5º Μαθημα: 03-11-22 ΔΥΙΚΟΤΗΤΑ

1) Το προβλημα μίξης των υλικών

x_j ποσότητα απο το προϊον j που θα φτιάξουμε

$\boxed{\max}$ $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

υπό

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$ → n μετ. απόφασης, m περιορισμοί

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$ → πρωτεύον πρόβλημα

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$

$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

2) y_i: η τιμή/μονάδα πρώτης ύλης i $i = 1, 2, \dots, m$

$\boxed{\min}$ $b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$

→ m μετ. αποφ. $\quad a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$

n περιορισμοί $\quad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2$

$\vdots$

→ Δυϊκό πρόβλημα $\quad a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n$

Για κάθε πρόβλημα ορίζεται το δυϊκό του

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ εργοστασιο κατεργασίας μεταλλευμάτων ...

x_1 ποσοτητα ορείχαλκου

x_2 ποσότητα μπρούτζου

ΠΡΟΤΕΧΟΝ

$$\max \quad 3x_1 + 5x_2$$

υπο

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 &\le 4 \\ 0x_1 + 2x_2 &\le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Π

ΔΥΙΚΟ

$$\min \quad 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

υπο

$$\begin{aligned} 1y_1 + 0y_2 + 3y_3 &\ge 3 \\ 0y_1 + 2y_2 + 2y_3 &\ge 5 \\ y_i &\ge 0 \end{aligned}$$

Δυικό

2 μεταβλητές αποφασης $\Rightarrow$ 2 περιορισμοί στο δυικο

3 περιορισμοί $\Rightarrow$ 3 μετ. αποφ. y_1, y_2, y_3

$$\longrightarrow \left(\begin{aligned} 3x_1 + 0x_2 &\le 12 \\ 0x_1 + 5x_2 &\le 30 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{3x_1 + 5x_2 \le 42}$$

άνω φραγμα για την αντικειμενική συνάρτηση!!
(όχι μοναδικο όμως)

πχ

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \\ 0x_1 + 3x_2 &\le 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{3x_1 + 5x_2 \le 36}$$

άλλο ένα άνω φραγμα για την α. σ. (καλύτερο απο το προηγουμενο)

πχ $3x_1 + 5x_2 \le 3x_1 + 6x_2 \le 42$
↳ άνω φράγμα

θέλω το 'καλύτερο' άνω φραγμα (το μικροτερο)

$$\begin{aligned} 1y_1 x_1 &\le 4y_1 \\ + 2y_2 x_2 &\le 12y_2 \\ + \quad 3y_3 x_1 + 2y_3 x_2 &\le 18y_3 \end{aligned}$$

$$(1y_1 + 3y_3)x_1 + (2y_2 + 2y_3)x_2 \le \underbrace{4y_1 + 12y_2 + 18y_3}_{\text{άνω φραγμα}}$$

ανν $1y_1 + 3y_3 \geq 3$

$2y_2 + 2y_3 \geq 5$

άρα ζητάω

$$\left.\begin{array}{ll} \min & 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\ \text{υπο} & 1y_1 \quad + 3y_3 \geq 3 \\ & \quad 2y_2 + 2y_3 \geq 5 \end{array}\right\}$$

$$y_i \geq 0$$

→ Άρα το δυϊκό μας δίνει το καλύτερο άνω φράγμα για την αντικειμενική συνάρτηση.
(φραγματική ερμηνεία)

Έστω πρωτεύον (Π) $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

υπο $\sum a_{ij} x_j \leq b_i \quad i=1,2,\dots,m$

$x_j \geq 0 \quad , j=1,2,\dots,n$

→ Δυϊκό (Δ) $\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

υπο $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad , j=1,2,\dots,n$

$y_i \geq 0 \qquad i=1,2,\dots,m$

θέλω το δυϊκό του (Δ)

θα γράφω το δυϊκό σε τυπική μορφή

$$-\max - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

υπο $\quad -\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \le -c_j \qquad j=1,2,\dots,n$

$$y_i \ge 0, \quad i=1,2,\dots,m$$

Τώρα το Δυϊκό του (Δ) είναι

(n περιορισμούς → n μεταβλ. απόφασης
m μετ. απόφασης → m περιορισμούς)

$$-\min \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$$

υπο $\quad \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) x_j \ge b_i, \quad i=1,2,\dots,m$

$$x_j \ge 0, \quad j=1,2,\dots,n$$

ισοδύναμα γράφεται

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

υπο $\quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=1,2,\dots,m$

$$x_j \ge 0, \quad j=1,2,\dots,n$$

— Τυπική Μορφή Δυϊκού. (Αντίθετο - ανάστροφος)

<u>Θεώρημα</u>: Η τιμή της α.σ. του πρωτεύοντος σε μια εφικτή λύση του είναι μικρότερη ή ίση της τιμής της α.σ. του (Δ) σε μια εφικτή λύση του.

