Επιχειρησιακή Έρευνα
Ενότητα 3
Η μέθοδος Simplex

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

Τυπική μορφή π.γ.π.

- Είναι:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\max & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n & & \\
\text{υπό} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
 & & & & & \vdots & & & & \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.}
\end{array}
$$

- Μεγιστοποίηση της αντικειμενικής,
- Όλοι οι περιορισμοί τύπου $\leq$,
- Όλες οι μεταβλητές ≥ 0.

Τροπή π.γ.π. σε τυπική μορφή I

- Αν πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης τότε αντί για

$$\min \zeta = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

θέτουμε

$$-\max -\zeta = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n.$$

- Αν κάποιος περιορισμός είναι τύπου

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b$$

τότε πολλαπλασιάζουμε με -1, οπότε αντικαθιστούμε με

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \leq -b$$

Τροπή π.γ.π. σε τυπική μορφή II

- Αν κάποιος περιορισμός είναι τύπου

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

τότε τον αντικαθιστούμε με δυο περιορισμούς

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$$

και

$$-a_1x_1 - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n \leq -b.$$

Τροπή π.γ.π. σε τυπική μορφή III

- Αν κάποια μεταβλητή είναι τύπου

$$x_j \leq 0$$

  τότε την αντικαθιστούμε με την αντίθετή της, δηλαδή θέτουμε $x_j = -x_j'$ και έχουμε

$$x_j' \geq 0.$$

- Αν κάποια μεταβλητή είναι τύπου

$$x_j \in \mathbb{R} \text{ (χωρίς περιορισμό)}$$

  τότε την αντικαθιστούμε με τη διαφορά δυο μη αρνητικών μεταβλητών, δηλαδή θέτουμε $x_j = x_j' - x_j''$ και έχουμε

$$x_j', x_j'' \geq 0.$$

Παράδειγμα

- Να τεθεί σε τυπική μορφή το π.γ.π.

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{υπό} & x_1 & - & 3x_2 & & & \leq & 10 \\
 & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 3 \\
 & x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}.}
\end{array}
$$

Παράδειγμα

- Να τεθεί σε τυπική μορφή το π.γ.π.

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\min & x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{υπό} & x_1 & - & 3x_2 & & & \leq & 10 \\
& x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 3 \\
& x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \\
& \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}.}
\end{array}$$

- Θέτουμε $x_2 = -x_2'$ και $x_3 = x_3' - x_3''$ με $x_2', x_3', x_3'' \geq 0$. Έχουμε:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & x_1 & + & 2x_2' & + & 4x_3' & - & 4x_3'' & & \\
\text{υπό} & x_1 & + & 3x_2' & & & & & \leq & 10 \\
& x_1 & + & x_2' & - & 2x_3' & + & 2x_3'' & \geq & 3 \\
& x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' & = & 2 \\
& \multicolumn{9}{l}{x_1 x_2', x_3', x_3'' \geq 0.}
\end{array}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έχουμε:

$$\begin{array}{lcccccccccc}
\min & x_1 & + & 2x_2' & + & 4x_3' & - & 4x_3'' & & \\
\text{υπό} & x_1 & + & 3x_2' & & & & & \leq & 10 \\
 & x_1 & + & x_2' & - & 2x_3' & + & 2x_3'' & \geq & 3 \\
 & x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' & = & 2 \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1 x_2', x_3', x_3'' \geq 0.}
\end{array}$$

- Πολλαπλασιάζουμε την αντικειμενική και τον 2ο περιορισμό με -1 και αντικαθιστούμε τον 3ο περιορισμό με δυο νέους περιορισμούς:

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Από

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\min & x_1 & + & 2x_2' & + & 4x_3' & - & 4x_3'' & & \\
\text{υπό} & x_1 & + & 3x_2' & & & & & \leq & 10 \\
 & x_1 & + & x_2' & - & 2x_3' & + & 2x_3'' & \geq & 3 \\
 & x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' & = & 2 \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1 x_2', x_3', x_3'' \geq 0}
\end{array}
$$

- γίνεται

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
-\max & - & x_1 & - & 2x_2' & - & 4x_3' & + & 4x_3'' & & \\
\text{υπό} & & x_1 & + & 3x_2' & & & & & \leq & 10 \\
 & - & x_1 & - & x_2' & + & 2x_3' & - & 2x_3'' & \leq & -3 \\
 & & x_1 & & & - & x_3' & + & x_3'' & \leq & 2 \\
 & - & x_1 & & & + & x_3' & - & x_3'' & \leq & -2 \\
 & \multicolumn{10}{l}{x_1 x_2', x_3', x_3'' \geq 0.}
\end{array}
$$

Από την τυπική μορφή στη μορφή Simplex

- Για να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος επίλυσης Simplex τρέπουμε τους περιορισμούς σε εξισωτικούς προσθέτοντας περιθώριες μεταβλητές:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$\downarrow$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + w_i = b_i$$

$$w_i \geq 0.$$

- Κατόπιν λύνουμε ως προς τις περιθώριες τους νέους περιορισμούς:

$$w_i = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n.$$

- Το προκύπτον σχήμα αναφέρεται ως λεξικό.

Παράδειγμα

- Να τεθεί το π.γ.π. σε μορφή λεξικού Simplex:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0. & & & & \end{array}$$

Παράδειγμα

- Να τεθεί το π.γ.π. σε μορφή λεξικού Simplex:

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0. & & & & \end{array}$$

- Έχουμε το λεξικό:

$$\begin{array}{llcrcrcr} \max & \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \text{υπό} & w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ & w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ & w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \\ & x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0. & & & & & & \end{array}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Το λεξικό

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
\text{υπό} & w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
 & w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
 & w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_1, x_2, w_1, w_2, w_3 \geq 0.}
\end{array}
$$

το γράφουμε συνήθως σε απλοποιημένη μορφή, παραλείποντας το max και τους περιορισμούς μη-αρνητικότητας των μεταβλητών:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
\end{array}
$$

Λεξικό και ορισμοί I

- Έστω ένα λεξικό, π.χ. το

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

- Η ονομασία "λεξικό" παραπέμπει στο ότι μεταφράζει τις μεταβλητές στα αριστερά μέλη με όρους των μεταβλητών στα δεξιά μέλη.
- Το γράμμα ζ χρησιμοποιείται για την αντικειμενική συνάρτηση.
- Οι εξαρτημένες μεταβλητές, στα αριστερά, λέγονται βασικές μεταβλητές. Εδώ είναι οι w_1, w_2, w_3 (που ταυτίζονται με τις περιθώριες).

