21/12/2021

Άσκηση 1

Μια εταιρεία θέλει να προσδιορίσει τη βέλτιστη πολιτική αντικατάστασης-συντήρησης ενός μηχανήματος που τώρα είναι 2 ετών και σκοπεύει να το χρησιμοποιήσει για τα επόμενα 5 χρόνια. Το κόστος αγοράς νέου μηχανήματος είναι 40.000€ τώρα και αυξάνεται 10% κάθε χρόνο. Η τιμή μεταπώλησης ενός μηχανήματος που έχει χρησιμοποιηθεί 1 έτος είναι 30.000€ και μειώνεται κατά 10% για κάθε χρόνο χρήσης. Το ετήσιο κόστος συντήρησης και χρήσης νέου μηχανήματος είναι 3.000€ και αυξάνεται κατά 20% για κάθε χρόνο χρήσης. Το μηχάνημα πρέπει οπωσδήποτε να αντικατασταθεί μετά από 5 χρόνια χρήσης. Η εταιρεία αποφασίζει στην αρχή κάθε χρονιάς αν θα αντικαταστήσει το μηχάνημα ή θα το συντηρήσει. Να βρεθεί η πολιτική που ελαχιστοποιεί το κόστος

Λύση:

Δεδομένα

- Έχουμε ένα με 5 στάδια : $t = 1,2,3,4,5,6$ τερματικό στάδιο , $N=5$
- ανώτατο όριο ηλικίας : $H=5$
- κόστος αγοράς νέου μηχανήματος:

στάδιο t	1	2	3	4	5
Κόστος I_t	40.000	44.000	48.400	53.240	58.564

- τιμή μεταπώλησης μηχανήματος ηλικίας x

ηλικία (x)	1	2	3	4	5
τιμή μεταπ. $s(x)$	30.000	27.000	24.300	21.870	19.683

- ετήσιο κόστος συντήρησης 1 χρήσης μηχανήματος

ηλικία(x)	0	1	2	3	4
κόστος $c(x)$	3.000	3.600	4.320	5.184	6.220,80

Μοντελοποίηση σαν π.δ.π

- **Στάδια**: Στην αρχή κάθε έτους αποφασίζουμε αν θα συντηρήσουμε ή θα αντικαταστήσουμε το μηχάνημα.
$N=5$, $t=1,2,3,4,5,6$.
- **Καταστάσεις**: x_t = ηλικία μηχανήματος στην αρχή του έτους t.
- **Αποφάσεις**: $a_t = \begin{cases} 1 & \text{, συντήρηση} \\ 2 & \text{, αντικατάσταση} \end{cases}$

$$D_t(x_t) = \begin{cases} \{1,2\} & \text{, αν } x_t < 5 \\ \{2\} & \text{, αν } x_t = 5 \end{cases}$$

- **Δυναμική Συστήματος**:

$$x_{t+1} = g_t(x_t, a_t) = \begin{cases} x_t + 1 & , a_t = 1 \\ 1 & , a_t = 2 \end{cases}$$

- **Άμεσο κόστος**:

$$C_t(x_t, a_t) = \begin{cases} c(x_t) & , a_t = 1 \\ I_t - S(x_t) + c(0) & , a_t = 2 \end{cases}$$

- **Τελικό κόστος**: $\hat{c}(x_6) = -S(x_6)$
- **Εξισώσεις βελτιστοποίησης**: $V(t, x_t)$ = ελάχιστο κόστος αντικατάστασης-συντήρησης από το στάδιο t μέχρι το τέλος αν στην αρχή του σταδίου t η ηλικία είναι x_t.

$$V(t, x_t) = \min_{a_t \in D_t(x_t)} \{ C_t(x_t, a_t) + V(t+1, g_t(x_t, a_t)) \} =$$

