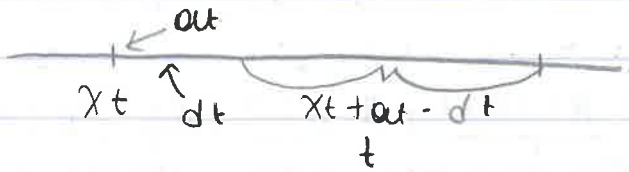
17/12/2021

Πρόβλημα παραγωγής-αποθήκευσης (συνέχεια)



x_t = απόθεμα στην αρχή του σταδίου t

a_t: ποσότητα που θα παραχθεί στο στάδιο t

$x_{t+1} = x_t + a_t - d_t$

$C_t(x_t, a_t) = k_t(a_t) + h_t(x_t + a_t - d_t)$

$\max\{0, d_t - x_t\} \le a_t \le \min\{m, u + d_t - x_t$

Εφαρμογή: Να λυθεί το πρόβλημα παραγωγής-αποθήκευσης όταν $N=4$, $h_t = 1$ (σταθερό), $t = 1, 2, \dots, 4$, $d_t = 3$ για $t = 1, 2, 3$, $u = 3$, $m = 4$

a	0	1	2	3	4
$k_t(a)$	0	5	9	13	14

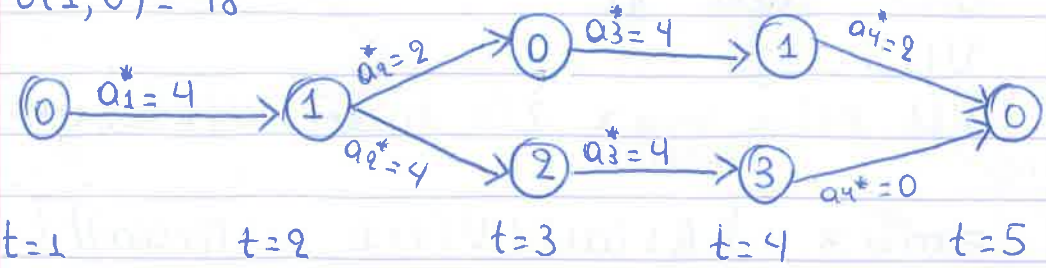
$x_1 = 0$, $z(x) = 2x$

Επίλυση με πίνακα

t	x_t	a_t	$C_t(x_t, a_t)$	x_{t+1}	$V(t, x_t)$
1	0	3	$13+1\cdot 0=13$	0	$13+36=49$
		4	$14+1=15$	$0+4-3=1$	$15+33=\boxed{48}$
2	0	3	$13+1\cdot 0=13$	0	$13+24=37$
		4	$14+1=15$	1	$15+21=\boxed{36}$
	1	2	$9+1\cdot 0=9$	0	$9+24=\boxed{33}$
		3	$13+1\cdot 1=14$	1	$14+21=35$
		4	$14+1\cdot 2=16$	2	$16+17=\boxed{33}$
3	0	3	$13+1\cdot 0=13$	0	$13+13=26$
		4	$14+1=15$	1	$15+29=\boxed{24}$

t	x_t	a_t	$C_t(x_t, a_t)$	x_{t+1}	$V(t, x_t)$
	1	2	$9+1\cdot0=9$	0	$9+13=22$
		3	$13+1=14$	1	$14+9=23$
		4	$14+2\cdot1=16$	2	$16+5=\boxed{21}$
	2	1	$5+1\cdot0=5$	0	$5+13=18$
		2	$9+1\cdot1=10$	1	$10+9=19$
		3	$13+1\cdot2=15$	2	$15+5=20$
		4	$14+1\cdot3=17$	3	$17+0=\boxed{17}$
4	0	3	$13+1\cdot0=13$	0	$13+0=\boxed{13}$
		4	$14+1\cdot1=15$	1	$15+2=17$
	1	2	$9+1\cdot0=9$	0	$9+0=\boxed{9}$
		3	$13+1\cdot1=14$	1	$14+2=16$
		4	$14+1\cdot2=16$	2	$16+4=20$
	2	1	$5+1\cdot0=5$	0	$5+0=\boxed{5}$
		2	$9+1\cdot1=10$	1	$10+2=12$
		3	$13+1\cdot2=15$	2	$15+4=19$
		4	$14+1\cdot3=17$	3	$17+6=23$
	3	0	$0+1\cdot0=0$	0	$0+0=\boxed{0}$
		1	$5+1\cdot1=6$	1	$6+2=8$
		2	$9+1\cdot2=11$	2	$11+4=15$
		3	$13+1\cdot3=16$	3	$16+6=21$
5	0				0
	1				2
	2				4
	3				6

