Μάθημα 10

19/12/22

Παράδειγμα

Να λυθεί το πρόβλημα ελέγχου αποθεμάτων με $N=4$, $d_t=3$, $h_t=1$, $t=1,2,3,4$, $M=3$, $m=4$

και

a_t	0	1	2	3	4
$k_t(a_t)$	0	5	9	13	14

$t=1,2,3,4$

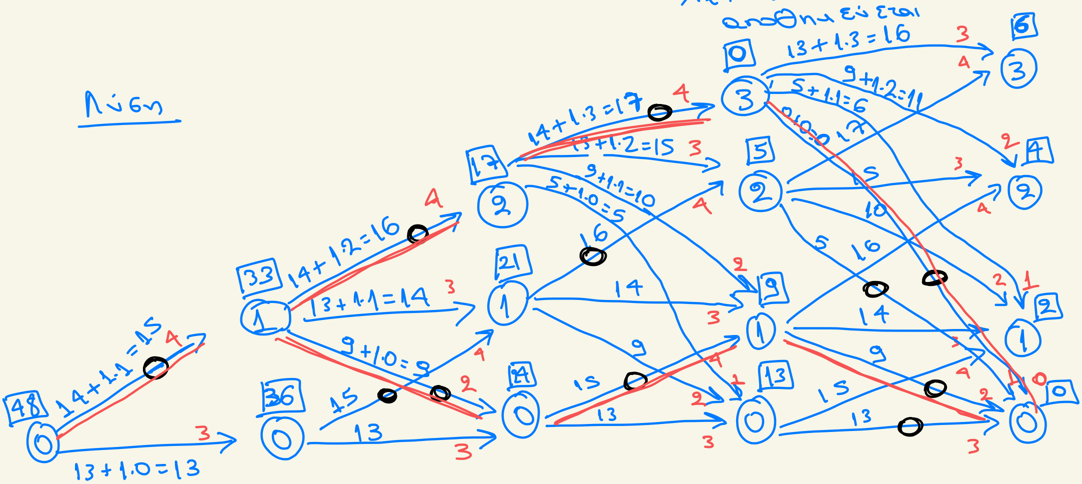
$x_1=0$

$\ell(x_5)=2\cdot x_5$

x_t: απόθεμα, a_t: ποσότητα που θα παραχθεί, d_t

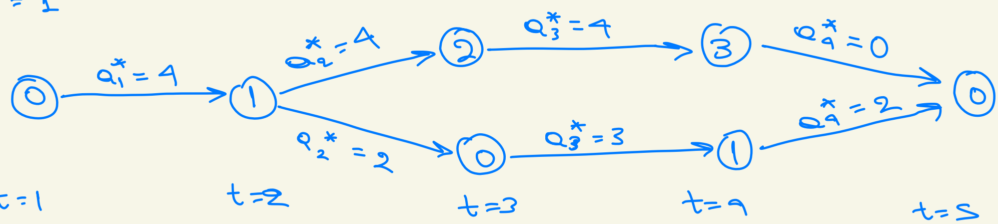
$\underbrace{x_t+a_t-d_t}=x_{t+1}$ αποθηκεύεται

Λύση



ελάχιστο κόστος = 48

t=1 t=2 t=3 t=4 t=5



2.4. Πρόβλημα κατανομής πόρων / φόρτωσης φορτίου

Υπάρχουν b μονάδες κάποιου αγαθού (π.χ. κεφάλαιο χρημάτων, ώρες εργασίας, ποσότητα πρώτης ύλης) οι οποίες πρέπει να κατανεμηθούν σε N δραστηριότητες.

Έστω

a_t = ένταση δραστηριότητας t, $t=1,2,\dots,N$

$\Pi_t(a_t)$ = ποσότητα αγαθού που απαιτείται για να κάνουμε τη δραστηριότητα t με ένταση a_t, $t=1,2,\dots,N$

$R_t(a_t)$ = απόδοση δραστηριότητας t αν αυτή γίνει με ένταση a_t.

Να βρεθεί η βέλτιστη κατανομή των b στις διάφορες δραστηριότητες, δηλαδή αυτή που επιτυγχάνει τη μέγιστη συνολική απόδοση.

