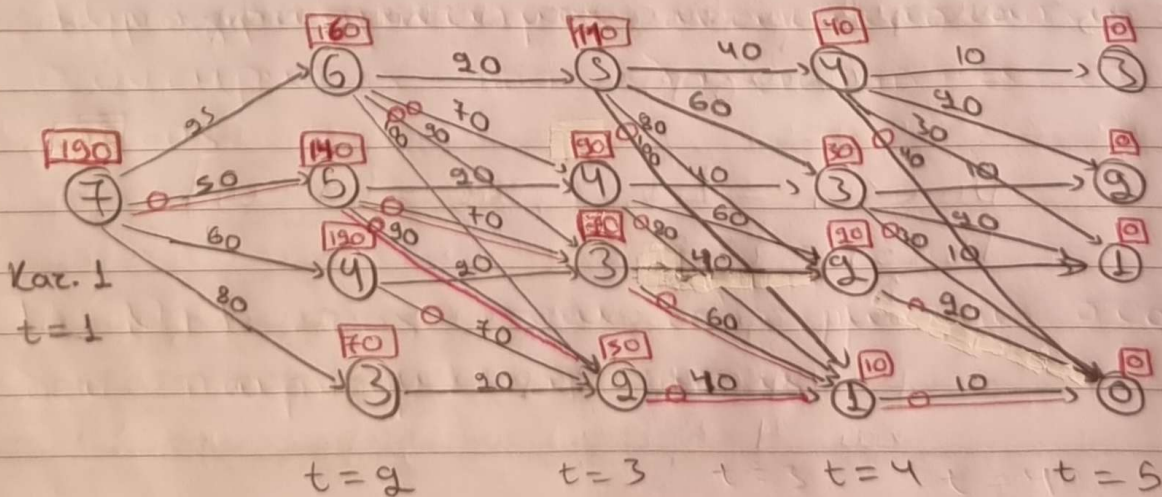
$v(t, x_t) =$  μέγιστο κέρδος από το στάδιο t μέχρι το τέλος αν στην αρχή του σταδίου t η κατάσταση είναι η  $x_t$

$$v(t, x_t) = \max_{a_t \in D_t(x_t)} \{ C_t(x_t, a_t) + v(t+1, g_t(x_t, a_t)) \}$$

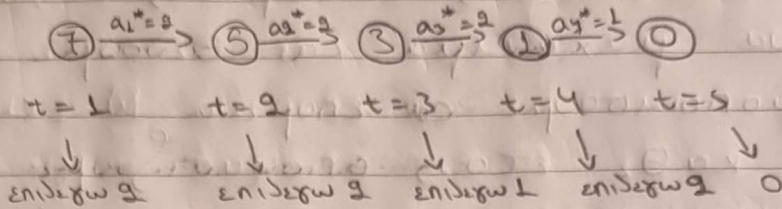
$t = 1, \dots, 4$

με τερματικό συνθήκη:

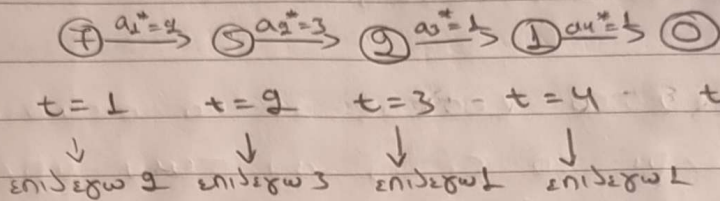
$$v(5, x_5) = \hat{C}(x_5) = 0$$



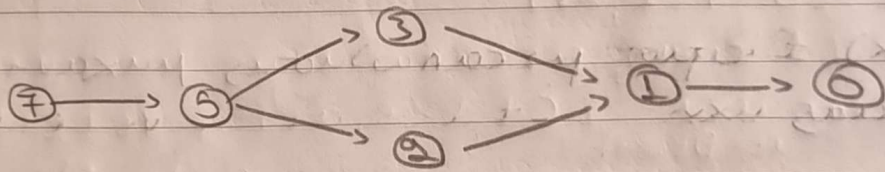
Apa:  $V(1, x_1) = 190$  με σύβληση ακολουθία  
 αποφασίων:



4



Apa



20/12/24 10<sup>ο</sup> Μαθημα

### Πρόβλημα Αντικατάστασης Συντηρήσιμου Μηχανήματος

Έχουμε ένα μηχάνημα και θέλουμε να το χρησιμοποιήσουμε τα επόμενα  $N$  έτη.