$V(1,0)=48$



Πρόβλημα κατανομής πόρων

Υπάρχουν b μονάδες κάποιου αγαθού, οι οποίες πρέπει να κατανεμηθούν σε ν δραστηριότητες $t = 1, 2, \ldots, \nu$.
Έστω a_t η ένταση της δραστηριότητας t. Τότε $\Pi_t(a_t)$ = η ποσότητα πόρων που θα καταναλωθεί αν η δραστηριότητα t γίνει με ένταση a_t.
$R_t(a_t)$ = η απόδοση δραστηριότητας t όταν γίνεται με ένταση a_t.
Να βρεθεί η βέλτιστη κατανομή του αγαθού στις ν δραστηριότητες ώστε να μεγιστοποιηθεί η απόδοση.

Διατύπωση σαν π.δ.π

- Στάδια: Στο στάδιο t αποφασίζω για την ένταση της δραστηριότητας t, $t = 1, 2, \ldots, \nu, \underbrace{\nu+1}_{\text{τελικό στάδιο}}$
- Καταστάσεις: x_t = η ποσότητα διαθέσιμου αγαθού στην αρχή του σταδίου t.
- Αποφάσεις: a_t = ένταση της δραστηριότητας t.
  $0 \leq \Pi_t(a_t) \leq x_t$
- Δυναμική συστήματος:
  $x_{t+1} = g(x_t, a_t) = x_t - \Pi_t(a_t)$
- Άμεσο κέρδος: $c_t(x_t, a_t) = R_t(a_t)$
- Τελικό κέρδος: $\hat{c}(x_{\nu+1}) = 0$ ή ανάλογα το πρόβλημα
- Εξισώσεις βελτιστοποίησης:
  $v(t, x_t)$ = μέγιστη απόδοση από το στάδιο t και μετά όταν στην αρχή του σταδίου t έχουμε διαθέσιμη ποσότητα αγαθού x_t.
  $v(1, b) = ;$

$$v(t, x_t) = \max_{a_t \in D_t(x_t)} \{ c_t(x_t, a_t) + v(t+1, g^t(x_t, a_t)) \}$$

$$= \max_{a_t : 0 \leq \Pi_t(a_t) \leq x_t} \{ R_t(a_t) + v(t+1, x_t - \Pi_t(a_t)) \}, \quad t = 1, \ldots, \nu$$

με τερματικές συνθήκες: $V(N+1, x_{N+1}) = \hat{c}(x_{N+1}) = 0$

Εφαρμογή 1: Ένας εκδρομέας θέλει να φορτώσει το σακίδιο του με αντικείμενα από 4 κατηγορίες. Ο συνολικός όγκος του σακιδίου είναι 9 μονάδες. Η θρεπτική αξία μιας μονάδας κατηγορίας t είναι w_t και ο όγκος V_t.

t	V_t	w_t
1	3	7
2	6	16
3	7	19
4	5	15

Θέλουμε να δούμε πόσες μονάδες από κάθε προϊόν θα φορτωθούν στο σακίδιο ώστε να μεγιστοποιηθεί η θρεπτική αξία.

