19/12/2023

1. Πρόβλημα αντικατάστασης - συντήρησης μηχανήματος

Έχουμε ένα μηχάνημα και θέλουμε να το χρησιμοποιήσουμε για τις επόμενες N περιόδους (N έτη).
Στην αρχή κάθε έτους βλέπουμε την ηλικία του μηχανήματος και αποφασίζουμε αν θα το συντηρήσουμε ή θα το αντικαταστήσουμε με καινούριο.

Δεδομένα.

- $c(x)$ = (ετήσιο) κόστος συντήρησης μηχανήματος που στην αρχή του έτους έχει ηλικία x.
- $k(x)$ = τιμή μεταπώλησης μηχανήματος ηλικίας x
- T = τιμή αγοράς νέου μηχανήματος
- H = ανώτατο όριο ηλικίας

Ζητάμε τον προγραμματισμό συντήρησης - αντικατάστασης που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Διατύπωση σαν π.δ.π

- **Στάδια:** Στην αρχή κάθε έτους αποφασίζω.
  $t = 1, 2, \dots, N, N+1 \rightarrow$ τερματικό στάδιο
  N = χρονικός ορίζοντας
- **Κατάσταση:** x_t = ηλικία μηχανήματος στην αρχή της περιόδου t.
- **Αποφάσεις:** $a_t = \begin{cases} 1 & \text{, συντήρηση} \\ 2 & \text{, αντικατάσταση} \end{cases}$

$$D_t(x_t) = \begin{cases} \{2\}, & x_t = H \\ \{1,2\}, & x_t < H \end{cases}$$

↳ σύνολο των δυνατών αποφάσεων για το στάδιο t, όταν η κατάσταση είναι x_t

□ Δυναμική του συστήματος:

$$x_{t+1} = g_t(x_t, a_t) = \begin{cases} x_t + 1, & a_t = 1 \\ 1, & a_t = 2 \end{cases}$$

□ Άμεσο κόστος:

$$C_t(x_t, a_t) = \begin{cases} c(x_t), & a_t = 1 \\ T + c(0) - k(x_t), & a_t = 2 \end{cases}$$

↳ συνήθως είναι 0 ή υπάρχει κόστος εγκατάστασης

□ Τερματικό κόστος:

$$\hat{c}(x_{N+1}) = -k(x_{N+1})$$

Εξισώσεις βελτιστοποίησης/Bellman

$v(t, x_t)$ = ελάχιστο κόστος από το στάδιο t μέχρι το τέλος αν στην αρχή του σταδίου t η ηλικία είναι x_t

Θέλουμε το $v(1, x_1)$

$$v(t, x_t) = \min_{a_t \in D_t(x_t)} \Big\{ C_t(x_t, a_t) + v\big(t+1, \overbrace{g_t(x_t, a_t)}^{x_{t+1}}\big) \Big\},$$

$$t = 1, 2, \dots, N$$

$$v(N+1, x_{N+1}) = \hat{c}(x_{N+1})$$

Εφαρμογή:

Να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική αντικατάστασης/συντήρησης για το πρόβλημα με τα παρακάτω δεδομένα

