24-11-22

Ενότητα 5 Μη γραμμικός προγραμματισμός

Προβλήματα μη γραμμικού προγρ. χωρίς περιορισμούς

$$\max f(\underline{x}) \quad \text{υπό} \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

και $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους 2ης τάξης

πχ

$$\max 5x_1^2 - x_2^2 + 7x_1 - 3x_2 + 5 - 5x_1x_2$$
$$\text{υπό} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

<u>ορισμοί</u>: 1) Το $\underline{x}^*$ <u>ολικό μέγιστο</u> της f αν $f(x^*) \geq f(\underline{x})$ $\forall$ για $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

2) Το x^* <u>τοπικό μέγιστο</u> της f αν $f(x^*) \geq f(\underline{x})$ κσ $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ $\|x - x^*\| < \varepsilon$ για κάποιο $\varepsilon > 0$

<u>ορισμός</u>: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1) Αναδελτα της f στο σημείο $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι

$$\nabla f(\underline{x}) \overset{ορσ}{=} \left(\frac{df}{dx_1}(\underline{x}), \frac{df}{dx_2}(\underline{x}), \dots, \frac{df}{dx_n}(\underline{x}) \right)$$

για $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

2) <u>Εσσιανός πίνακας</u> της f:

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} \frac{d^2f}{dx_1^2}(\underline{x}) & \frac{d^2f}{dx_1 dx_2} & \cdots & \frac{d^2f}{dx_1 dx_n}(\underline{x}) \\ \frac{d^2f}{dx_2 dx_1}(\underline{x}) & \frac{d^2f}{dx_2^2} & \cdots & \frac{d^2f}{dx_2 dx_n}(\underline{x}) \\ \vdots & & & \\ \frac{d^2f}{dx_n dx_1}(\underline{x}) & \cdots & \cdots & \frac{d^2f}{dx_n^2} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: $f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = g = (1-2x_1 \, , \, x_3-2x_2 \, , \, 2+x_2-2x_3)$

$\nabla f(1,2,0) = g = (-1,-4,4)$

$$Hf(x_1,x_2,x_3) = H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ορισμός: Έστω A ένας πίνακας $n \times n$

ο A λέγεται 1) θετικά ορισμένος αν $\underline{x}^T A \underline{x} > 0$ $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{x} \neq 0$ (διάνυσμα στήλη)

2) θετικά ημιορισμένος αν $\underline{x}^T A \underline{x} \geq 0 \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

3) Αρνητικά ορισμένος αν $\underline{x}^T A \underline{x} < 0 \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

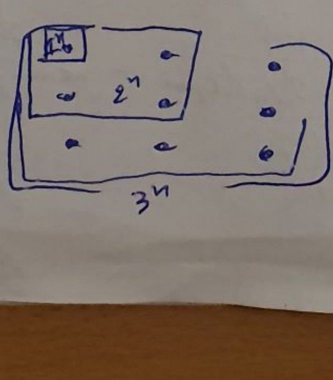
4) Αρνητικά ημιορισμένος αν $\underline{x}^T A \underline{x} \leq 0 \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

5) Μη ορισμένος αν $\exists \underline{x} \in \mathbb{R}^n$: $\underline{x}^T A \underline{x} > 0$ και $\exists \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ με $\underline{y}^T A \underline{y} < 0$ (Μη ορισμένος πίνακας)

ΚΡΙΤΗΡΙΑ:

1) A αρνητικά ορισμένος ή (ημι-ορισμένος) $\Longleftrightarrow$ −A θετικά ορισμένος (ημι-ορισμένος)

2) A θετικά ορισμένος αν όλες οι κύριες υποορίζουσες του είναι θετικές



Παράδειγμα:

νδο ο $A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ είναι αρνητικά ορισμένος

Αρκεί νδο $-A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος

έχουμε $|2|=2>0$ και $\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4>0$

Άρα $-A$ θετικά ορισμένος.

