20-10-22 3η Μάθημα

ΤΥΠΙΚΗ ΜΟΡΦΗ: ΠΓΠ πχ

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

υπο $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5/2$

$x_1 + x_2 \leq -7$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

ΠΡΟΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

- Μεγιστοποίηση αντικειμενικής
- όλοι οι περιορισμοί τύπου $\leq$
- όλες οι μεταβλ. ≥ 0

πχ $8x_1 + x_2 = -7 \iff 8x_1 + x_2 \leq -7$ και $8x_1 + x_2 \geq -7 \iff$

$\iff 8x_1 + x_2 \leq -7$ και $-8x_1 - x_2 \leq 7$

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -\max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

1) αν πχ $x_3 \in \mathbb{R}$ τότε $x_3 = x_3' - x_3''$ και $x_3', x_3'' \geq 0$

2) αν $x_2 \leq 0 \iff x_2' = -x_2$

$\iff x_2 = -x_2'$ και $x_2' \geq 0$

πχ Να τεθεί σε τυπική μορφή το ΓΠ

$$
\begin{aligned}
\boxed{\min}\quad & x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\
\text{υπό}\quad & x_1 - 3x_2 \le 10 \\
& x_1 - x_2 - 2x_3 \boxed{\ge} 3 \\
& x_1 - x_3 \boxed{=} 2 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \boxed{\le} 0,\ x_3 \boxed{\in} \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$x_2 = -x_2'$

$x_2' \ge 0$

$x_3 = x_3' - x_3''$

$x_3', x_3'' \ge 0$

(ξεκινάμε με μεταβλ. απόφασης)

Άρα

$$
\begin{aligned}
\min\quad & x_1 + 2x_2' + 4x_3' - 4x_3'' \\
\text{υπό}\quad & x_1 + 3x_2' \le 10 \\
& x_1 + x_2' - 2x_3' + 2x_3'' \ge 3 \\
& x_1 - x_3' + x_3'' = 2 \\
& x_1, x_2', x_3', x_3'' \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\max\quad & -x_1 - 2x_2' - 4x_3' + 4x_3'' \\
\text{υπό}\quad & x_1 + 3x_2' \le 10 \\
& -x_1 - x_2' + 2x_3' - 2x_3'' \le -3 \\
& x_1 - x_3' + x_3'' \le 2 \\
& -x_1 + x_3' - x_3'' \le -2 \\
& x_1, x_2', x_3', x_3'' \ge 0
\end{aligned}
$$

η τυπική μορφή

Μορφή Λεξικού simplex:

1) (προσθέτουμε περιθώριες μεταβλ. για να έχω ισότητα) (σε κάθε περιορισμό)

$$-\max \ -x_1 - 2x_2' - 4x_3' + 4x_3''$$

υπό

$$x_1 \quad +3x_2' \qquad\qquad + w_1 = 10$$

$$-x_1 \quad -x_2' \quad -2x_3' \quad -2x_3'' + w_2 = -3$$

$$x_1 \qquad -x_3' \quad +x_3'' \quad +w_3 = 2$$

$$-x_1 \qquad +x_3' \quad -x_3'' + w_4 = -2$$

$$x_1, x_2', x_3', x_3'', w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

2) (λύνω ως προς w_i)

$$-\max \ -x_1 - 2x_2' - 4x_3' + 4x_3''$$

υπό

$$w_1 = 10 - x_1 - 3x_2'$$

$$w_2 = -3 + x_1 + x_2' + 2x_3' + 2x_3''$$

$$w_3 = 2 - x_1 + x_3' - x_3''$$

$$w_4 = -2 + x_1 - x_3' + x_3''$$

$$x_1, x_2', x_3', x_3'', w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

3)

$$\zeta = 0 - x_1 - 2x_2' - 4x_3' + 4x_3''$$

$$w_1 = 10 - x_1 - 3x_2'$$

$$w_2 = -3 + x_1 + x_2' + 2x_3' + 2x_3''$$

$$w_3 = 2 - x_1 + x_3' - x_3''$$

$$w_4 = -2 + x_1 - x_3' + x_3''$$

$$\zeta = 0 + 5x_1 - 4x_2$$ (Αρχικό Λεξικό)

$$w_1 = 6 - x_1 + x_2$$
$$w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2$$
$$w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2$$