Λύση Είναι πρόβλημα κατανομής πόρων:

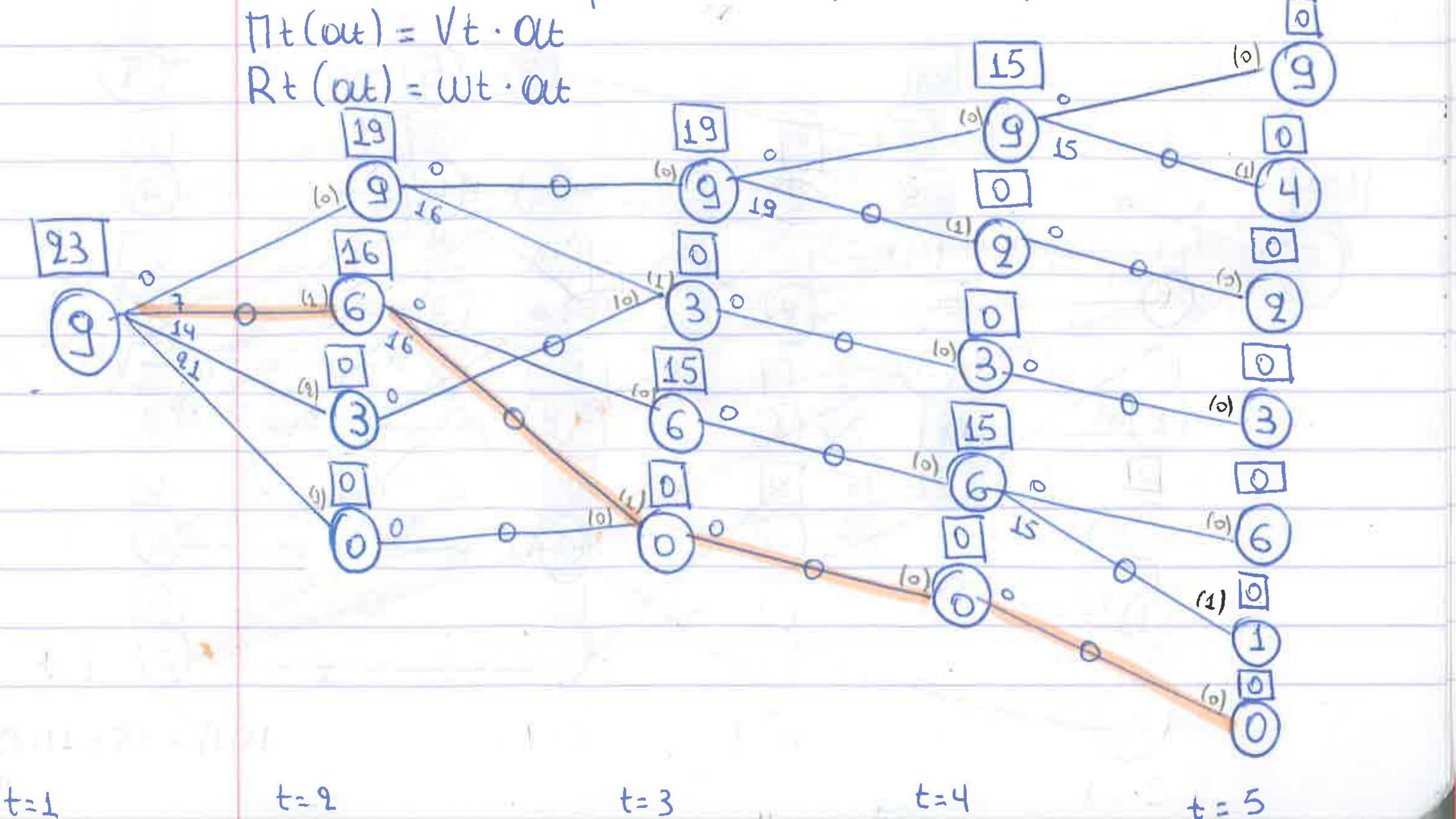
$b = 9$

$N = 4$

a_t = ποσότητα προϊόντος t που θα τοποθετηθεί στο σακίδιο

$\Pi_t(a_t) = V_t \cdot a_t$

$R_t(a_t) = w_t \cdot a_t$



$V(1,9) = 23$

$$⑨ \xrightarrow{a_1^* = 1} ⑥ \xrightarrow{a_2^* = 1} ⓪ \xrightarrow{a_3^* = 0} ⓪ \xrightarrow{a_4^* = 0} ⓪$$