<u>Ικανή συνθήκη τοπικού Μεγίστου</u>

$\left.\begin{array}{l}\text{αν υπάρχει } x^*\in\mathbb{R}^n \text{ τ/ω } \nabla f(x^*)=0\\ \text{και } Hf(x^*) \text{ αρνητικά ορισμένος}\end{array}\right\}\Rightarrow x^*$ τοπικό Μέγιστο

<u>παράδειγμα:</u> Να βρεθεί το τοπικό μέγιστο της

$f(\underline{x})=-x_1^2-x_2^2+2x_1-3x_2+x_1x_2$

<u>λύση</u>: $\nabla f(x_1,x_2)=\left(-2x_1+2+x_2,\ -2x_2-3+x_1\right)$

$Hf(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

Βρίσκω που μηδενίζεται το ανάδελτα

$\nabla f(x_1,x_2)=\underline{0}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}-2x_1+2+x_2=0\\ -2x_2-3+x_1=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}x_2=2x_1-2\\ -2(2x_1-2)-3+x_1=0\end{array}$

$\left.\begin{array}{r}x_2=2x_1-2\\ -3x_1=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_2=-\frac{4}{3}\\ x_1=\frac{1}{3}\end{array}\right\}$ άρα $x^*=\left(\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$

Ελέγχω αν $Hf\left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ είναι

αρνητικά ορισμένος

Αρκεί νδο $-Hf\left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right)$ θετικά ορισμένος

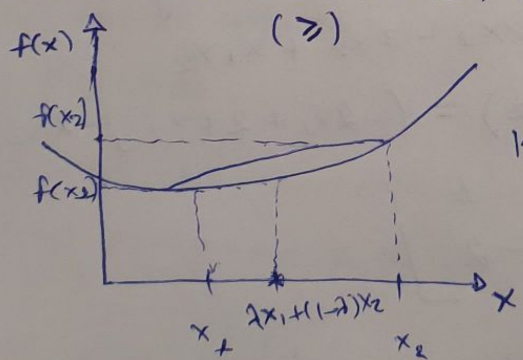
$$\left.\begin{array}{l} |2| = 2 > 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -Hf\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ θετικά ορισμένος}$$

Άρα ο $Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ αρνητικά ορισμένος

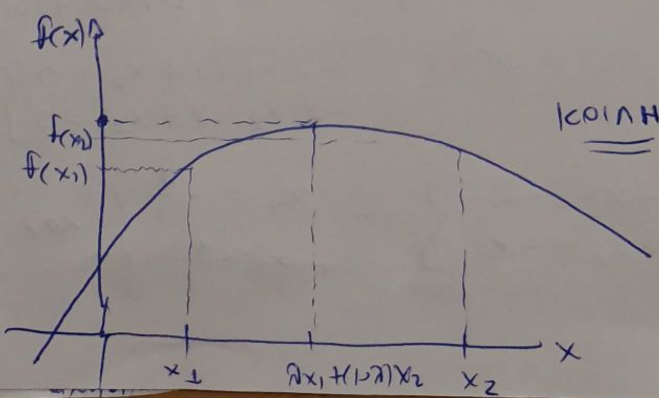
όποτε $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ τοπικό μέγιστο!!

Ορισμός: Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή (κοίλη) όταν $\forall\, \underline{x_1}, \underline{x_2} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0,1]$ ισχύει

$$f(\lambda \underline{x_1} + (1-\lambda)\underline{x_2}) \leq \lambda f(\underline{x_1}) + (1-\lambda) f(\underline{x_2})$$
$$(\geq)$$



ΚΥΡΤΗ



ΚΟΙΛΗ

Θεώρημα: (κριτήριο κυρτότητας)

Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή (κοίλη)

αν και μόνο αν $Hf(\underline{x})$ είναι θετικά ορισμένος

(αρνητικά ορισμένος) $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

(αν έχουμε μια κοίλη f και $\underline{x}$ τοπικό μέγιστο

θα είναι και ολικό)

Θεώρημα: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ f κοίλη $\underline{x}^*$ τοπικό μέγ.

$\Rightarrow$ $\underline{x}^*$ ολικό μέγιστο.

Παράδειγμα (Συνέχεια)

Έχουμε ότι $Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ αρνητικά

ορισμένος $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$

άρα η f είναι κοίλη.

