10/12/2021

Πρόβλημα αντικατάστασης - συντήρησης

Έχουμε ένα μηχάνημα και επιθυμούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα τέτοιο μηχάνημα για τα επόμενα N έτη. Στην αρχή κάθε έτους αποφασίζουμε να το αντικαταστήσουμε ή να το συντηρήσουμε. Όσο μεγαλώνει η ηλικία του μηχανήματος μειώνεται το κέρδος, αυξάνεται το κόστος συντήρησης και το κόστος λειτουργίας.

Δεδομένα:

$r(x)$: ετήσιο κέρδος από μηχάνημα ηλικίας x.

$c(x)$: ετήσιο κόστος συντήρησης από μηχάνημα ηλικίας x.

$s(x)$: τιμή μεταπώλησης μηχανήματος ηλικίας x

I: κόστος αγοράς νέου μηχανήματος

H: ανώτατο όριο ηλικίας μηχανήματος

Ζητάμε βέλτιστο προγραμματισμό συντήρησης αντικατάστασης ώστε να μεγιστοποιηθεί το καθαρό κέρδος.

Μοντελοποίηση σαν π.δ.π

- Στάδια: $t = 1, 2, \dots, N, \underbrace{N+1}_{\text{τερματικό στάδιο}}$

Στην αρχή κάθε χρονιάς t αποφασίζω αν θα αντικαταστήσω ή θα συντηρήσω

- Καταστάσεις: x_t = ηλικία του μηχανήματος στην αρχή του έτους t.
- Αποφάσεις: $a_t = \begin{cases} 1 & \text{, συντήρηση} \\ 2 & \text{, αντικατάσταση} \end{cases}$

$$\underbrace{D_t(x_t)}_{\text{σύνολο αποφάσεων όταν η κατάσταση είναι } x_t \text{ στην αρχή του έτους } t} = \begin{cases} \{1, 2\} & , x_t < H \\ \{2\} & , x_t = H \end{cases}$$

□ Δυναμική συστήματος:

$$x_{t+1} = g_t(x_t, a_t) = \begin{cases} x_{t+1} & , a_t = 1 \\ 1 & , a_t = 2 \end{cases}$$

□ Άμεσο κέρδος:

$$C_t(x_t, a_t) = \begin{cases} r(x_t) - c(x_t) & , a_t = 1 \\ s(x_t) - I + r(0) - c(0) & , a_t = 2 \end{cases}$$

□ Τερματικό κέρδος:

$$\hat{c}(x_{\nu+1}) = S(x_{\nu+1})$$

□ Εξισώσεις βελτιστοποίησης:

$V(t, x_t)$ = μέγιστο κέρδος αν στην αρχή του t, η κατάσταση είναι x_t.

$V(1, x_1) = ;$

• $$V(t, x_t) = \max_{a_t \in D_t(x_t)} \{ C_t(x_t, a_t) + V(t+1, g_t(x_t, a_t)) \}, \; t = 1, \dots, \nu$$

• $$V(t, x_t) = \begin{cases} \max\{ \underbrace{r(x_t) - c(x_t) + u(t+1, x_{t+1})}_{a_t = 1}, \underbrace{S(x_t) - I + r(0) - c(0) + V(t+1, 1)}_{a_t = 2} \} & , x_t < H \\ S(x_t) - I + r(0) - c(0) & , x_t = H \end{cases}$$

