08-12-22

Βέλτιστη λύση του προβλήματος:

$$6 \xrightarrow{\alpha_1^*=1} 4 \xrightarrow{\alpha_2^*=0} 4 \xrightarrow{\alpha_3^*=1} 1 \xrightarrow{\alpha_4^*=1} 0 \xrightarrow{\alpha_5^*=0} 0$$

$t=1 \quad t=2 \quad t=3 \quad t=4 \quad t=5 \quad t=6$

με συνολική αξία 11 μονάδες

1) ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ-ΣΥΝΤΗΡΗΣΗΣ μηχανήματος

Εχουμε ενα μηχάνημα και επιθυμούμε να το χρησιμοποιήσουμε τις επόμενες N χρονικές περιόδους

Στην αρχή κάθε περιοδου (ετους) Βλεπουμε την ηλικία του και αποφασίζουμε αν θα το συντηρήσουμε ή θα το αντικαταστήσουμε με νέο Δεδομενο

— ΔΕΔΟΜΕΝΑ —

1) κοστος συντήρησης του μηχανηματος (ετήσιο) αν στην αρχή του έτους η ηλικία του είναι $x \equiv C(x)$

$K(x)$ = τιμή μεταπώλησης μηχανημ. όταν αυτό έχει ηλικία x

2) T = τιμή αγοράς νέου μηχανήματος

3) H = ανώτατο όριο ηλικίας

Ζητάμε τον βέλτιστο προγραμματισμό συντήρησης-αντικαταστασης ο οποίος να ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Διατύπωση προβλήματος ως π.δ.π.

Στάδια : οι περίοδοι λειτουργίας $t = 1, 2, \dots, N, N+1$
↳ τερματικό στάδιο

- Χρονικός ορίζοντας = N

□ καταστάσεις : x_t = ηλικία μηχανήματος στην αρχή του έτους t

αποφάσεις : $\alpha_t = \begin{cases} 1 & \text{συντήρηση} \\ 2 & \text{αντικατάσταση} \end{cases}$

(!! Σημαντικό) Σύνολα Δυνατών αποφάσεων :

$D_t(x_t) = \{1, 2\}$ αν $x_t \in \{1, 2, \dots, H-1\}$

και $D_t(H) = \{2\}$

ή αλλιώς $D_t(x_t) = \begin{cases} \{1, 2\} & \text{αν } x_t < H \\ \{2\} & \text{για } x_t = H \end{cases}$

- ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$x_{t+1} = g_t(x_t, \alpha_t) = \begin{cases} x_t + 1 & \text{αν } \alpha_t = 1 \\ 1 & \text{αν } \alpha_t = 2 \end{cases}$

→ Άμεσο κόστος : $c_t(x_t, \alpha_t) = \begin{cases} c(x_t) & \alpha_t = 1 \\ T - \mu(x_t) + c(0) & \alpha_t = 2 \end{cases}$

ΤΕΡΜΑΤΙΚΟ ΚΟΣΤΟΣ

$\hat{c}(x_{N+1}) = -\mu(x_{N+1})$ ⟶ κέρδος, γι' αυτό μπαίνει με −

Εξισώσεις Βελτιστοποίησης / Bellman

$$v(t, x_t) = \min_{a_t \in D_t(x_t)} \left\{ c_t(x_t, a_t) + v\left(t+1, g_t(x_t, a_t)\right) \right\}$$