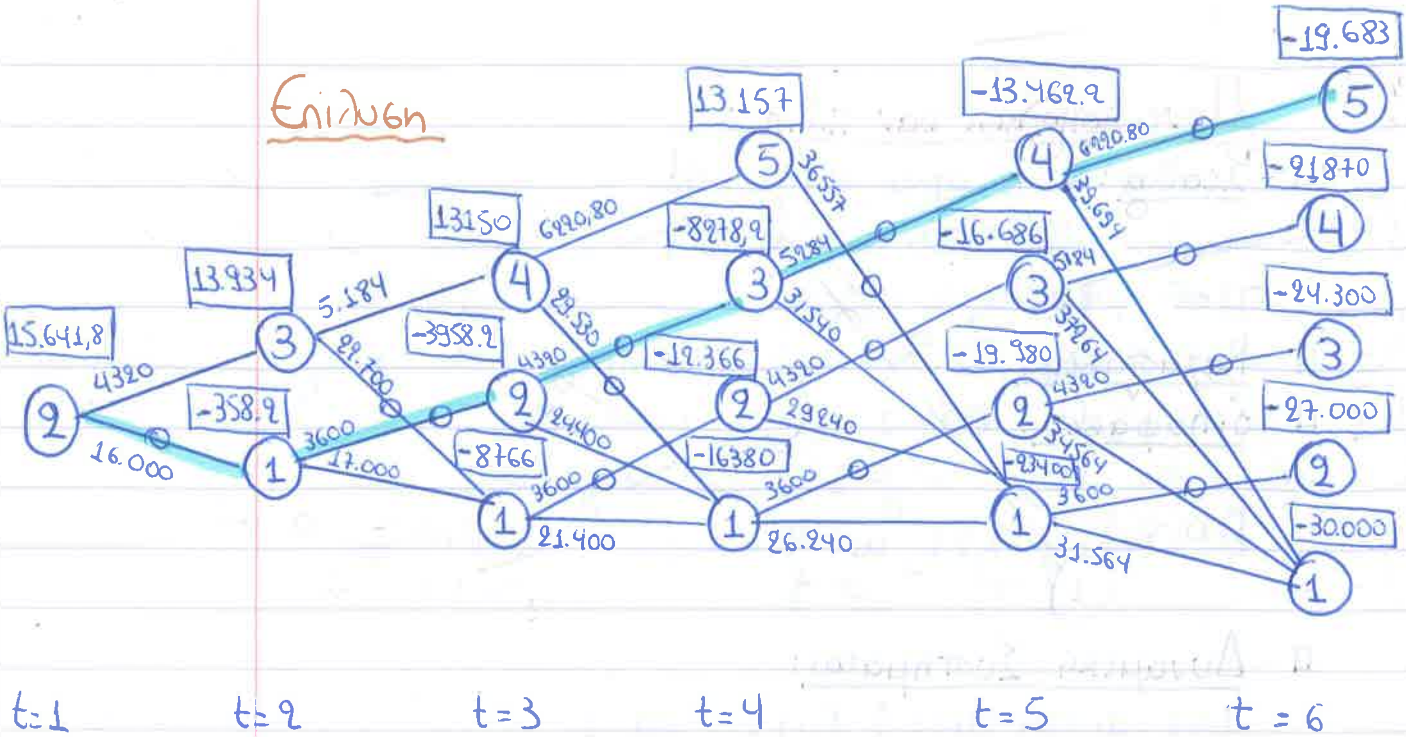
$$= \begin{cases} \min\{ \underbrace{c(x_t) + V(t+1, x_{t+1})}_{a_t=1}, \underbrace{I_t - S(x_t) + c(0) + V(t+1, 1)}_{a_t=2} \} & , x_t < 5 \\ I_t - S(x_t) + c(0) + V(t+1, 1) \text{ για } t=1,2,3,4,5 & , x_t = 5 \end{cases}$$