Λεξικό και ορισμοί II

- Έστω πάλι το λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

- Οι ανεξάρτητες μεταβλητές, στα δεξιά, λέγονται μη-βασικές μεταβλητές. Εδώ είναι οι x_1, x_2 (που ταυτίζονται με τις αρχικές μεταβλητές).
- Θέτοντας τις μη-βασικές μεταβλητές ίσες με 0 παίρνουμε μια λύση του συστήματος των περιορισμών που λέγεται βασική λύση. Εδώ $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$ με τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $\zeta = 0$.

Λεξικό και ορισμοί ΙΙΙ - Λύσεις Ι

- Έστω πάλι το λεξικό

$$\begin{array}{ccrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

- Λύση = Διάνυσμα που ικανοποιεί τους περιορισμούς που εμφανίζονται στο λεξικό.
  Π.χ. εδώ $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 6, 23, 8)$ με $\zeta = 1$.
- Εφικτή λύση = Λύση που ικανοποιεί και τους "κρυφούς" περιορισμούς της μη-αρνητικότητας των μεταβλητών.
  Π.χ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (1, 1, 6, 23, 8)$ εφικτή λύση.
  Όμως $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (-1, 0, 7, 27, 7)$ λύση, όχι εφικτή.

Λεξικό και ορισμοί IV - Λύσεις II

- Έστω πάλι το λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
\end{array}
$$

- Βασική λύση = Λύση που οι μη-βασ. μεταβλητές είναι 0. Π.χ. εδώ $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$ με $\zeta = 0$. Μπορεί μια λύση να είναι βασική αλλά όχι εφικτή.
- Βασική εφικτή λύση (β.ε.λ.) = Βασική λύση που είναι και εφικτή.
- Βέλτιστη λύση = Εφικτή λύση που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση.

Η ιδέα της μεθόδου Simplex

- Αρχίζουμε από κάποιο λεξικό που μας δίνει β.ε.λ.
- Εξετάζουμε αν η νέα β.ε.λ. είναι βέλτιστη λύση. Αν ναι σταματάμε, αλλιώς ...
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό αλλάζοντας τις βασικές μεταβλητές ώστε να πάρουμε νέα β.ε.λ. που βελτιώνει την αντικειμενική συνάρτηση.

Γιατί λειτουργεί η Simplex;

- Η ιδέα της Simplex λειτουργεί γιατί όπως θα δούμε αργότερα, αν ένα π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση τότε έχει αναγκαστικά και βέλτιστη β.ε.λ.
- Οι δυνατές β.ε.λ. είναι πεπερασμένες το πλήθος και άρα αν πηγαίνουμε από β.ε.λ. σε β.ε.λ., βελτιώνοντας την αντικειμενική συνάρτηση θα φθάσουμε σε βέλτιστη λύση σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

Βασικά τεχνικά σημεία της Simplex

- Κριτήριο αλλαγής βασικών μεταβλητών για την βελτίωση της αντικειμενικής συνάρτησης από λεξικό σε ισοδύναμο λεξικό.
- Μετασχηματισμός λεξικού σε ισοδύναμο λεξικό, όταν αλλάζουν οι βασικές μεταβλητές.

Προχωρημένα τεχνικά σημεία της Simplex

- Τι γίνεται όταν έχουμε μη-φραγμένη αντικειμενική συνάρτηση (οπότε δεν υπάρχει βέλτιστη λύση) ;
- Τί γίνεται όταν δεν έχουμε αρχική β.ε.λ. ;
- Τί γίνεται αν κολλήσει η Simplex και κάνει κύκλους μεταξύ κάποιων β.ε.λ. πριν φθάσει σε βέλτιστη β.ε.λ. ;

Παράδειγμα Simplex - Έναρξη

- Να λυθεί το π.γ.π. :

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\
 & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\
 & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\
 & x_1, x_2 \geq 0. & & & &
\end{array}
$$

Παράδειγμα Simplex - Έναρξη

- Να λυθεί το π.γ.π. :

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & 5x_1 & - & 4x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 24 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0. & & & & \end{array}$$

- Έχουμε το αρχικό λεξικό:

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

με βασική λύση $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$. Είναι και εφικτή (β.ε.λ.).

Παράδειγμα Simplex- 1η επανάληψη

- Παρατηρούμε το αρχικό λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
\end{array}
$$

  (αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$).
- Αν η x_1 αυξηθεί η ζ αυξάνει.
- Καθώς η x_1 αυξάνεται οι w_1, w_2 μειώνονται.
- Καθώς η x_1 αυξάνεται η w_3 αυξάνεται.
- Πόσο μπορεί να αυξηθεί η x_1;
  Μέχρι κάποια από τις w_1, w_2 να γίνει 0.
  Η w_1 γίνεται 0 για $x_1 = 6/1$.
  Η w_2 γίνεται 0 για $x_1 = 24/3 = 8$.
  Άρα πρώτα θα γίνει 0 η w_1.

Παράδειγμα Simplex - 1η επανάληψη (συνέχεια)

- Επομένως στο αρχικό λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & \boxed{5x_1} & - & 4x_2 \\
\hline
\boxed{w_1} & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
\end{array}
$$

- η x_1 γίνεται βασική (αυξάνεται μέχρι $x_1 = 6$),
- η w_1 γίνεται μη-βασική (μειώνεται μέχρι $w_1 = 0$).
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό “περνώντας” την x_1 στο αριστερό μέλος, στη θέση της w_1 και εκφράζοντας τις w_2, w_3 συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών w_1, x_2 (διαδικασία οδήγησης).
- Ο συντελεστής στην τομή της εισερχόμενης και της εξερχόμενης μεταβλητής (εδώ το -1) λέγεται οδηγός.

Παράδειγμα Simplex - 1η επανάληψη (συνέχεια)

- Θεωρούμε το αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & \boxed{5x_1} & - & 4x_2 \\
\hline
\boxed{w_1} & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\
w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\
w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2
\end{array}$$

- Απαλείφουμε την μεταβλητή x_1 που μπαίνει στη βάση από την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς, εκτός του περιορισμού που αφορά τη μεταβλητή w_1 που βγαίνει από τη βάση, εκτελώντας γραμμοπράξεις.
- Για την αντικειμενική συνάρτηση ζ έχουμε

$$\zeta + 5 \times w_1 = 0 + 5 \times 6 + (-4 + 5 \times 1)x_2.$$

- Ομοίως για τις w_2, w_3.
- Τέλος μετακινούμε τη μεταβλητή w_1 που βγαίνει από τη βάση στο δεξιό μέλος.

Παράδειγμα Simplex - 1η επανάληψη (συνέχεια)

- Το αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 5x_1 & - & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 6 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 24 & - & 3x_1 & + & 2x_2 \\ w_3 & = & 9 & + & 2x_1 & - & 3x_2 \end{array}$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 24, 9)$)

- γίνεται

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\ \hline x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2 \end{array}$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$).

Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη

- Το δεύτερο λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\ \hline x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2 \end{array}$$

  (αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$) είναι βέλτιστο;
- Όχι, γιατί υπάρχει θετικός συντελεστής μη-βασικής μεταβλητής στην ζ, ο συντελεστής της x_2.
- Καθώς η x_2 αυξάνεται οι w_2, w_3 μειώνονται.
- Η x_2 μπορεί να αυξηθεί μέχρι $w_2 = 0$ ή $w_3 = 0$.
  Η w_2 γίνεται 0 για $x_2 = 6/1$.
  Η w_3 γίνεται 0 για $x_2 = 21/1 = 21$.
  Άρα πρώτα θα γίνει 0 η w_2.

Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη (συνέχεια)

- Επομένως στο δεύτερο λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & \boxed{x_2} \\
\hline
x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\
\boxed{w_2} & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\
w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2
\end{array}
$$

- η x_2 γίνεται βασική (αυξάνεται μέχρι $x_2 = 6$),
- η w_2 γίνεται μη-βασική (μειώνεται μέχρι $w_2 = 0$).
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό "περνώντας" την x_2 στο αριστερό μέλος, στη θέση της w_2 και εκφράζοντας τις x_1, w_3 συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών w_1, w_2 (διαδικασία οδήγησης).
- Ο οδηγός στην τομή της στήλης της x_2 και της γραμμής της w_2 είναι -1.

Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη (συνέχεια)

- Για το δεύτερο λεξικό έχουμε

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\ \hline x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2 \end{array}$$

- Απαλείφουμε την μεταβλητή x_2 που μπαίνει στη βάση από την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς, εκτός του περιορισμού που αφορά τη μεταβλητή w_2 που βγαίνει από τη βάση, εκτελώντας γραμμοπράξεις.
- Τέλος μετακινούμε τη μεταβλητή w_2 που βγαίνει από τη βάση στο δεξιό μέλος.

Παράδειγμα Simplex - 2η επανάληψη (συνέχεια)

- Το δεύτερο λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 30 & - & 5w_1 & + & x_2 \\ \hline x_1 & = & 6 & - & w_1 & + & x_2 \\ w_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & 21 & - & 2w_1 & - & x_2 \end{array}$$

(αντιστ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$)

- γίνεται

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 36 & - & 2w_1 & - & w_2 \\ \hline x_1 & = & 12 & + & 2w_1 & - & w_2 \\ x_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & w_2 \\ w_3 & = & 15 & - & 5w_1 & + & w_2 \end{array}$$

(αντ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$).

Παράδειγμα Simplex - 3η επανάληψη

- Το τρίτο λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 36 & - & 2w_1 & - & w_2 \\
\hline
x_1 & = & 12 & + & 2w_1 & - & w_2 \\
x_2 & = & 6 & + & 3w_1 & - & w_2 \\
w_3 & = & 15 & - & 5w_1 & + & w_2
\end{array}
$$

  (αντ. στη β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$) είναι βέλτιστο;
- Ναι, γιατί όλοι οι συντελεστές μη-βασικών μεταβλητών στην ζ είναι μη-θετικοί.
- Επομένως το 36 είναι ένα άνω φράγμα για την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Αλλά το 36 "πιάνεται" για την $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$, που αποτελεί επομένως βέλτιστη λύση.

Σύνοψη της βασικής Simplex

- Ξεκινάμε με λεξικό που αντιστοιχεί σε β.ε.λ.
- Αν όλοι οι συντελεστές των μη-βασικών μεταβλητών στην ζ είναι μη-θετικοί έχουμε βρει τη βέλτιστη λύση.
- Αν υπάρχουν μη-βασικές μεταβλητές των οποίων οι συντελεστές στην ζ είναι θετικοί, διαλέγουμε μία για να μπει στη βάση.
- Από τις βασικές μεταβλητές που μειώνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται διαλέγουμε την πρώτη που θα μηδενιστεί για να βγει από τη βάση.
- Μετασχηματίζουμε το λεξικό ώστε η αντικειμενική συνάρτηση και οι βασικές μεταβλητές να εκφράζονται συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών.
- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη νέα β.ε.λ. θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από την προηγούμενη β.ε.λ.

Πιθανά προβλήματα

- Απουσία αρχικής β.ε.λ.
- Πολλές επιλογές για εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή.
- Απουσία επιλογής για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή.
- Πολλές επιλογές για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή.
- Η αντικειμενική συνάρτηση δεν βελτιώνεται στο επόμενο λεξικό.

Πρόβλημα Ι: Απουσία αρχικής β.ε.λ.

- Ξεκινάμε με λεξικό που αντιστοιχεί σε β.ε.λ.
- Τί κάνουμε αν δεν έχουμε τέτοιο αρχικό λεξικό;
- Χρησιμοποιούμε ένα βοηθητικό πρόβλημα που μας δίνει αρχική β.ε.λ. ή μας δείχνει ότι το π.γ.π. δεν έχει εφικτές λύσεις.
- Η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως φάση Ι της Simplex: Από βασική λύση σε β.ε.λ.
- Η κλασική διαδικασία που περιγράψαμε είναι η φάση ΙΙ: Από β.ε.λ. σε βέλτιστη λύση.

Πρόβλημα Ι - Παράδειγμα

- Θεωρούμε το π.γ.π. σε τυπική μορφή

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & -3x_1 & + & 4x_2 & & \\ \text{υπό} & -4x_1 & - & 2x_2 & \leq & -8 \\ & -2x_1 & & & \leq & -2 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\ & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 1 \\ & & & -3x_2 & \leq & -2 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

με αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & - & 3x_1 & + & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & -8 & + & 4x_1 & + & 2x_2 \\ w_2 & = & -2 & + & 2x_1 & & \\ w_3 & = & 10 & - & 3x_1 & - & 2x_2 \\ w_4 & = & 1 & + & x_1 & - & 3x_2 \\ w_5 & = & -2 & & & + & 3x_2 \end{array}$$

Πρόβλημα I - Παράδειγμα

- Το λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & - & 3x_1 & + & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & -8 & + & 4x_1 & + & 2x_2 \\
w_2 & = & -2 & + & 2x_1 & & \\
w_3 & = & 10 & - & 3x_1 & - & 2x_2 \\
w_4 & = & 1 & + & x_1 & - & 3x_2 \\
w_5 & = & -2 & & & + & 3x_2
\end{array}
$$

  αντιστοιχεί στη βασική λύση
  $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (0, 0, -8, -2, 10, 1, -2)$
  που δεν είναι εφικτή.
- Αυτό συμβαίνει διότι το π.γ.π. ήταν σε τυπική μορφή με μερικά από τα δεξιά μέλη των περιορισμών < 0.