Στην αρχή καθ' έτος αποφασίζουμε αν θα το αντικαταστήσουμε με νέο ή θα το συντηρήσουμε.

### Δεδομένα:

1.  $C(x) =$  κόστος συντήρησης μηχανήματος που στην αρχή του έτους έχει ηλικία  $x$ .

2.  $K(x) =$  τιμή μεταπωλήσης μηχανήματος ηλικίας  $x$ .

3.  $T =$  τιμή αγοράς νέου μηχανήματος.

4.  $M =$  ανώτατο όριο ηλικίας.

### Ζητούμενα:

Προγραμματισμός αντικατάστασης ή συντήρησης που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

\* Το  $N+1$  έτος είναι το τερματικό στο οποίο δίνουμε αποφασίες.

Διακρίνω ως η.δ.η.

1. Στάδια: Στην αρχή καθορίζεται αν θα αντικαταστήσουμε ή θα συντηρήσουμε.

$$t = 1, 2, \dots, N, \underbrace{N+1}_{\text{τελευταίο}}$$

2. Κατάσταση:  $x_t$ : η ηλικία του μηχανήματος στο στάδιο  $t$ ,  $\delta_{it}$  = στην αρχή του έτους  $t$ .

3. Αποφασές:  $a_t = \begin{cases} 1 & \text{συντήρηση} \\ 2 & \text{αντικατάσταση} \end{cases}$

$$D_t(x_t) = \begin{cases} \{2\} & , x_t = M \\ \{1, 2\} & , x_t < M \end{cases}$$

↓  
Δομή δυνατών αποφασέων για το στάδιο  $t$  όταν η κατάσταση είναι  $x_t$ .

4. Δυναμική Σύστημα:

$$x_{t+1} = g_t(x_t, a_t)$$

$$\Rightarrow x_{t+1} = \begin{cases} x_t + 1 & , a_t = 1 \\ 1 & , a_t = 2 \end{cases}$$

5. Άμεσο κόστος:

$$c_t(x_t, a_t) = \begin{cases} c(x_t) & , a_t = 1 \\ T + c(0) - k(x_t) & , a_t = 2 \end{cases}$$

όπου  $c(0)$  = κόστος εγκατάστασης.

6. Τερματικό κόστος:

$$\hat{c}(x_{N+1}) = -K(x_{N+1})$$

↓  
Έχω κέρδος  $K(x_{N+1})$   
(αρα κόστος  $-K(x_{N+1})$ )

7. Εξίσωσης βελτιστοποίησης.

$v(t, x_t) =$  ελάχιστο κόστος από το στάδιο  $t$   
μέχρι το τέλος αν στην αρχή του  
σταδίου  $t$  η κατάσταση είναι  $x_t$

Θελούμε το  $v(1, x_1)$

$$v(t, x_t) = \min_{a_t \in D_t(x_t)} \{ c_t(x_t, a_t) + v_t(t+1, g_t(x_t, a_t)) \}$$