με τερματικές συνθήκες:

$$V(6, x_6) = \hat{c}(x_6) = -S(x_6)$$

Πρέπει να υπολογίσω το $V(1,2) = ;$

Επίλυση



$U(1,2) = 15.641,8$

$$2 \xrightarrow{a_1^*=2} 1 \xrightarrow{a_2^*=1} 2 \xrightarrow{a_3^*=1} 3 \xrightarrow{a_4^*=1} 4 \xrightarrow{a_5^*=1} 5$$

t=1 t=2 t=3 t=4 t=5 t=6

Άσκηση 2

Δίνεται το παρακάτω πρόβλημα βέλτιστης παραγωγής και διαχείρισης αποθεμάτων 4 περιόδων. Η μέγιστη επιτρεπόμενη ποσότητα παραγωγής σε μία περίοδο είναι 4 μονάδες. Η χωρητικότητα της αποθήκης είναι απεριόριστη. Η ζήτηση την περίοδο t δίνεται από τον πίνακα

t	1	2	3	4
d_t	2	3	1	2

Το κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος είναι 50€ σε κάθε περίοδο. Το κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος είναι 20€. Μπορεί να γίνει παραγωγή το πολύ σε 2 από τις 4 περιόδους. Στην αρχή της περιόδου 1 υπάρχει 1 μονάδα προϊόντος στην αποθήκη. Αν μείνουν προϊόντα στην αποθήκη στο τέλος του χρονικού ορίζοντα αυτό καταστρέφεται με κόστος 3€.

Λύση

Δεδομένα

$N = 4$, $m = 4$, $M = \infty$

$K_t(a_t) = 50 \cdot a_t$ (a_t: ποσότητα που θα παραχθεί)

$h_t = 20$

t	1	2	3	4
d_t	2	3	1	2

Μπορεί να γίνει παραγωγή το πολύ σε 2 από τις 4 περιόδους.

Μοντελοποίηση σαν π.δ.π

- **Στάδια**: Στην αρχή κάθε περιόδου αποφασίζουμε πόσες μονάδες προϊόντος θα παραχθούν
  $N = 4$, $t = 1, 2, 3, 4, 5$ ← τερματικό
- **Καταστάσεις**: x_t = απόθεμα στην αρχή της περιόδου t
  n_t = # των περιόδων που έγινε παραγωγή πριν την t.
  (x_t, n_t)
- **Αποφάσεις**: a_t = # μονάδων προϊόντος που θα παραχθούν

  Πρέπει: $a_t \geq 0$, $a_t \in \mathbb{N}$, $a_t \leq m$ | $x_t + a_t \geq d_t \Rightarrow a_t \geq d_t - x_t$, $a_t > 0$ μόνο αν $n_t < 2$

  $$D_t(x_t, n_t) = \begin{cases} \{0\} & , n_t = 2 \\ \{\max\{0, d_t - x_t\}, \dots, m\} & , n_t < 2 \end{cases}$$

- **Δυναμική Συστήματος**:

  $$(x_{t+1}, n_{t+1}) = g_t(x_t, n_t, a_t) = \begin{cases} (x_t - d_t, n_t) & , a_t = 0 \\ (x_t + a_t - d_t, n_{t+1}) & , a_t > 0 \end{cases}$$

- **Άμεσο κόστος**:

  $$C_t(x_t, n_t, a_t) = K_t(a_t) + h_t(x_t + a_t - d_t) = 50a_t + 20(x_t + a_t - d_t)$$

- **Τερματικό κόστος**: $\hat{C}(x_5, n_5) = 3x_5$
- **Εξισώσεις βελτιστοποίησης**: $V(t, x_t, n_t)$ = ελάχιστο κόστος παραγωγής - αποθήκευσης από την περίοδο t μέχρι το τέλος

όταν στην αρχή της t η κατάσταση είναι (x_t, n_t)