$$t = 1, 2, \dots, N$$

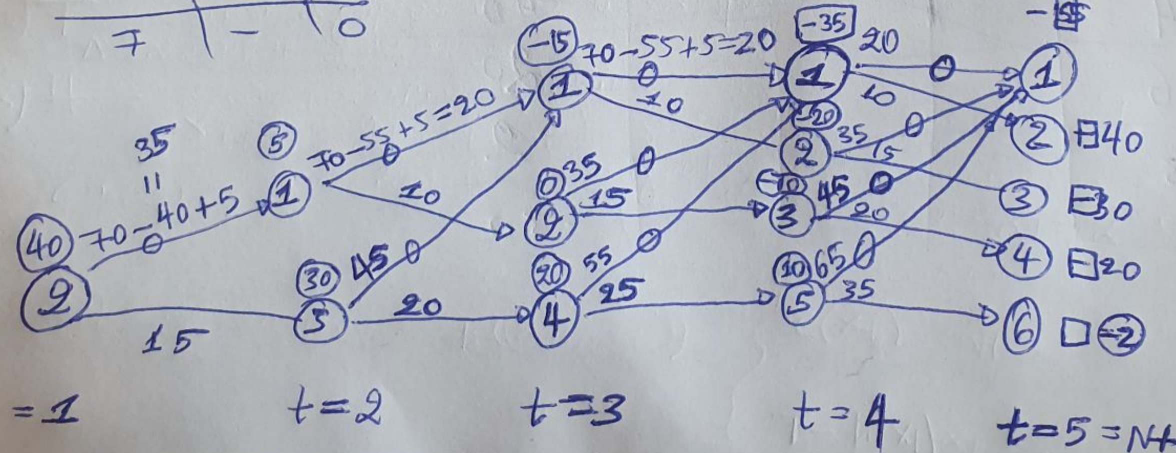
και $v(N+1, x_{N+1}) = \hat{c}(x_{N+1})$

<u>Εφαρμογή</u>: Να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική για το πρόβλημα Αντικατάστασης – Συντήρησης με τα παρακάτω Δεδομένα.

$N = 4$, $\# = 7$ $\quad x_1 = 2$, $\quad T = 70 \quad N+1 = 5$

↳ (παίρνω 4 αποφάσεις) $\quad$ ↳ αρχική ηλικία $\quad$ τερματική κατάσταση

x	c(x)	μ(x)
0	5	–
1	10	55
2	15	40
3	20	30
4	25	20
5	35	10
6	50	2
7	–	0



$\boxed{\longrightarrow \text{Άρα το ελάχιστο κόστος είναι } 40}$

$$2 \xrightarrow{a_1^* = 2} 1 \xrightarrow{a_2^* = 2} 1 \xrightarrow{a_3^* = 2} 1 \xrightarrow{a_4^* = 1} 1$$

$t=1 \qquad t=2 \qquad t=3 \qquad t=4 \qquad t=5$

(Σε μια τερματική καταστασή που δεν θα ηθελα να φτάσω βάζω απειρο κόστος στην καταστασή)

$2^{ος}$ τροπος

t	x	α	C(x,α)	x_{t+1}	V(t,x)
1	2	1	15	3	15+30=45
		2	70−40+5	1	35+5=40 *
2	1	1	70−55+5=20	2	10+0=10
		2	10	1	20+(−15)=5 *
	3	1	20	4	20+20=40
		2	45	1	45+(−15)=30 *
3	1	1	10	2	10+(−20)=−10
		2	20	1	20+(−35)=−15 *
	2	1	15	1	15+(−10)=5
		2	35	3	35+(−35)=0 *
	4	1	25	1	25+10=35
		2	55	5	55−35=20 *
4	1	1	10	2	10+(−40)=−30
		2	20	1	20+(−55)=−35 *
	2	1	15	3	15−30=−15
		2	35	1	35−55=−20 *
	3	1	20	4	20−20=0
		2	45	1	45−55=−10 *
	5	1	35	6	35−2=33
		2	65	1	65−55=10 *
5	1				
	2				−55
	4				−40
	6				−20
	3				−2
					−30

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΛΕΓΧΟΥ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ

Βιομηχανία παράγει ενα προϊον και προκειται να λειτουργήσει για τις επομενες N χρονικές περιόδους. Στην αρχή καθε ετους παράγεται ενας αριθμός προϊοντων είτε για να ικανοποιήσει την ζήτηση της περιόδου είτε να γίνει απόθεμα για ζητήσεις επόμενων περιόδων. Μετά την παραγωγή ικανοποιείται η ζητηση η οποία είναι γνωστή. Το απόθεμα αποθηκευεται για μελλοντική χρήση. Θέλουμε να προγραμματισθεί η παραγωγή ώστε να ικανοποιείται η ζητηση και να ελαχιστοποιηθεί το κόστος