max $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

υπό $\sum a_{ij} x_j \le b_i$, $i=1,2,\dots,m$

$x_j \ge 0$, $j=1,2,\dots,n$

min $\sum^{m} b_i y_i$

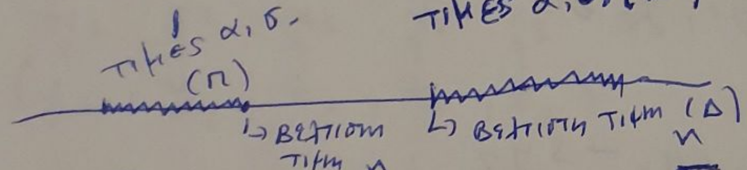
υπό $\sum a_{ij} y_i \ge c_j$

$y_i \ge 0$

Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ εφικτή λύση του Πρωτεύοντος

και $y_1, y_2, \dots, y_m$ εφικτή λύση του Δυϊκού

τότε $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ (φραγματική ερμηνεία)



2^{η} απόδειξη $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i x_j =$

$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

(ασθενές Δυϊκό θεώρημα)

πρωτεύον (Π)

(2 περιορισμούς → 2 μετ. απόφασης)

(3 μετ. απόφασης → 3 περιορισμούς)

$$\max \quad -3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{υπό} \quad -x_2 + 2x_3 \leq 0$$

$$-3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min \quad 0y_1 + 3y_2$$

$$\text{υπό} \quad -3y_1 \; \cancel{00}\,{-1}\, y_2 + 2y_3 \geq -3$$

Δυϊκό (Δ)

$$-1y_1 + 4y_2 \geq 2$$

$$2y_1 + y_2 \geq 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

σε τυπ. μορφή:

$$-\max \quad 0y_1 - 3y_2$$

$$\text{υπό} \quad 3y_1 + y_2 - 2y_3 \leq 3$$

$$y_1 - 4y_2 \leq -2$$

$$-2y_1 - y_2 \leq -1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Λεξικά:

$$\zeta = 0 - 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$w_1 = 0 + 0x_1 + 1x_2 - 2x_3$$

$$w_2 = 3 + 3x_1 - 4x_2 - 1x_3$$

≥ 0 εφικτή λύση → όχι βέλτιστη

←→ (αντίθετο ανάστροφος ←→ ΠΙΝΑΚΑΣ)

$$-\zeta = 0 + 0y_1 - 3y_2$$

$$z_1 = 3 - 0y_1 - 3y_2$$

$$z_2 = -2 - 1y_1 + 4y_2$$

$$z_3 = -1 + 2y_1 + 1y_2$$

↳ όχι εφικτότητα! πρέπει φάση Ι

Ανάλογη οδήγηση

αντίστοιχες μεταβλητές

$$\begin{array}{ccccc} x_1, & x_2, & x_3, & w_1, & w_2 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ z_1, & z_2, & z_3 & y_1, & y_2 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x_j \leftrightarrow z_j \\ w_i \leftrightarrow y_i \end{array}}$$

και εφαρμόζουμε ανάλογη οδήγηση,

(Π)
$\left.\begin{array}{l} x_2 \text{ μπαίνει} \\ w_2 \text{ βγαίνει} \end{array}\right\}$

(Δ)
$\left.\begin{array}{l} z_2 \text{ βγαίνει} \\ y_2 \text{ μπαίνει} \end{array}\right\}$

πίνακας Δυϊκού = αντίθετο ανάστροφος πρωτεύοντος

άρα βέλτιστη τιμή (Π) = βέλτιστη τιμή (Δ)

Λύση του Δυϊκού από το λεξικό του πρωτεύοντος

$$\begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (y_1, & y_2, & z_1, & z_2, & z_3) \end{array}$$

από τους συντελεστές της α.σ. (τους αντίθετους)

$\left.\begin{array}{l} \text{περιθώριες πρωτεύοντος} \leftrightarrow \text{αρχικές Δυϊκού} \\ \text{αρχικές πρωτεύοντος} \leftrightarrow \text{περιθώριες Δυϊκού} \end{array}\right\}$

- Ισχυρό Δυϊκό Θεώρημα

- Σχέση λύσεων πρωτεύοντος και Δυϊκού

Π \ Δ	Βέλτιστη λύση	Μη εφικτό	Μη φραγμένο
Βέλτιστη λύση	✓	✗	✗
Μη εφικτό	✗	✓	✓
Μη φραγμένο	✗	✓	✗

(Ισχυρό δυϊκό θεώρημα)

(Π) $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

υπο $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i=1,2,\dots,m$

$x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n$

n μετ. αποφ. - x_j

m περιορισμοί b_i

m μετ. αποφ. - y_i

n περιορισμοί c_j

(Δ) $\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

υπο $\sum a_{ij} y_i \geq c_j \quad j=1,2,\dots,n$

$y_i \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m$

$x_i \leftrightarrow z_i$, $w_i \leftrightarrow y_i$

— Θεώρημα Συμπληρωματικότητας

$x_j \leftrightarrow z_j \quad y_i \leftrightarrow w_i$

$$\left.\begin{array}{l} x_j z_j = 0 \\ y_i w_i = 0 \end{array}\right\}$$