Πρόβλημα I - Παράδειγμα

- Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό αφαιρούμε μια νέα μεταβλητή x_0 από κάθε αριστερό μέλος της τυπικής μορφής του αρχικού και
- θεωρούμε για αντικειμενική συνάρτηση την $-x_0$ (δηλαδή προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε την x_0).
- Προκύπτει τότε το π.γ.π.

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\max & -x_0 & & & & & \\
\text{υπό} & -x_0 & -4x_1 & - & 2x_2 & \leq & -8 \\
& -x_0 & -2x_1 & & & \leq & -2 \\
& -x_0 & +3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
& -x_0 & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 1 \\
& -x_0 & & - & 3x_2 & \leq & -2 \\
& & & & x_0, x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Πρόβλημα I - Παράδειγμα

- Το π.γ.π.

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\max & -x_0 & & & & & \\
\text{υπό} & -x_0 & -4x_1 & - & 2x_2 & \leq & -8 \\
 & -x_0 & -2x_1 & & & \leq & -2 \\
 & -x_0 & +3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & -x_0 & -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_0 & & - & 3x_2 & \leq & -2 \\
 & & & & x_0, x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}
$$

έχει προφανώς εφικτή λύση, αρκεί να πάρουμε $x_1 = x_2 = 0$ για τις αρχικές μεταβλητές και αρκετά μεγάλη τιμή για την τεχνητή μεταβλητή x_0 (πάνω από 8).

Πρόβλημα I - Αιτιολόγηση μεθόδου

- Το αρχικό π.γ.π. έχει εφικτή λύση, αν και μόνο αν το τροποποιημένο π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση με $\zeta = -x_0 = 0$.
- Αποδ:

  Αν το αρχικό π.γ.π. έχει εφικτή λύση, τότε παίρνουμε εφικτή λύση του τροποποιημένου, θέτοντας $x_0 = 0$. Αυτή είναι και βέλτιστη αφού $\zeta = -x_0 \leq 0$.

  Αν το τροποποιημένο π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση με $\zeta = -x_0 = 0$, τότε αγνοώντας το x_0 έχουμε μια εφικτή λύση του αρχικού.

Πρόβλημα I - Σύνοψη Θεωρίας

- Αν το αρχικό π.γ.π. τεθεί σε τυπική μορφή που δίνει βασική αλλά όχι εφικτή λύση θεωρούμε το τροποποιημένο π.γ.π. και βρίσκουμε τη βέλτιστη λύση του (Φάση I της Simplex).
- Αν το τροποποιημένο π.γ.π. έχει βέλτιστη λύση με $x_0 = 0$, τότε αυτή δίνει β.ε.λ. για το αρχικό π.γ.π. και εφαρμόζουμε την Simplex για να βρούμε τη βέλτιστη λύση του αρχικού (Φάση II της Simplex).
- Αν το τροποποιημένο π.γ.π. δεν έχει βέλτιστη λύση με $x_0 = 0$, τότε το αρχικό π.γ.π. δεν έχει εφικτές λύσεις.

Πρόβλημα Ι - Παράδειγμα

- Αρχικό λεξικό τροποποιημένου π.γ.π. όχι εφικτό:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & - & x_0 & & & & \\
\hline
w_1 & = & -8 & + & x_0 & + & 4x_1 & + & 2x_2 \\
w_2 & = & -2 & + & x_0 & + & 2x_1 & & \\
w_3 & = & 10 & + & x_0 & - & 3x_1 & - & 2x_2 \\
w_4 & = & 1 & + & x_0 & + & x_1 & - & 3x_2 \\
w_5 & = & -2 & + & x_0 & & & + & 3x_2
\end{array}
$$

- Στη Φάση Ι της Simplex, στο αρχικό λεξικό απαιτούμε να μπει η τεχνητή μεταβλητή στη βάση στο πρώτο βήμα.
- Απαιτούμε να βγει από τη βάση η πιο αρνητική μεταβλητή, εδώ η w_1.
- Προκύπτει έτσι β.ε.λ. για το τροποποιημένο π.γ.π. στο επόμενο λεξικό.

Πρόβλημα Ι - Παράδειγμα

- Από το όχι εφικτό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & - & \boxed{x_0} & & & & \\
\hline
\boxed{w_1} & = & -8 & + & x_0 & + & 4x_1 & + & 2x_2 \\
w_2 & = & -2 & + & x_0 & + & 2x_1 & & \\
w_3 & = & 10 & + & x_0 & - & 3x_1 & - & 2x_2 \\
w_4 & = & 1 & + & x_0 & + & x_1 & - & 3x_2 \\
w_5 & = & -2 & + & x_0 & & & + & 3x_2
\end{array}$$

- πάμε στο εφικτό λεξικό (β.ε.λ.)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & -8 & - & w_1 & + & 4x_1 & + & 2x_2 \\
\hline
x_0 & = & 8 & + & w_1 & - & 4x_1 & - & 2x_2 \\
w_2 & = & 6 & + & w_1 & - & 2x_1 & - & 2x_2 \\
w_3 & = & 18 & + & w_1 & - & 7x_1 & - & 4x_2 \\
w_4 & = & 9 & + & w_1 & - & 3x_1 & - & 5x_2 \\
w_5 & = & 6 & + & w_1 & - & 4x_1 & + & x_2
\end{array}$$

Πρόβλημα I - Παράδειγμα

- Τώρα στο εφικτό λεξικό του τροποποιημένου π.γ.π. εφαρμόζουμε κανονικά την Simplex για να βελτιστοποιήσουμε την αντικειμενική:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & -8 & - & w_1 & + & 4x_1 & + & 2x_2 \\
\hline
x_0 & = & 8 & + & w_1 & - & 4x_1 & - & 2x_2 \\
w_2 & = & 6 & + & w_1 & - & 2x_1 & - & 2x_2 \\
w_3 & = & 18 & + & w_1 & - & 7x_1 & - & 4x_2 \\
w_4 & = & 9 & + & w_1 & - & 3x_1 & - & 5x_2 \\
w_5 & = & 6 & + & w_1 & - & 4x_1 & + & x_2
\end{array}
$$

- Εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή: x_1 ή x_2. Ας επιλέξουμε την x_1.
- Εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή: w_5.
- Εφαρμόζουμε τη συνήθη διαδικασία οδήγησης.