με τερματική συνθήκη $V(\nu+1, x_{\nu+1}) = \hat{c}(x_{\nu+1}) = S(x_{\nu+1})$

Εφαρμογή

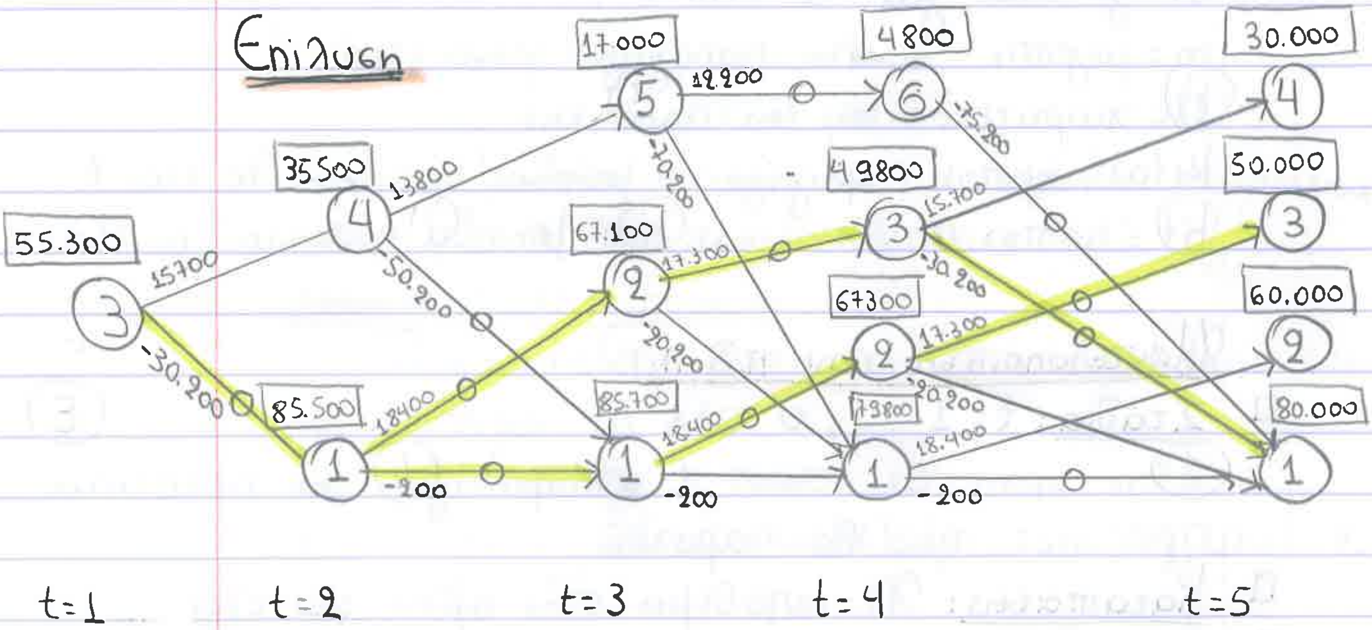
Μια εταιρεία θέλει να βρει βέλτιστη πολιτική αντικατάστασης συντήρησης για ένα μηχάνημα που τώρα είναι 3 ετών και θέλει να το χρησιμοποιήσει για τα επόμενα 4 χρόνια. Όταν το μηχάνημα γίνει 6 ετών πρέπει οπωσδήποτε να αντικατασταθεί. Το κόστος νέου μηχανήματος είναι 100.000€.

Δίνονται τα παρακάτω:

ηλικία (x)	κέρδη r(x)	κόστος συντηρ. c(x)	τιμή μεταπώλησης s(x)
0	20.000	200	—
1	19.000	600	80.000
2	18.500	1200	60.000
3	17.200	1500	50.000
4	15.500	1700	30.000
5	14.000	1800	10.000
6	12.200	2200	5.000