$N = 4$

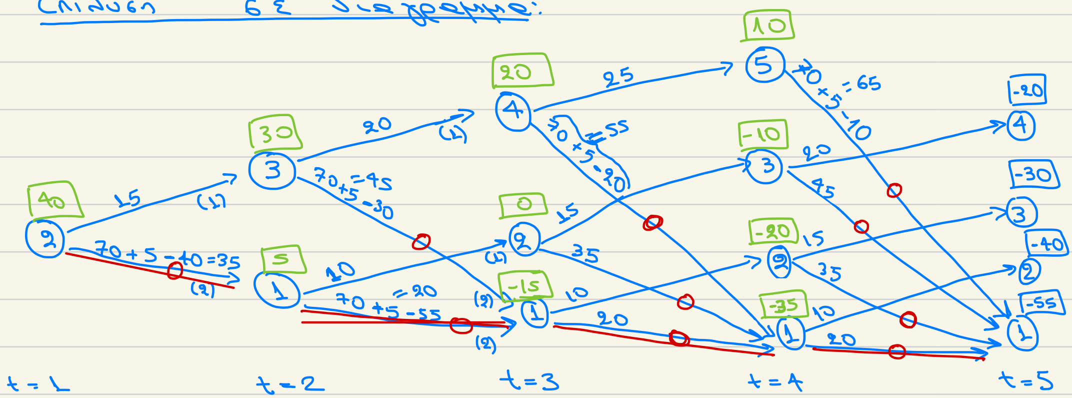
$H = 5$

$x_1 = 2$

$T = 70$

x	$c(x)$	$\mu(x)$
0	5	–
1	10	55
2	15	40
3	20	30
4	25	20
5	–	10

Επίλυση σε διάγραμμα:



ελάχιστο κόστος = 40

βέλτιστη λύση

$$2 \xrightarrow{a_1^* = 2} 1 \xrightarrow{a_2^* = 2} 1 \xrightarrow{a_3^* = 2} 1 \xrightarrow{a_4^* = 2} 1$$

$t=1$ $t=2$ $t=3$ $t=4$ $t=5$

Επίλυση με πίνακα:

t	x_t	a_t	$C_t(x_t, a_t)$	x_{t+1}	$v(t, x_t)$
1	2	1	15	3	$15+30=45$
		2	$70+5-40=35$	1	$35+5=40$ *
2	3	1	20	4	$20+20=40$
		2	$70+5-30=45$	1	$45+(-15)=30$ *
	1	1	10	2	$10+0=10$
		2	$70+5-55=20$	1	$20+(-15)=5$ *
3	4	1	25	5	$25+10=35$
		2	$70+5-20=55$	1	$55+(-35)=20$ *
	2	1	15	3	$15+(-10)=5$
		2	35	1	$35+(-35)=0$ *
	1	1	10	2	$10+(-20)=-10$
		2	20	1	$20+(-35)=-15$ *
4	5	2	$70+5-10=65$	1	$65+(-55)=10$ *
	3	1	20	4	$20+(-20)=0$
		2	45	1	$45+(-55)=-10$ *
	2	1	15	3	$15+(-30)=-15$
		2	35	1	$35+(-55)=-20$ *
	1	1	10	2	$10+(-40)=-30$
		2	20	1	$20+(-55)=-35$ *
5	4				-20
	3				-30
	2				-40
	1				-55

$\left.\begin{matrix}-20\\-30\\-40\\-55\end{matrix}\right\}$ τερματικό κόστος

$$\underset{t=1}{(2)} \xrightarrow{a_1^* = 2} \underset{t=2}{(1)} \xrightarrow{a_2^* = 2} \underset{t=3}{(1)} \xrightarrow{a_3^* = 2} \underset{t=4}{(1)} \xrightarrow{a_4^* = 2} \underset{t=5}{(1)}$$

2. Πρόβλημα Ελέγχου Αποθεμάτων

απόφαση για παραγωγή
ικανοποίηση ζήτησης
αποθήκευση αποθέματος
περίοδος t

Εταιρεία παράγει ένα προϊόν και πρέπει να λειτουργήσει τις επόμενες N χρονικές περιόδους. Στην αρχή κάθε περιόδου παράγεται ένας αριθμός προϊόντων για να καλύψει τη ζήτηση της περιόδου ή να χρησιμοποιηθεί σαν απόθεμα για επόμενες περιόδους. Μετά την παραγωγή ικανοποιείται η ζήτηση η οποία θεωρείται γνωστή.

Το απόθεμα αποθηκεύεται για μελλοντική χρήση. Θέλουμε να βρούμε το προγραμματισμό παραγωγής που ελαχιστοποιεί το κόστος παραγωγής και αποθήκευσης.

Δεδομένα:

N = μήκος χρονικού ορίζοντα

d_t = ζήτηση για την περίοδο t, $t=1,2,\dots,N$

m = μέγιστη δυνατή παραγωγή σε μία περίοδο.