Παράδειγμα

Αν έχω φορτηγό με συγκεκριμένη χωρητικότητα $b = 40m^3$ που πρέπει να γεμίσω με κούτες 3 ειδών ώστε να μεγιστοποιήσω τη συνολική αξία που θα μεταφέρω

είδος (t)	όγκος (v_t)	αξία (r_t)
1	3	4
2	5	7
3	8	10

a_t = # κουτιών είδους t

$\Pi_t(a_t) = v_t \cdot a_t$

$R_t(a_t) = r_t \cdot a_t$

Παράδειγμα

Αν έχω συγκεκριμένες ώρες διαβάσματος $b = 12$ και πρέπει να τις κατανείμω στο διάβασμα 3 μαθημάτων ώστε να μεγιστοποιήσω τον συνολικό βαθμό που θα πάρω και ισχύει ότι

μάθημα t \ ώρες διαβ	2	3	4	5
1	3	5	6	7
2	6	7	8	10
3	4	5	7	8

Στο στάδιο t αποφασίζω πόσες ώρες θα διαβάσω για το μάθημα t.

$a_t = \#$ ωρών του μαθ t.

$h_t(a_t) = a_t$

$R_t(a_t)$: δίνεται από τον πίνακα

Διατύπωση σαν π.δ.π

- **Στάδια**: στο στάδιο t αποφασίζουμε την ένταση της δραστηριότητας t, $t = 1, 2, \dots, N$
- **Κατάσταση**: x_t : ποσότητα αγαθού που απομένει διαθέσιμη στην αρχή του σταδίου t.
- **Αποφάσεις**: a_t : ένταση δραστηριότητας t

$$0 \le h_t(a_t) \le x_t$$

$$D_t(x_t) = \{a_t : 0 \le h_t(a_t) \le x_t\}$$

▷ **Δυναμική συστήματος**

$$x_{t+1} = g_t(x_t, a_t) = x_t - n_t(a_t)$$

▷ **Άμεσο κέρδος**

$$c_t(x_t, a_t) = R_t(a_t)$$

▷ **Τερματικό κέρδος**

$$\hat{c}(x_{N+1}) = 0$$

Εξισώσεις βελτιστοποίησης

$$v(t, x_t) = \max_{a_t \in D_t(x_t)} \{ c_t(x_t, a_t) + v(t+1, g_t(x_t, a_t)) \}, \quad t = 1, 2, \dots, N$$

$$v(N+1, x_{N+1}) = 0$$

Εφαρμογή (Το πρόβλημα του σακιδίου)

Ένας εκδρομέας θέλει να φορτώσει το σακίδιό του με αντικείμενα 4 κατηγοριών. Ο συνολικός όγκος του σακιδίου είναι 8 μονάδες. Η θρεπτική αξία μίας μονάδας κατηγορίας t είναι w_t και ο όγκος είναι v_t

t	v_t	w_t
1	3	7
2	6	16
3	7	19
4	5	15

Θέλουμε να δούμε πόσες μονάδες από κάθε κατηγορία θα μπει στο σακίδιο ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνολική θρεπτική αξία.

Λύση

$b = 9$

a_t = μονάδες που θα πάρω από κατηγορία φορτίου t.

$r_t(a_t) = v_t \cdot a_t$

$R_t(a_t) = w_t \cdot a_t$

t	x_t	a_t	$C_t(x_t, a_t)$ $= w_t \cdot a_t$	x_{t+1} $= x_t - v_t \cdot a_t$	$v(t, x)$
1	9	0	0	9	$0+19=19$
		1	7	$9-1\cdot3=6$	$7+16=23*$
		2	14	3	$14+0=14$
		3	21	0	$21+0=21$
2	0	0	0	0	$0+0=0*$
	3	0	0	3	$0+0=0*$
	6	0	0	6	$0+15=15$
		1	16	0	$16+0=16*$
	9	0	0	9	$0+19=19*$
		1	16	3	$16+0=16$
3	0	0	0	0	$0+0=0*$
	3	0	0	3	$0+0=0*$
	6	0	0	6	$0+15=15*$
	9	0	0	9	$0+15=15$
		1	19	2	$19+0=19*$
4	0	0	0	0	$0+0=0*$
	2	0	0	2	$0+0=0*$

3	0	0	3	0 + 0 = 0*
6	0	0	6	0 + 0 = 0
	1	15	1	15 + 0 = 15*
9	0	0	9	0 + 0 = 0
	1	15	4	15 + 0 = 15*

5	0		0
	1		0
	2		0
	3		0
	4		0
	6		0
	9		0

$$9 \xrightarrow{a_1^*=1} 6 \xrightarrow{a_2^*=1} 0 \xrightarrow{a_3^*=0} 0 \xrightarrow{a_4^*=0} 0$$

t = 1, t = 2, t = 3, t = 4, t = 5

μέγιστη απόδοση = 23