Πρόβλημα Ι - Παράδειγμα

- Από το λεξικό :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & -8 & - & w_1 & + & \boxed{4x_1} & + & 2x_2 \\
\hline
x_0 & = & 8 & + & w_1 & - & 4x_1 & - & 2x_2 \\
w_2 & = & 6 & + & w_1 & - & 2x_1 & - & 2x_2 \\
w_3 & = & 18 & + & w_1 & - & 7x_1 & - & 4x_2 \\
w_4 & = & 9 & + & w_1 & - & 3x_1 & - & 5x_2 \\
\boxed{w_5} & = & 6 & + & w_1 & - & 4x_1 & + & x_2
\end{array}$$

- πάμε στο:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & -2 & & & - & w_5 & + & 3x_2 \\
\hline
x_0 & = & 2 & & & + & w_5 & - & 3x_2 \\
w_2 & = & 3 & + & 0.5w_1 & + & 0.5w_5 & - & 2.5x_2 \\
w_3 & = & 7.5 & - & 0.75w_1 & + & 1.75w_5 & - & 5.75x_2 \\
w_4 & = & 4.5 & + & 0.25w_1 & + & 0.75w_5 & - & 5.75x_2 \\
x_1 & = & 1.5 & + & 0.25w_1 & - & 0.25w_5 & + & 0.25x_2
\end{array}$$

Πρόβλημα Ι - Παράδειγμα

- Από το λεξικό:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & -2 & & & - & w_5 & + & \boxed{3x_2} \\
\hline
\boxed{x_0} & = & 2 & & & + & w_5 & - & 3x_2 \\
w_2 & = & 3 & + & 0.5w_1 & + & 0.5w_5 & - & 2.5x_2 \\
w_3 & = & 7.5 & - & 0.75w_1 & + & 1.75w_5 & - & 5.75x_2 \\
w_4 & = & 4.5 & + & 0.25w_1 & + & 0.75w_5 & - & 5.75x_2 \\
x_1 & = & 1.5 & + & 0.25w_1 & - & 0.25w_5 & + & 0.25x_2
\end{array}
$$

- πάμε στο:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & & & & & - & x_0 \\
\hline
x_2 & = & 2/3 & & & + & 1/3w_5 & - & 1/3x_0 \\
w_2 & = & 4/3 & + & 1/2w_1 & - & 1/3w_5 & + & 5/6x_0 \\
w_3 & = & 11/3 & - & 3/4w_1 & - & 1/6w_5 & + & 23/12x_0 \\
w_4 & = & 2/3 & + & 1/4w_1 & - & 7/6w_5 & + & 23/12x_0 \\
x_1 & = & 5/3 & + & 1/4w_1 & - & 1/6w_5 & - & 1/12x_0
\end{array}
$$

Πρόβλημα I - Παράδειγμα

- Το λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & & & & & - & x_0 \\
\hline
x_2 & = & 2/3 & & & + & 1/3w_5 & - & 1/3x_0 \\
w_2 & = & 4/3 & + & 1/2w_1 & - & 1/3w_5 & + & 5/6x_0 \\
w_3 & = & 11/3 & - & 3/4w_1 & - & 1/6w_5 & + & 23/12x_0 \\
w_4 & = & 2/3 & + & 1/4w_1 & - & 7/6w_5 & + & 23/12x_0 \\
x_1 & = & 5/3 & + & 1/4w_1 & - & 1/6w_5 & - & 1/12x_0
\end{array}
$$

  είναι βέλτιστο για το τροποποιημένο πρόβλημα, οπότε η φάση I της Simplex τελείωσε.

- Αφού η βέλτιστη τιμή της ζ είναι 0, το αρχικό πρόβλημα έχει εφικτή λύση, που βρίσκεται παραλείποντας την x_0 από το λεξικό: $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (5/3, 2/3, 0, 4/3, 11/3, 2/3, 0)$.

Πρόβλημα Ι - Παράδειγμα

- Κρατάμε τους περιορισμούς του λεξικού

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \zeta & = & 0 & & & & & - & x_0 \\ \hline x_2 & = & 2/3 & & & + & 1/3w_5 & - & 1/3x_0 \\ w_2 & = & 4/3 & + & 1/2w_1 & - & 1/3w_5 & + & 5/6x_0 \\ w_3 & = & 11/3 & - & 3/4w_1 & - & 1/6w_5 & + & 23/12x_0 \\ w_4 & = & 2/3 & + & 1/4w_1 & - & 7/6w_5 & + & 23/12x_0 \\ x_1 & = & 5/3 & + & 1/4w_1 & - & 1/6w_5 & - & 1/12x_0 \end{array}$$

  παραλείποντας την x_0.
- Υπολογίζουμε την αντικειμενική συνάρτηση του αρχικού συναρτήσει των μη βασικών μεταβλητών του λεξικού:

$$\begin{aligned} \zeta &= -3x_1 + 4x_2 \\ &= -3(5/3 + 1/4w_1 - 1/6w_5) + 4(2/3 + 1/3w_5) \\ &= -7/3 - 3/4w_1 + 11/6w_5. \end{aligned}$$

Πρόβλημα Ι - Παράδειγμα

- Για τη φάση ΙΙ ξεκινάμε από το λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & -7/3 & - & 3/4w_1 & + & \boxed{11/6w_5} \\ \hline
x_2 & = & 2/3 & & & + & 1/3w_5 \\
w_2 & = & 4/3 & + & 1/2w_1 & - & 1/3w_5 \\
w_3 & = & 11/3 & - & 3/4w_1 & - & 1/6w_5 \\
\boxed{w_4} & = & 2/3 & + & 1/4w_1 & - & 7/6w_5 \\
x_1 & = & 5/3 & + & 1/4w_1 & - & 1/6w_5
\end{array}$$

- και πάμε στο

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & -9/7 & - & 5/14w_1 & - & 11/7w_4 \\ \hline
x_2 & = & 6/7 & + & 1/14w_1 & - & 2/7w_4 \\
w_2 & = & 8/7 & + & 3/7w_1 & + & 2/7w_4 \\
w_3 & = & 25/7 & - & 11/14w_1 & + & 1/7w_4 \\
w_5 & = & 4/7 & + & 3/14w_1 & - & 6/7w_4 \\
x_1 & = & 11/7 & + & 3/14w_1 & + & 1/7w_4
\end{array}$$

Πρόβλημα I - Παράδειγμα

- Το τελευταίο λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & -9/7 & - & 5/14w_1 & - & 11/7w_4 \\
\hline
x_2 & = & 6/7 & + & 1/14w_1 & - & 2/7w_4 \\
w_2 & = & 8/7 & + & 3/7w_1 & + & 2/7w_4 \\
w_3 & = & 25/7 & - & 11/14w_1 & + & 1/7w_4 \\
w_5 & = & 4/7 & + & 3/14w_1 & - & 6/7w_4 \\
x_1 & = & 11/7 & + & 3/14w_1 & + & 1/7w_4
\end{array}
$$

  είναι βέλτιστο και δίνει την βέλτιστη β.ε.λ.
  $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) =$
  $(11/7, 6/7, 0, 8/7, 25/7, 0, 4/7)$.