1) x_1, x_2 ανεξάρτητες (ή μη βασικές) μεταβλητές

2) w_1, w_2, w_3 εξαρτημένες (ή βασικές μεταβλητές)

λύση καλούμε οποιοδήποτε $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3)$ διάνυσμα που ικανοποιεί τις εξισώσεις-περιορισμούς

πχ $(1, 1, 6, 23, 8)$ → εφικτή λύση (ικανοποιεί περιορ. μη αρνητικότητας)

ή

$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (-1, 0, 7, 27, 7)$ ← λύση μη εφικτή λύση (όχι βασική)

αν $(0, 0, 6, 24, 9)$ ← λύση εφικτή λύση και $\boxed{\text{βασική λύση}}$ διότι έχει όλες τις μη βασικές μεταβλ. ίσες με μηδέν.

(Β.Ε.Λ. - Βασική Εφικτή λύση)

~~εφικτή λύση~~
Βέλτιστη λύση = εφικτή λύση που μεγιστοποιεί την αντικειμ. συνάρτηση

$\zeta = 0 + 5\boxed{x_1} - 4x_2$ (Γ1) x_1 : θα μπει στη Βάση.

$\boxed{w_1} = 6 - 1\boxed{x_1} + x_2$ (Γ2)   μηδενίζεται για $x_1 = 6$

$w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2$ (Γ3)   μηδενίζεται για $x_1 = 8$ $\min\{6, 8\} = 6$

$w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2$ (Γ4)   οδηγός

Β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 6, 2, 4, 9)$

με τιμή α.σ. $\zeta = 0$

(θέλω η x_1 αφού έχει θετικό συντελεστή να γίνει βασική)

$\boxed{\text{άρα } w_1 \text{ θα βγει από τη Βάση}}$

- κριτήριο : αν υπάρχουν θετικοί συντελ. στην α.σ. αν όλοι οι συντελ. ≤ 0 έχω βέλτιστη λύση.

1) Εφαρμόζω γραμμοπράξεις για να πάω στο επόμενο λεξικό

Γ2 → γραμμή οδηγού.

$\Gamma_1' = \Gamma_1 + 5\Gamma_2$

$\zeta + 5w_1 = 30 \quad + x_2 \Rightarrow$

$\boxed{\zeta = 30 - 5w_1 \quad + x_2}$

$\Gamma_3' = \Gamma_3 - 3\Gamma_2$

$w_2 - 3w_1 = 6 \quad - x_2 \Rightarrow \boxed{w_2 = 6 + 3w_1 - 1 \cdot x_2}$

$\Gamma_4' = \Gamma_4 + 2\Gamma_2$ $w_3 + 2w_1 = 21 \quad - x_2$

$\boxed{w_3 = 21 - 2w_1 - x_2}$

και για την γραμμή του οδηγού : λύνω ως προς x_1

$x_1 = 6 - 1w_1 + 1x_2$

για
$$\boxed{\begin{aligned} \zeta &= 30 - 5w_1 + x_2 \\ x_1 &= 6 - 1w_1 + 1\cdot x_2 \\ w_2 &= 6 + 3w_1 - x_2 \\ w_3 &= 21 - 2w_1 - x_2 \end{aligned}}$$

$\downarrow$

β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (6, 0, 0, 6, 21)$

με τιμή α.σ. $\boxed{\zeta = 30}$ (> 0)

2ος τρόπος (όχι γραμμοπράξεις αλλά αντικατάσταση)

Επόμενο λεξικό (μεταβλ. που μπαίνει στη βάση)

Γ_2': (λύνω ως προς x_1)

$x_1 = 6 - w_1 + x_2$

Γ_1': (αντικαθιστώ την Γ_2')

$\zeta = 0 + 5x_1 - 4x_2 = 0 + 5\cdot(6 - w_1 + x_2) - 4x_2$

$\Rightarrow$ $\boxed{\zeta = 30 - 5w_1 + x_2}$

Γ_3': (αντικαθιστώ τη Γ_2')

$w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow w_2 = 24 - 3(6 - 1w_1 + 1x_2) + 2x_2$

$\Rightarrow$ $\boxed{w_2 = 6 + 3w_1 - 1\cdot x_2}$ (Γ_3')

Γ_4': ομοίως

$w_3 = 9 + 2x_1 - 3x_2 = 9 + 2(6 - w_1 + x_2) - 3x_2$

$\boxed{= 21 - 2w_1 - x_2}$ (Γ_4')

δια $\zeta = 30 - 5w_1 + 1\boxed{x_2}$ (Γ_1')

$x_1 = 6 - w_1 + x_2$ (Γ_2')

$\boxed{w_2} = 6 + 3w_1 \boxed{-1} x_2$ (Γ_3') τμηθ. $\boxed{x_2 = 6}$

οδηγός?