$t = 1, \dots, N.$

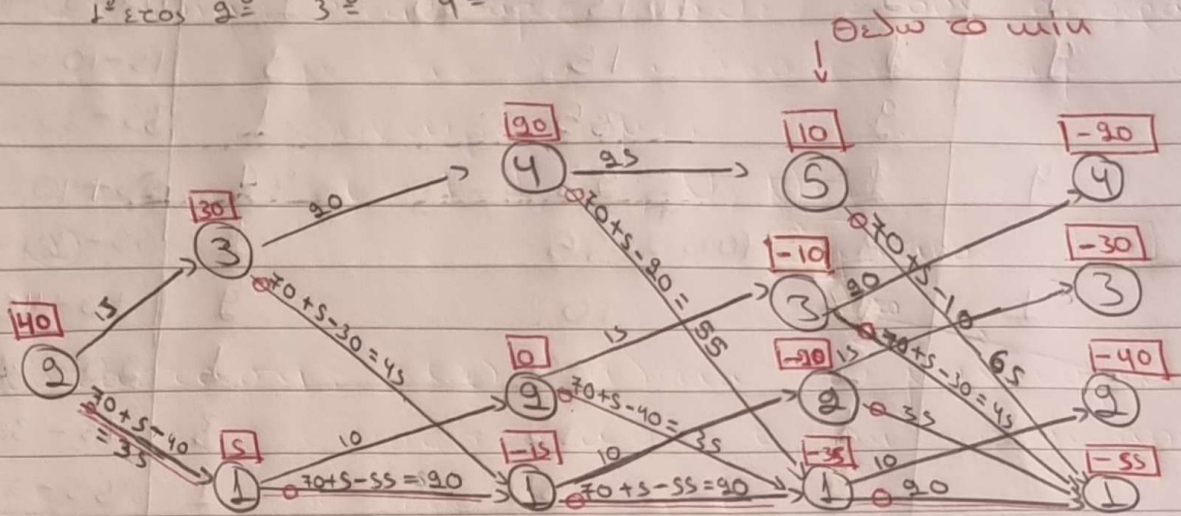
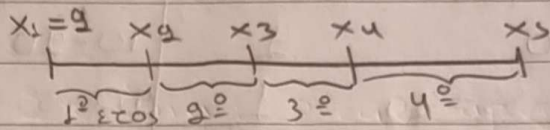
με τερματικές συνθήκες:

$$v(N+1, x_{N+1}) = \hat{c}(x_{N+1})$$

Εφαρμογή

Να βρεθεί βέλτιστη πολιτική αντικατάστασης / συντηρήσεως για το πρόβλημα με τα παρακάτω δεδομένα.

	Μέγιστη $x$	$c(x)$	$K(x)$
$N=4$	0	5	-
$M=5$	1	10	35
$x_1=2$	2	15	40
$T=70$	3	20	30
	4	25	20
	5	-	10

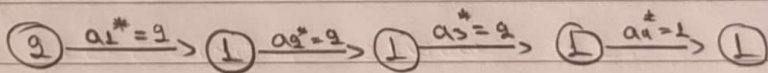


$t=1$     $t=2$     $t=3$     $t=4$     $t=5$

Αρα

$V(1, x_1) = 40$  κόστος αντικατάστασης / συντηρήσιμος

Ακολουθία αποφάσεων:



$t=1$     $t=2$     $t=3$     $t=4$     $t=5$

Επίλυση με Πίνακα

$t$	$x_t$	$a_t$	$C_t(x_t, a_t)$	$x_{t+1}$	$V(t, x_t)$
1	9	1	15	3	$15 + 30 = 45$
		2	$70 + 5 - 40 = 35$	1	$35 + 5 = 40$
2	1	1	10	2	$10 + 0 = 10$
		2	$70 + 5 - 55 = 20$	1	$20 - 15 = 5$
3	3	1	20	4	$20 + 20 = 40$
		2	$70 + 5 - 30 = 45$	1	$45 - 15 = 30$

t	$x_t$	$a_t$	$C_t(x_t, a_t)$	$x_{t+1}$	$V(t, x_t)$
3	1	1	10	2	$10 - 20 = -10$
	1	2	$70 + 5 - 55 = 20$	1	$20 - 35 = -15$
	2	1	15	3	$15 - 10 = -5$
	2	2	35	1	$35 - 35 = 0$
	4	1	25	5	$25 + 10 = 35$
4	1	1	10	2	$10 - 40 = -30$
	1	2	20	1	$20 - 35 = -15$
	2	1	15	3	$15 - 30 = -15$
	2	2	35	1	$35 - 55 = -20$
	3	1	20	4	$20 + 20 = 0$
5	1	1	10	2	$10 - 40 = -30$
	1	2	20	1	$20 - 35 = -15$
	2	1	15	3	$15 - 30 = -15$
	2	2	35	1	$35 - 55 = -20$
	3	1	20	4	$20 + 20 = 0$
6	1	1	10	2	$10 - 40 = -30$
	1	2	20	1	$20 - 35 = -15$
	2	1	15	3	$15 - 30 = -15$
	2	2	35	1	$35 - 55 = -20$
	3	1	20	4	$20 + 20 = 0$

Ελάχιστο κόστος : 40