Άρα το τοπικό μέγιστο $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

είναι ολικό μέγιστο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ με περιορισμούς:

Επίλυση με συνθήκες Kuhn-Tucker (Karush)

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\max f(\underline{x})$$

υπό

$$g_1(\underline{x}) \le 0$$
$$g_2(\underline{x}) \le 0 \qquad \text{ΠΚΠ-1}$$
$$\vdots$$
$$g_p(\underline{x}) \le 0$$

με $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη και $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτές

$\forall i = 1, 2, \ldots, p$

κάνουμε το εξής :

Για κάθε περιορισμό ($g_i(x) \leq 0$) θεωρούμε ένα πολλαπλασιαστή $\mu_i > 0$ και φτιάχνουμε την συνάρτηση

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i \, g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

(Lagrangiani συνάρτηση)

και τα μ_i τα λέμε πολλαπλασιαστές Lagrange

Θεώρημα 5 Θεωρούμε το ΠΚΠ – 1 με εφικτή περιοχή F

αν υπάρχουν $\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ και

$\underline{\mu}^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_p^*)$ τ/ω: $\mu_i \geq 0 \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, p$ (1)

(πολ/στες ≥ 0)

$\dfrac{\partial L}{\partial x_j}(x^*) = 0 \,, \; j = 1, 2, \ldots, n$ (2) (μερικές παράγωγοι της L $= 0$)

$\mu_i^* g_i(\underline{x}^*) = 0 \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, p$ (3) ($\mu_i^* = 0$ ή $g_i(\underline{x}^*) = 0$ $\forall i$)

$g_i(x^*) \leq 0 \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, p$ (4) ($\underline{x}^* \in F$)

(4 σετ συνθηκών)

τότε το x^* είναι βέλτιστη λύση του ΠΚΠ – 1

Άσκηση 1, Να λυθεί το πρόβλημα μη γραμμ. προγραμ.

$$\max \; -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$$

υπό $\quad 5x_1 + 2x_2 \leq 10$

$\Rightarrow 5x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0$

Λύση $\quad f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2$

$g_1(x_1, x_2) = 5 \cdot x_1 + 2x_2 - 10$

Θέλω νδο είναι της μορφής ΠΚΠ-1

(f κοίλη, g_1 κυρτή)

$$\nabla f(x_1, x_2) = (-6x_1 + 2x_2 - 2, -4x_2 + 2x_1 + 3)$$

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$|6| = 6 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 20 > 0$

άρα $-Hf(x_1, x_2)$ θετικά ορισμένος

οπότε $Hf(x_1, x_2)$ αρνητικά ορισμένος άρα f κοίλη!

Για την $g_1(x_1, x_2)$ είναι $\boxed{\text{γραμμική}}$ άρα είναι και

κυρτή και κοίλη

Εχουμε $p = 1$ (Ενας περιορισμός)

αρα θα εχουμε εναν πολλ/στη Lagrange τον μ_1

Συναρτηση Lagrange

$$L(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - \mu_1 g_1(x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow L(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 - \mu_1(5x_1 + 2x_2 - 10)$$

Συνθήκες KKT

$\mu_1 \geq 0$ (1^{o} set) KKT-1

$-6x_1 + 2x_2 - 2 - 5\mu_1 = 0$ (2^{o} set) KKT-2

$-4x_2 + 2x_1 + 3 - 2\mu_1 = 0$ KKT-3

$\mu_1 \cdot g_1(x_1, x_2) = 0$

$\mu_1(5x_1 + 2x_2 - 10) = 0$ (3^{o} set) KKT-4

$g_1(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0$ 4^{o} (set) KKT-5

Θα παρω περιπτώσεις $\mu_1 = 0$ ή $\mu_1 > 0$

Αν $\mu_1 > 0$

KKT-4 $\xRightarrow{\mu_1 > 0}$ $5x_1 + 2x_2 - 10 = 0 \Rightarrow x_2 = 5 - \frac{5}{2}x_1$ (1)