$t=1$ $t=2$ $t=3$ $t=4$ $t=5$

Εφαρμογή 2: Θέλουμε να στείλουμε 5 εθελοντές γιατρούς σε 3 περιοχές. Έως 3 γιατρούς μπορούμε να στείλουμε σε κάθε περιοχή. Η απόδοση αν σταλούν α γιατροί στην περιοχή t είναι:

a	0	1	2	3
$R_t(a)$	0	24	40	48

$t = 1, 2, 3$

Πως πρέπει να κατανεμηθούν οι γιατροί ώστε να μεγιστοποιηθεί η απόδοση

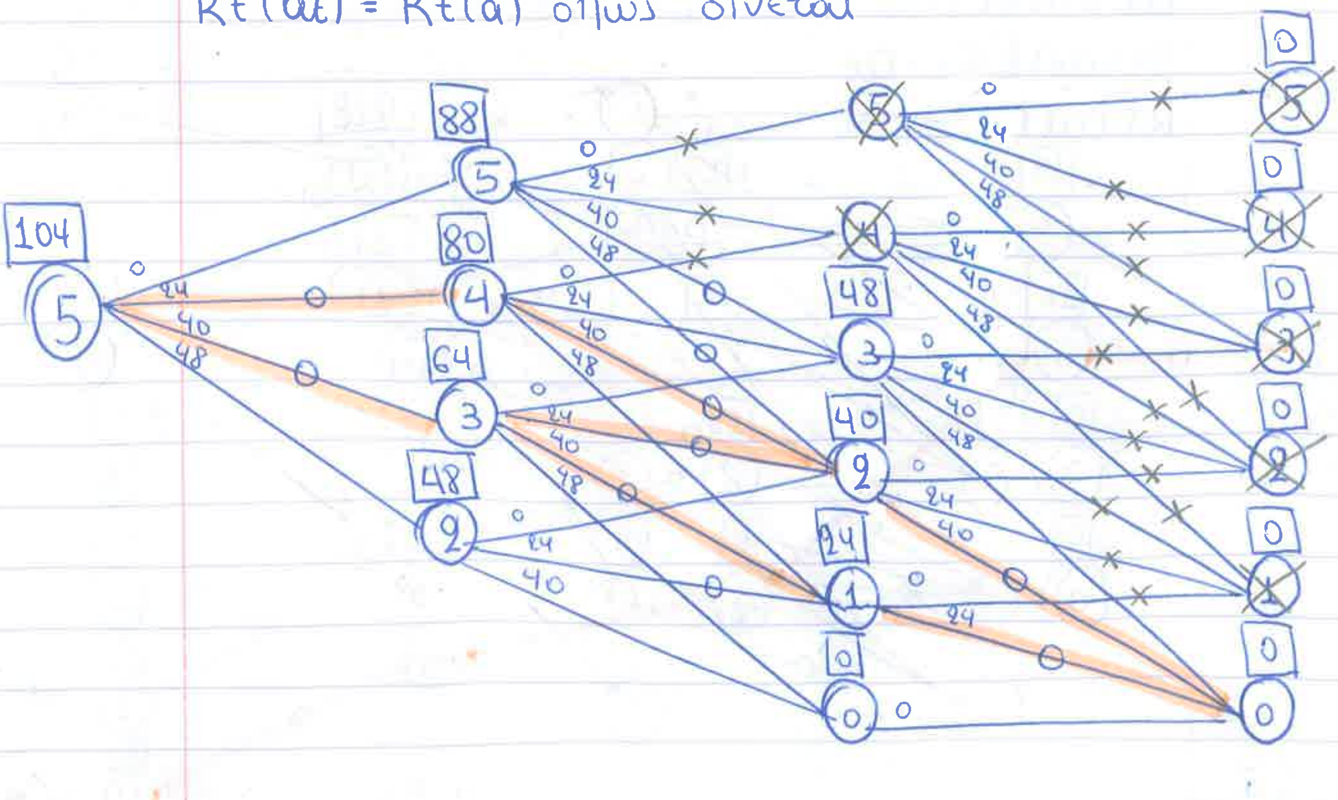
Λύση πόρος = γιατροί

$b=5$, $N=3$

a_t = αριθμός των γιατρών που θα πάει στην περιοχή t.

$\Pi_t(a_t) = a_t$

$R_t(a_t) = R_t(a)$ όπως δίνεται



Σβήνω - Βάζω X γιατί δεν γίνεται να καταλήξω με κάτι άλλο εκτός από 0 γιατρούς

$V(1,5) = 104$