Πρόβλημα ΙΙ: Πολλές επιλογές για εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή

- Αν υπάρχουν μη-βασικές μεταβλητές των οποίων οι συντελεστές στην ζ είναι θετικοί, διαλέγουμε μία για να μπει στη βάση.
- Ποιά να διαλέξουμε;
- Υπάρχουν διάφοροι κανόνες επιλογής εισερχόμενης στη βάση μεταβλητής.

Πρόβλημα ΙΙ - Κανόνες επιλογής για την εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή

- Ο κανόνας του μέγιστου συντελεστή.
  Επίλεξε τη μη-βασική μεταβλητή με το μεγαλύτερο συντελεστή στην ζ.
- Ο κανόνας του τυχαίου θετικού συντελεστή.
  Επίλεξε στην τύχη μια μη-βασική μεταβλητή από αυτές που έχουν θετικό συντελεστή στην ζ.
- Ο κανόνας του πρώτου θετικού συντελεστή.
  Επίλεξε τη μη-βασική μεταβλητή που αντιστοιχεί στον πρώτο θετικό συντελεστή που συναντάται στη ζ.
- Ο κανόνας του μικρότερου δείκτη (Bland).
  Επίλεξε τη μεταβλητή με το μικρότερο δείκτη.
- Ο κανόνας της μέγιστης άμεσης αύξησης.
  Επίλεξε τη μεταβλητή που αυξάνει περισσότερο την ζ.

Πρόβλημα ΙΙΙ: Απουσία επιλογής για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή

- Από τις βασικές μεταβλητές που μειώνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται διαλέγουμε την πρώτη που θα μηδενιστεί για να βγει από τη βάση.
- Αν δεν υπάρχει τέτοια μεταβλητή, δηλαδή όλες οι βασικές μεταβλητές αυξάνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται τότε το π.γ.π. είναι μη φραγμένο.
- Η ζ μπορεί να πάρει οσοδήποτε μεγάλες τιμές, οπότε δεν υπάρχει βέλτιστη λύση.

Πρόβλημα ΙΙΙ - Παράδειγμα

- Έστω ότι εμφανίζεται το λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\
\hline
w_1 & = & 4 & + & 5x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 \\
w_2 & = & 10 & + & x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 \\
w_3 & = & 7 & & & + & 4x_2 & - & 3x_3 \\
w_4 & = & 6 & + & 2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 \\
w_5 & = & 6 & + & 3x_1 & & & + & 3x_3
\end{array}
$$

- Οι x_1 και x_3 μπορούν να γίνουν βασικές.
- Ας διαλέξουμε την x_1.
- Όσο αυξάνει η x_1 καμιά βασική μεταβλητή δεν μειώνεται και η αντικειμενική συνάρτηση αυξάνει.
- Το π.γ.π. είναι μη-φραγμένο.

Πρόβλημα IV: Πολλές επιλογές για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή

- Από τις βασικές μεταβλητές που μειώνονται καθώς η επιλεχθείσα μη-βασική μεταβλητή αυξάνεται διαλέγουμε την πρώτη που θα μηδενιστεί για να βγει από τη βάση.
- Αν υπάρχουν δυο μεταβλητές που μηδενίζονται ταυτόχρονα, ποιά να διαλέξουμε;
- Στο επόμενο λεξικό θα εμφανιστεί κάποια βασική μεταβλητή με τιμή 0.
- Μια β.ε.λ. στην οποία κάποια βασική μεταβλητή έχει τιμή 0 λέγεται εκφυλισμένη.

Πρόβλημα V: Η αντικειμενική συνάρτηση δεν βελτιώνεται στο επόμενο λεξικό

- Μετασχηματίζουμε το λεξικό ώστε η αντικειμενική συνάρτηση και οι βασικές μεταβλητές να εκφράζονται συναρτήσει των νέων μη-βασικών μεταβλητών.
- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη νέα β.ε.λ. θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από την προηγούμενη β.ε.λ.
- Αν κάποια βασική μεταβλητή έχει τιμή 0 και επιλεγεί να βγει από τη βάση τότε η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για τη νέα β.ε.λ. θα είναι ίση με την προηγούμενη β.ε.λ.
- Υπάρχει έτσι η περίπτωση η Simplex να κολλήσει και να κάνει κύκλους ανάμεσα σε ορισμένες β.ε.λ. χωρίς να βελτιώνεται η ζ.
- Υπάρχει τρόπος να αποφύγουμε τους κύκλους.

Προβλήματα IV και V - Παράδειγμα

- Θεωρούμε το π.γ.π. σε τυπική μορφή

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{υπό} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

με αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 2x_1 & + & 3x_2 \\ \hline w_1 & = & 2 & - & x_1 & - & 2x_2 \\ w_2 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 \\ w_3 & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \end{array}$$

Προβλήματα IV και V - Παράδειγμα

- Από το αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 0 & + & 2x_1 & + & \boxed{3x_2} \\ \hline w_1 & = & 2 & - & x_1 & - & 2x_2 \\ w_2 & = & 1 & - & x_1 & + & x_2 \\ \boxed{w_3} & = & 1 & + & x_1 & - & x_2 \end{array}$$

πάμε στο

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 3 & + & 5x_1 & - & 3w_3 \\ \hline w_1 & = & 0 & - & 3x_1 & + & 2w_3 \\ w_2 & = & 2 & & & - & w_3 \\ x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & w_3 \end{array}$$

- Στο 1ο λεξικό, καθώς αυξάνουμε την x_2, οι w_1, w_3 γίνονται ταυτόχρονα 0.
- Υπάρχει επιλογή για την εξερχόμενη μεταβλητή.
- Στο επόμενο λεξικό υπάρχει βασική με τιμή 0. Έχουμε εκφυλισμένη β.ε.λ.

Προβλήματα IV και V - Παράδειγμα

- Από το 2ο λεξικό

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 3 & + & \boxed{5x_1} & - & 3w_3 \\ \hline \boxed{w_1} & = & 0 & - & 3x_1 & + & 2w_3 \\ w_2 & = & 2 & & & - & w_3 \\ x_2 & = & 1 & + & x_1 & - & w_3 \end{array}$$

πάμε στο

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & 3 & - & 5/3w_1 & + & 1/3w_3 \\ \hline x_1 & = & 0 & - & 1/3w_1 & + & 2/3w_3 \\ w_2 & = & 2 & & & - & w_3 \\ x_2 & = & 1 & - & 1/3w_1 & - & 1/3w_3 \end{array}$$

- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν άλλαξε.
- Η β.ε.λ. δεν άλλαξε.
- Άλλαξε η βάση (ποιές μεταβλητές είναι βασικές).