KKT-2 $\xRightarrow{(1)}$ $-6x_1 + 2(5 - \frac{5}{2}x_1) - 2 - 5\mu_1 = 0$

$\Rightarrow -6x_1 + 8 - 5x_1 - 5\mu_1 = 0$

$-11x_1 + 8 = 5\mu_1 \Rightarrow \mu_1 = \frac{8}{5} - \frac{11}{5}x_1$ (2)

KKT-3 $\xRightarrow{(1)(2)}$ $-4(5 - \frac{5}{2}x_1) + 2x_1 + 3 - 2\left(\frac{8}{5} - \frac{11}{5}x_1\right) = 0$

$\Rightarrow -20 + 10x_1 + 2x_1 + 3 - \frac{16}{5} + \frac{22}{5}x_1 = 0$

$\frac{82}{5}x_1 - \frac{101}{5} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{101}{82}}$

(2) $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $\mu_1 = \frac{8}{5} - \frac{11}{5}\frac{101}{82} < 0$ άτοπο

Αν $\mu_1 = 0$

KKT-2 $\overset{\mu_1=0}{\Rightarrow}$ $-6x_1 + 2x_2 - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 + 3x_1$ (4)

KKT-3 $\Rightarrow$ $4(1+3x_1) + 2x_1 + 3 = 0 \Rightarrow -10x_1 = 1$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = -\frac{1}{10}}$

(1) $\Rightarrow$ $x_2 = 1 + 3\left(-\frac{1}{10}\right) = \boxed{\frac{7}{10}}$

Ελέγχουμε αν ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες

KKT1 ✓ KKT4 ✓ KKT5: $5\left(-\frac{1}{10}\right) + 2\frac{7}{10} - 10 \leq 0$

$\Rightarrow -10 < 0$ ✓

Άρα $x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(-\frac{1}{10}, \frac{7}{10}\right)$

<u>Πόρισμα:</u> Έστω πρόβλημα μη-γραμμικού προγραμματισμού

$\max f(\underline{x})$

υπό $\underline{x} \geq 0$ όπου $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη

Αν υπάρχει $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$

$x_j^* \geq 0 \quad \forall j = 1,2,\ldots,n$ (1)

$\frac{df(x^*)}{dx_j} \leq 0 \quad \forall j = 1,2,\ldots,n$ (2)

$x_j^* \cdot \frac{df(x^*)}{dx_j} = 0 \quad \forall j = 1,2,\ldots,n$ (3)

Τότε το x^* βέλτιστη λύση του ΠΚΠ-2

Ασκηση 1: Να λυθεί το προβλημα

$$\max \ \ln(1+x_1) - x_1 - x_2$$

$$\text{υπο} \quad x_1, x_2 \geq 0$$

Λυση: Θελω να εξεταίσω αν ειναι της μορφής ΠΚΠ − 2

$$f(x_1, x_2) = \underbrace{\ln(1+x_1)}\ \underbrace{-x_1 - x_2}$$

η $\ln x$ κοιλη και $-(x_1+x_2)$ γραμμική αρα κοιλη

αρα f κοίλη. Αρα το πρόβλημα ειναι της μορφής ΠΚΠ−2

Συνθηκες ΚΚΤ

$x_1 \geq, x_2 \geq 0$ ΚΚΤ−1, 2

$\frac{1}{1+x_1} - 1 \leq 0$ ΚΚΤ−3

$-1 \leq 0$ ΚΚΤ−4

$x_1 \cdot \left(\frac{1}{1+x_1} - 1\right) = 0$ ΚΚΤ−5

$x_2(-1) = 0$ ΚΚΤ−6

παιρνω περιπτώσεις → $x_1 > 0$ ή $x_1 = 0$

$x_2 > 0$ η $x_2 = 0$

1) $x_1 > 0, x_2 > 0$

ΚΚΤ−5 $\Rightarrow \frac{1}{1+x_1} - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0}$ ατοπο

2) $x_1 > 0, x_2 = 0$ όμοια ατοπο

3) $x_1 = 0, x_2 = 0$ τσεκαρω συνθήκες

✓ Αρα $(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$

Δεν εξεταζω (δεν υπαρχει αλλη λυση εδω σταματαω) αλλες λυσεις)