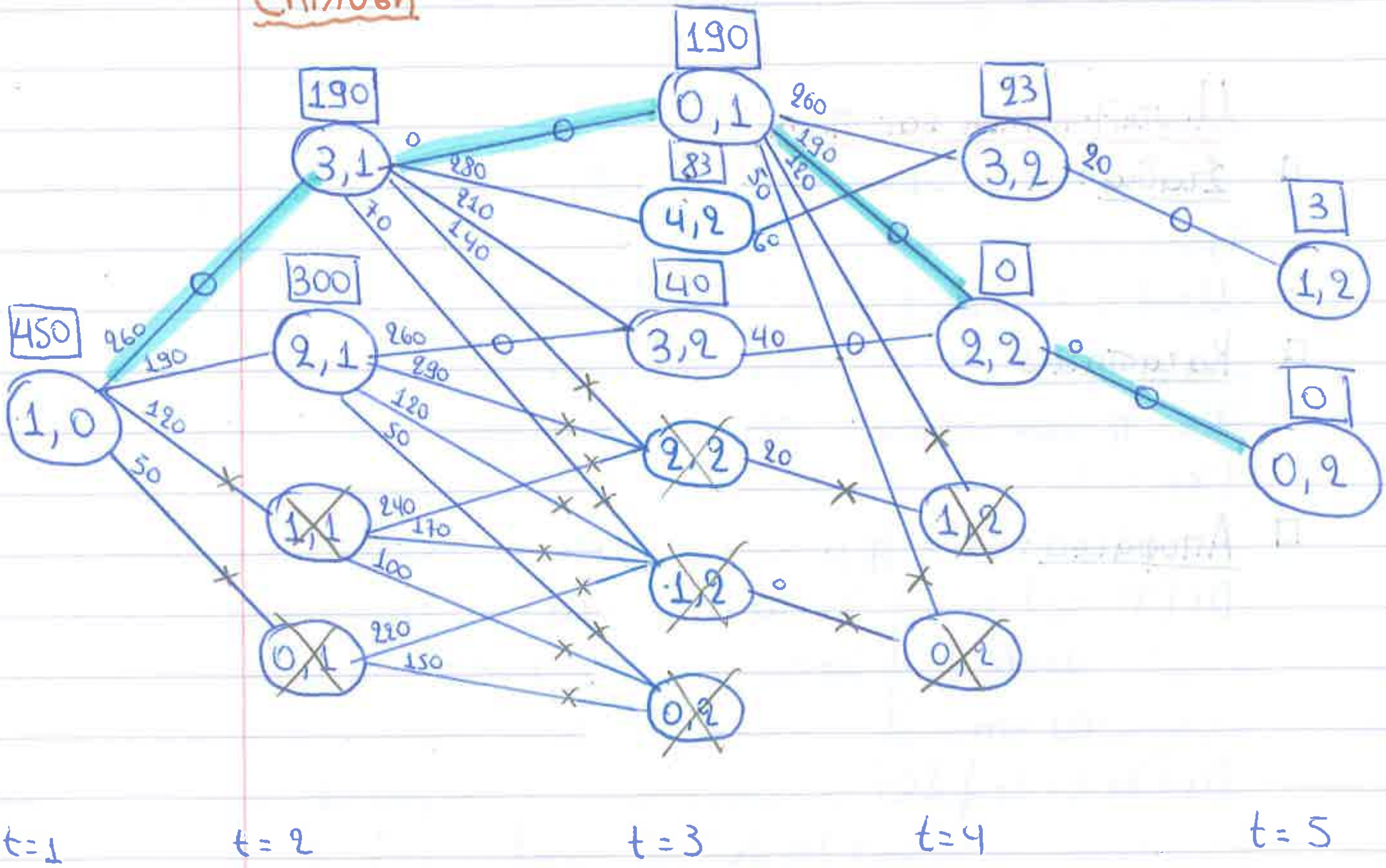
$$V(t, x_t, n_t) = \min_{a_t \in D_t(x_t, n_t)} \{ C_t(x_t, n_t, a_t) + V(t+1, g_t(x_t, n_t, a_t)) \}, \quad t=1,2,3,4$$

με αρχικές συνθήκες:

$V(5, x_5, n_5) = 3x_5$

$V(1,1,0) = ;$

Επίλυση



Βάζω Χ εκεί που δεν ικανοποιείται η ζήτηση σε κάθε περίοδο.

$V(1,1,0) = 450$

$$(1,0) \xrightarrow{a_1^* = 4} (3,1) \xrightarrow{a_2^* = 0} (0,1) \xrightarrow{a_3^* = 3} (2,2) \xrightarrow{a_4^* = 0} (0,2)$$

$t=1 \qquad t=2 \qquad t=3 \qquad t=4 \qquad t=5$