Δεδομένα:

N: μήκος ορίζοντα

d_t: ζήτηση την περιοδο t $t=1,2,\dots,N$

m = μεγιστη δυνατή παραγωγή σε μια περιοδο

$K_t(a)$ = κοστος παραγωγής a μοναδων την περιοδο t
$t=1,2,\dots,N$, $\alpha=0,1,\dots,m$

h_t = κοστος αποθήκευσης ανα μονάδα προϊοντος την περιοδο t, $t=1,2,\dots,N$

M = χωρητικοτητα αποθήκης (κατασταση ≡ απόθεμα)

Διατύπωση ως πδ.π :

Στάδια: Στην αρχή καθε περιόδου αποφασίζω την ποσότητα παραγωγής $t=1,2,\dots,N,(N+1)$ → τερματικο σταδιο

Καταστάσεις: x_t : απόθεμα στην αρχη της περιόδου t

Αποφάσεις: α_t = μονάδες προϊοντος που θα παραχθούν στην αρχή του σταδιου t

$x_t+\alpha_t \geq d_t$ (Ικανοποιηση ζητησης)

$D_t(x_t)$. $\Rightarrow \alpha_t \geq d_t - x_t$

$x_t + a_t - d_t \le M$

Άρα $\alpha_t \le M - x_t + d_t$ (χωρητικότητα αποθήκης)

$\alpha_t \le m$ (Δυναμικότητα παραγωγής)

και $\alpha_t \ge 0$

$x_t + a_t \ge d_t \Leftrightarrow a_t \ge d_t - x_t$

$x_t + a_t - d_t \le M \Leftrightarrow a_t \le M + d_t - x_t$

$\alpha_t \le m$

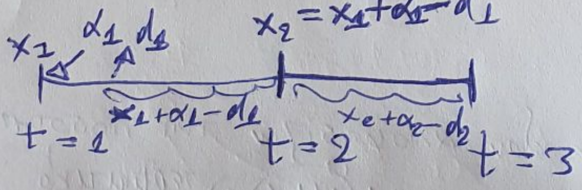
$\alpha_t \ge 0$

$\Longrightarrow \alpha_t \le \min\{m, M + d_t - x_t\}$

και $\alpha_t \ge \max\{0, d_t - x_t\}$

$\min\{m, M + d_t - x_t\} \ge \alpha_t \ge \max\{0, d_t - x_t\}$

Άρα $D_t(x_t) = \{\alpha_t \in \mathbb{N} : \max\{0, d_t - x_t\} \le \alpha_t \le \min\{M + d_t - x_t, m\}\}$



ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

$x_{t+1} = z_t(x_t, \alpha_t) = x_t + \alpha_t - d_t$

Άμεσο κόστος: $C_t(x_t, \alpha_t) = \underbrace{k_t(\alpha_t)}_{\text{κόστος παραγωγής}} + \underbrace{h_t(x_t + \alpha_t - d_t)}_{\text{κόστος αποθήκ}}$

Τερματικό κόστος : (Υποθέσεις)

1) Αν ότι μείνει στην αποθήκη καταστρέφεται με κόστος θ ανά μονάδα

$$\hat{c}(x_{N+1}) = \theta \cdot x_{N+1}$$

2) Αν το απόθεμα πωλείται με κέρδος ξ ανα μον.

$$\hat{c}(x_{N+1}) = -\xi \cdot x_{N+1} \quad (\text{κοστος})$$

3) Αν πρέπει υποχρεωτικά να μείνουν k μονάδες

$$\hat{c}(x_{N+1}) = \begin{cases} \infty & \text{αν } x_{N+1} \neq k \\ 0, & x_{N+1} = k \end{cases}$$