$w_3 = 21 - 2w_1 - x_2$ (Γ_4') τμηθ. $\boxed{x_2 = 21}$

$\min\{6, 21\} = 6$

x_2 : μπαίνει στη Βάση

w_2 : βγαίνει από την Βάση

και πάμε στο επόμ. λεξικό που έχει

Β.ε.λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (12, 6, 0, 0, 15)$

με τιμή α.σ. $\boxed{\zeta = 36}$

Είναι βέλτιστη διότι όλοι οι συντελ. της α.σ. είναι μικρότεροι ίσοι του 0

$\zeta = 0 + 5\boxed{x_1} - 4x_2$

$\boxed{w_1} = 6 \boxed{-1} x_1 + 1x_2$

$w_2 = 24 - 3x_1 + 2x_2$

$w_3 = 9 + 2x_2 - 3x_2$

$\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -b/a & \frac{1}{a} \\ d - \frac{bc}{a} & \frac{c}{a} \end{pmatrix}$

· α οδηγός, b: στοιχείο στη γραμμή του οδηγού εκτός οδηγού

c: στοιχείο στη στήλη οδηγού (εκτός οδηγού)

d: στοιχείο εκτός γραμμής και στήλης οδηγού.

$-3 - \frac{2 \cdot 1}{-1} = -3 + 2 = -1$

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{Z} = 30 & -5 \cdot w_1 & 1 \cdot x_2 \\ \hline x_1 = 6 & -1 \cdot w_1 & +1 \cdot x_2 \\ w_2 = 6 & +3 w_1 & (-1) x_2 \\ w_3 = 21 & -2 \cdot w_1 & (-1) x_2 \end{array}$$

$$d - \frac{bc}{\alpha} = 0 - \frac{5 \cdot 6}{-1} = 30$$

$$d - \frac{bc}{\alpha} = 24 - \frac{6 \cdot (-3)}{-1} = 6$$

$$d - \frac{bc}{\alpha} = 9 - \frac{6 \cdot 2}{-1} = 21$$

$$d - \frac{bc}{\alpha} = -4 - \frac{5 \cdot 1}{-1} = 1$$

$$d - \frac{bc}{\alpha} = 2 - \frac{1(-3)}{-1} = 2 - 3 = -1$$

$$d - \frac{bc}{\alpha} = -3 - \frac{1 \cdot 2}{-1} = -3 + 2 = -1$$

– ΙΔΙΑΖΟΥΣΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ :

1) Απουσία αρχικής Β.Ε.Λ.
(Μπορεί η εφικτή περιοχή να είναι το κενό σύνολο)
χρησιμοποιούμε την φάση I της Simplex :

πχ

$$J = 0 - 3x_1 + 4x_2$$

$$w_1 = -8 + 4x_1 + 2x_2$$

$$w_2 = -2 + 2x_1 + 0x_2$$

$$w_3 = 10 - 3x_1 - 2x_2$$

$$w_4 = 1 + x_1 - 3x_2$$

$$w_5 = -2 + 0x_1 + 3x_2$$

Β.Ε.Λ. $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) =$

$= (0, 0, \underline{-8}, \underline{-2}, 10, 1, \underline{-2})$ ΟΧΙ ΕΦΙΚΤΗ

Δεν μπορώ να εφαρμόσω (φάση II simplex)
αφαιρούμε μια νέα μεταβλητή x_0 από κάθε αριστερό μέλος της τυπικής μορφής του λεξικού

- Θέλουμε η τεχνητή μεταβλητή να μπεί στη βάση και η "πιο αρνητική" μεταβλητή να βγεί από την <u>βάση</u>

Αν $x_0 = 0 \Rightarrow$ το λεξικό πρόβλημα
έχει εφικτές λύσεις
και μπορώ να βρω και μια Β.Ε.Λ.