Προβλήματα IV και V - Παράδειγμα

- Από το 3ο λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 3 & - & 5/3w_1 & + & 1/3w_3 \\
\hline
x_1 & = & 0 & - & 1/3w_1 & + & 2/3w_3 \\
w_2 & = & 2 & & & - & w_3 \\
x_2 & = & 1 & - & 1/3w_1 & - & 1/3w_3
\end{array}
$$

πάμε στο

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 11/3 & - & 5/3w_1 & - & 1/3w_2 \\
\hline
x_1 & = & 4/3 & - & 1/3w_1 & - & 2/3w_2 \\
w_3 & = & 2 & & & - & w_2 \\
x_2 & = & 1/3 & - & 1/3w_1 & + & 1/3w_2
\end{array}
$$

- Το τελευταίο λεξικό δίνει άριστη λύση.

Εκφυλισμένα λεξικά - Εκφυλισμένες β.ε.λ.

- Ένα λεξικό λέγεται εκφυλισμένο αν μια βασική μεταβλητή του έχει την τιμή 0. Π.χ.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta & = & 6 & + & w_3 & + & 5x_2 & + & 4w_1 \\
\hline
x_3 & = & 1 & - & 2w_3 & - & 2x_2 & + & 3w_1 \\
w_2 & = & 4 & + & w_3 & + & x_2 & - & 3w_1 \\
x_1 & = & 3 & - & 2w_3 & & & & \\
w_4 & = & 2 & + & w_3 & & & - & w_1 \\
w_5 & = & 0 & & & - & x_2 & + & w_1
\end{array}$$

- Ένα βήμα της Simplex (οδήγηση) λέγεται εκφυλισμένο αν δεν αλλάζει την αντικειμενική συνάρτηση. Π.χ.
  - x_2 μπαίνει, w_5 βγαίνει $\rightarrow$ εκφυλισμένο βήμα.
  - w_1 μπαίνει, w_2 βγαίνει $\rightarrow$ μη-εκφυλισμένο βήμα.

Κυκλικότητα

- Ένας κύκλος είναι μια ακολουθία λεξικών Simplex που καταλήγουν στο ίδιο λεξικό από το οποίο ξεκίνησαν.
- Κάθε λεξικό σε έναν κύκλο είναι εκφυλισμένο.
- Όλα τα ενδιάμεσα λεξικά δίνουν στην αντικειμενική συνάρτηση την ίδια τιμή.

Κυκλικότητα

- Όταν η Simplex πέσει σε εκφυλισμένο λεξικό υπάρχει η περίπτωση να "παγιδευθεί" σε κύκλο και να μη φθάσει σε βέλτιστη λύση.
- Ερώτημα: Υπάρχει τρόπος να αποφευχθεί αυτό;
- Ερώτημα: Υπάρχει κάποιος κανόνας οδήγησης (επιλογή εισερχόμενης και εξερχόμενης μεταβλητής) ώστε να αποφευχθεί η κυκλικότητα;

Κανόνες οδήγησης και κυκλικότητα

- Ο συνήθης κανόνας οδήγησης του μέγιστου συντελεστή (επίλεξε τη μη-βασική μεταβλητή με το μεγαλύτερο συντελεστή στην ζ) μπορεί να οδηγήσει σε κυκλικότητα.
- Έχει κατασκευαστεί τέτοιο παράδειγμα.
- Ο απλός κανόνας οδήγησης του Bland (επίλεξε τη μη-βασική μεταβλητή με το μικρότερο δείκτη να μπει και τη βασική μεταβλητή με το μικρότερο δείκτη για να βγει) δεν οδηγεί ποτέ σε κυκλικότητα.
  Για την εφαρμογή του κανόνα αυτού ονομάζουμε τις περιθώριες μεταβλητές με το ίδιο γράμμα με τις αρχικές και αριθμούμε τους δείκτες τους μετά τους δείκτες των αρχικών μεταβλητών.

Συχνότητα της κυκλικότητας

- Ακόμα και με το συνήθη κανόνα οδήγησης του μέγιστου συντελεστή η κυκλικότητα είναι σπάνια για μικρά προβλήματα.
- Ένα πρόγραμμα που παράγει τυχαία 2×4 εκφυλισμένα λεξικά δεν κατέληξε σε κυκλικότητα σε 1 δισεκατομύριο παραδείγματα.
- Για μεγάλα προβλήματα με πολλά 0, η κυκλικότητα μπορεί να προκύψει κατά φυσικό τρόπο.

Αποφυγή κυκλικότητας - Μέθοδος διαταραχής

- Ένας άλλος τρόπος αποφυγής της κυκλικότητας είναι η διαταραχή των τιμών των βασικών μεταβλητών που είναι 0, κατά ϵ.
- Αυτό γίνεται κάθε φορά που εμφανίζονται σε ένα λεξικό.
- Αν υπάρχουν πολλές βασικές μεταβλητές που είναι 0, τις διαταράσσουμε όλες σε διαφορετικές κλίμακες, δηλαδή εισάγουμε $\epsilon_1, \epsilon_2 \ldots, \epsilon_k$ και εφαρμόζουμε τη Simplex, υποθέτοντας ότι

$$\text{Άλλες τιμές } >> \epsilon_1 >> \epsilon_2 >> \cdots >> \epsilon_k > 0.$$

Μέθοδος διαταραχής - Παράδειγμα

- Θεωρούμε το π.γ.π. σε τυπική μορφή

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 2x_1 & + & 4x_2 & & \\ \text{υπό} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & -3x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & 4x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

  με αρχικό λεξικό

$$\begin{array}{ccccccc} \zeta & = & 0 & + & 2x_1 & + & 4x_2 \\ \hline w_1 & = & 0 & + & x_1 & - & x_2 \\ w_2 & = & 0 & + & 3x_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & 0 & - & 4x_1 & + & x_2 \end{array}$$

- Οι βασικές μεταβλητές w_1, w_2, w_3 είναι 0 και τις αντικαθιστούμε με $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ με $\epsilon_1 >> \epsilon_2 >> \epsilon_3 > 0$.