M = χωρητικότητα αποθήκης

$k_t(a)$ = κόστος παραγωγής a μονάδων προϊόντος την περίοδο t, $t=1,2,\dots,N$

h_t = κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος την περίοδο t, $t=1,2,\dots,N$

Διατύπωση ως π.δ.π

$$\underbrace{\overset{\text{απόθεμα } x_t}{\downarrow}\ \overset{\text{απόφαση για παραγωγή } a_t}{\longrightarrow}\ \text{ικανοποιείται η ζήτηση } d_t\ \overset{\text{απόθεμα } x_t+a_t-d_t}{\downarrow}}_{\text{αποθήκευση } x_t+a_t-d_t}$$

- **Στάδια**: Παίρνουμε απόφαση για την ποσότητα προϊόντος που θα παραχθεί στην αρχή κάθε περιόδου

  $t = 1, 2, \ldots, N, (N+1) \rightarrow$ τερματικό στάδιο

  N = χρονικός ορίζοντας

- **Κατάσταση**: x_t = απόθεμα στην αρχή του σταδίου t

- **Αποφάσεις**: a_t = ποσότητα προϊόντος που θα παραχθεί στο στάδιο t

$D_t(x_t)$

δυναμικότητα παραγωγής $\rightarrow$ $0 \le a_t \le m$

χωρητικότητα αποθήκης $\rightarrow$ $x_t + a_t - d_t \le M \Rightarrow a_t \le M + d_t - x_t$

ικανοποίηση ζήτησης $\rightarrow$ $x_t + a_t \ge d_t \Rightarrow a_t \ge d_t - x_t$

$$\max\{0, d_t - x_t\} \le a_t \le \min\{m, M + d_t - x_t\}$$

$$D_t(x_t) = \{a_t \in \mathbb{N} : \max\{0, d_t - x_t\} \le a_t \le \min\{m, M + d_t - x_t\}\}.$$

- **Δυναμική συστήματος**: $x_{t+1} = g_t(x_t, a_t) = x_t + a_t - d_t$

- **Άμεσο κόστος**: $C_t(x_t, a_t) = \underbrace{K_t(a_t)}_{\text{κόστος παραγωγής}} + \underbrace{h_t \cdot (x_t + a_t - d_t)}_{\text{κόστος αποθήκευσης}}$

- **Τερματικό κόστος**: $\hat{C}(x_{N+1}) = 0$

* Αν υπήρχε κόστος καταστροφής του τελικού αποθέματος

  θ = κόστος καταστροφής ανά μονάδα αποθέματος στο τέλος του χρονικού ορίζοντα

  τότε

$$\hat{c}(x_{N+1}) = \theta \cdot x_{N+1}.$$

* Αν μπορούσαμε να πουλήσουμε το τελικό απόθεμα με κέρδος θ χρημ. μονάδες ανά μονάδα προϊόντος,

  τότε $\hat{c}(x_{N+1}) = -\theta\, x_{N+1}$

* Αν έπρεπε στο τέλος του χρονικού ορίζοντα να έχουμε απόθεμα 3 μονάδες προϊόντος

$$\hat{c}(x_{N+1}) = \begin{cases} 0 & , x_{N+1} = 3 \\ \infty & , x_{N+1} \neq 3 \end{cases}$$

Εξισώσεις βελτιστοποίησης

$v(t, x_t)$ = ελάχιστο κόστος από το στάδιο t μέχρι το τέλος, αν στην αρχή του σταδίου t το απόθεμα ήταν x_t.

Θέλουμε το $v(1, x_1)$

$$v(t, x_t) = \min_{a_t \in D_t(x_t)} \left\{ c_t(x_t, a_t) + v\left(t+1, g_t(x_t, a_t)\right) \right\}, \quad t = 1, 2, \ldots, N$$

με τερματικές συνθήκες

$v(N, x_{N+1}) = \hat{c}(x_{N+1})$.