Μέθοδος διαταραχής - Παράδειγμα

- Από το αρχικό λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & 0 & + & 2x_1 & + & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & 0 & + & x_1 & - & x_2 \\
w_2 & = & 0 & + & 3x_1 & - & x_2 \\
w_3 & = & 0 & - & 4x_1 & + & x_2
\end{array}
$$

πάμε στο αρχικό διαταραγμένο λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & & & & & & & + & 2x_1 & + & 4x_2 \\
\hline
w_1 & = & 0 & + & \epsilon_1 & & & & & + & x_1 & - & x_2 \\
w_2 & = & 0 & & & + & \epsilon_2 & & & + & 3x_1 & - & x_2 \\
w_3 & = & 0 & & & & & + & \epsilon_3 & - & 4x_1 & + & x_2
\end{array}
$$

Μέθοδος διαταραχής - Παράδειγμα

- Από το λεξικό

$$\begin{array}{rclcccccccccc}
\zeta & = & 0 & & & & & & & + & 2x_1 & + & \boxed{4x_2} \\
\hline
w_1 & = & 0 & + & \epsilon_1 & & & & & + & x_1 & - & x_2 \\
\boxed{w_2} & = & 0 & & & + & \epsilon_2 & & & + & 3x_1 & - & x_2 \\
w_3 & = & 0 & & & & & + & \epsilon_3 & - & 4x_1 & + & x_2
\end{array}$$

διαλέγουμε εισερχ. x_2, εξερχόμενη w_2 και πάμε στο λεξικό

$$\begin{array}{rclcccccccccc}
\zeta & = & 0 & & & + & 4\epsilon_2 & & & + & 14x_1 & - & 4w_2 \\
\hline
w_1 & = & 0 & + & \epsilon_1 & - & \epsilon_2 & & & - & 2x_1 & + & w_2 \\
x_2 & = & 0 & & & + & \epsilon_2 & & & + & 3x_1 & - & w_2 \\
w_3 & = & 0 & & & + & \epsilon_2 & + & \epsilon_3 & - & x_1 & - & w_2
\end{array}$$

Μέθοδος διαταραχής - Παράδειγμα

- Από το λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & & & + & 4\epsilon_2 & & & & & \boxed{14x_1} & - & 4w_2 \\
\hline
w_1 & = & 0 & + & \epsilon_1 & - & \epsilon_2 & & & - & & 2x_1 & + & w_2 \\
x_2 & = & 0 & & & + & \epsilon_2 & & & + & & 3x_1 & - & w_2 \\
\boxed{w_3} & = & 0 & & & + & \epsilon_2 & + & \epsilon_3 & - & & x_1 & - & w_2
\end{array}
$$

διαλέγουμε εισερχ. x_1, εξερχόμενη w_3 και πάμε στο λεξικό

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
\zeta & = & 0 & & & + & 18\epsilon_2 & + & 14\epsilon_3 & - & 14w_3 & - & 18w_2 \\
\hline
w_1 & = & 0 & + & \epsilon_1 & - & 3\epsilon_2 & - & 2\epsilon_3 & + & 2w_3 & + & 3w_2 \\
x_2 & = & 0 & & & + & 4\epsilon_2 & + & 3\epsilon_3 & - & 3w_3 & - & 4w_2 \\
x_1 & = & 0 & & & + & \epsilon_2 & + & \epsilon_3 & - & w_3 & - & w_2
\end{array}
$$

- Εδώ όλοι οι συντελεστές των μη-βασικών μεταβλητών στην ζ είναι ≤ 0. Έχουμε βρει άριστη β.ε.λ.

Μέθοδος διαταραχής - Παράδειγμα

- Οι $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ αντιμετωπίζονται ως παράμετροι, όχι ως μεταβλητές (ούτε μπαίνουν στη βάση, ούτε βγαίνουν).
- Η αντικειμενική συνάρτηση βελτιώνεται σε κάθε βήμα: $0 \to 4\epsilon_2 \to 18\epsilon_2 + 14\epsilon_3$.
- Το ποιά μεταβλητή θα μπει στη βάση καθορίζεται από τον κανόνα του μέγιστου συντελεστή.
- Το ποιά μεταβλητή θα βγει από τη βάση καθορίζεται μονοσήμαντα, λαμβάνοντας υπόψη τη διαφορά τάξης μεγέθους των $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

Τερματισμός της Simplex και κυκλικότητα

Θεώρημα

Η μέθοδος Simplex είτε τερματίζεται σε πεπερασμένο αριθμό λεξικών καταλήγοντας

- *σε διαπίστωση κενής εφικτής περιοχής ή*
- *σε βέλτιστη β.ε.λ. ή*
- *σε διαπίστωση μη-φραγμένης αντικειμενικής συνάρτησης*

είτε

- *καταλήγει σε κυκλικότητα.*

Τερματισμός της Simplex και κυκλικότητα

- Δεν υπάρχει αρχική β.ε.λ. → Φάση I της Simplex.
  Τέλος φάσης I → αρχική β.ε.λ. ή κενή εφικτή περιοχή.
- Αρχική β.ε.λ. → Φάση II της Simplex.
- Αν δεν έχουμε εκφυλισμένες β.ε.λ., σε κάθε λεξικό της φάσης II η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης βελτιώνεται ή αποκαλύπτεται ότι το π.γ.π. είναι μη φραγμένο.
- Πεπερασμένος αριθμός δυνατών λεξικών → Εύρεση βέλτιστης β.ε.λ. σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων, αν δεν έχουμε κυκλικότητα.

Αποφυγή της κυκλικότητας

Θεώρημα

Η μέθοδος Simplex σε συνδυασμό με τη μέθοδο της διαταραχής που επιλέγει ποιά μεταβλητή θα βγει από τη βάση με τον λεξικογραφικό κανόνα οδήγησης αποφεύγει την κυκλικότητα.

Θεώρημα

Η μέθοδος Simplex με τον κανόνα του Bland του μικρότετου δείκτη για την επιλογή εισερχόμενων και εξερχόμενων μεταβλητών αποφεύγει την κυκλικότητα.

Θεμελιώδες Θεώρ. Γραμμικού Προγραμματισμού

Θεώρημα

Για ένα π.γ.π. σε τυπική μορφή ισχύουν τα ακόλουθα:

- *Μη-κενή εφικτή περιοχή ⇒ Ύπαρξη β.ε.λ.*
- *Ανυπαρξία βέλτιστης β.ε.λ. ⇒ Κενή εφικτή περιοχή ή μη-φραγμένο π.γ.π.*
- *Ύπαρξη βέλτιστης εφικτής λύσης ⇒ Ύπαρξη βέλτιστης β.ε.λ.*

- Φάση I → Βρίσκει β.ε.λ. αν η εφικτή περιοχή δεν είναι κενή.
- Φάση II → Βρίσκει βέλτιστη β.ε.λ. ή διαπιστώνει ότι το π.γ.π. είναι μη-φραγμένο.
- Ύπαρξη βέλτιστης εφικτής λύσης → μη-κενή εφικτή περιοχή, φραγμένο π.γ.π. → Ύπαρξη βέλτιστης β.ε.λ.