$X_1 = 3$, $H = 6$, $I = 100.000$

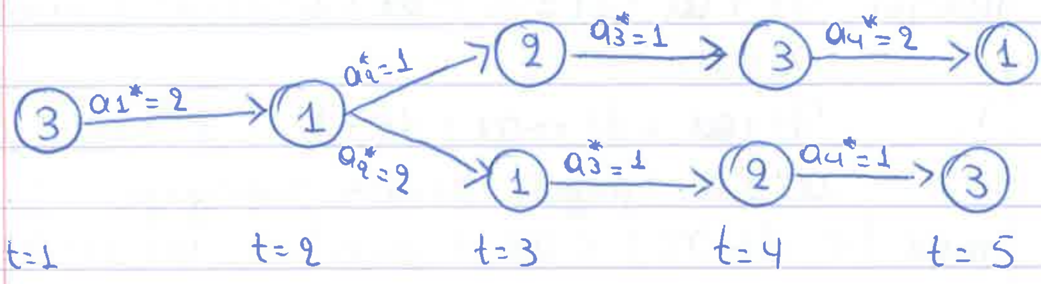
<u>Επίλυση</u>



П.χ $a_1 = 1 : r(3) - c(3) = 17.200 - 1.500 = 15.700$

$a_1 = 2 : s(3) - I + r(0) - c(0) = 50000 - 100.000 + 2.000 - 200$

$V(1,3) = 55.300$



Πρόβλημα παραγωγής-αποθήκευσης

Μια βιομηχανία παράγει ένα προϊόν και πρόκειται να λειτουργήσει τα επόμενα N έτη. Στην αρχή κάθε έτους γίνεται παραγωγή, είτε για να καλύψει τη ζήτηση του έτους, είτε για να χρησιμοποιηθεί ως απόθεμα για τα επόμενα έτη. Να προγραμματιστεί η παραγωγή, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος παραγωγής και αποθήκευσης και να καλύπτεται συνεχώς η ζήτηση

Δεδομένα

N = αριθμός των ετών λειτουργίας

d_t = ζήτηση για το έτος t.

m = μέγιστη δυνατή παραγωγή σ' ένα έτος.

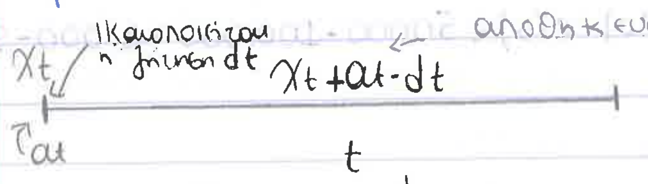
U = χωρητικότητα της αποθήκης

$K_t(a)$ = κόστος παραγωγής a μονάδων προϊόντος το έτος t.

h_t = κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος το έτος t.

Μοντελοποίηση σαν Π.Δ.Π

- Στάδια: $t = 1, \ldots, N, N+1$
  Στην αρχή του έτους t αποφασίζω την ποσότητα προϊόντος που θα παραχθεί
- Καταστάσεις: x_t = απόθεμα στην αρχή του έτους t
- Αποφάσεις: a_t = ποσότητα που θα παραχθεί στην αρχή του έτους t.



Πρέπει $x_t + a_t - d_t \leq U \Rightarrow a_t \leq U + d_t - x_t$ (χωρητικότητα αποθήκης)

$a_t \in \mathbb{N}$

$x_t + a_t \geq d_t \Rightarrow a_t \geq d_t - x_t$ (ικανοποίηση ζήτησης)

$a_t \leq m$ (μέγιστη δυνατή παραγωγή)

$$\max\{0, d_t - x_t\} \leq a_t \leq \min\{m, U + d_t - x_t\}$$

$D_t(x_t) = \{a_t \in \mathbb{N} : \max\{0, d_t - x_t\} \leq a_t \leq \min\{m, u + d_t - x_t\}\}$

- <u>Δυναμική Συστήματος</u>:

$x_{t+1} = g_t(x_t, a_t) = x_t + a_t - d_t$

- <u>Άμεσο κόστος</u>:

$$C_t(x_t, a_t) = \underbrace{k_t(a_t)}_{\text{κόστος παραγωγής}} + \underbrace{h_t * (x_t + a_t - d_t)}_{\text{κόστος αποθήκευσης}}$$

- <u>Τερματικό κόστος</u>: Υπάρχουν διάφορες περιπτώσεις:
  - $\hat{c}(x_{\nu+1}) = \theta \cdot x_{\nu+1}$, αν οι μονάδες που περισσεύουν πρέπει να καταστραφούν με κόστος θ ανά μονάδα
  - Αν είμαστε υποχρεωμένοι να φτάσουμε στο τέλος με k μονάδες:

$$\hat{c}(x_{\nu+1}) = \begin{cases} 0 & , x_{\nu+1} = k \\ \infty & , x_{\nu+1} \neq k \end{cases}$$

  - Αν κάθε μονάδα προϊόντος που έμεινε πωλείται σε τιμή θ, τότε: $\hat{c}(x_{\nu+1}) = -\theta \cdot x_{\nu+1}$

- <u>Εξισώσεις Βελτιστοποίησης</u>:

$V(t, x_t)$ = ελάχιστο κόστος αν στην αρχή του έτους t έχω απόθεμα x_t

$$V(t, x_t) = \min_{a_t \in D_t(x_t)} \{C_t(x_t, a_t) + V(t+1, g_t(x_t, a_t))\}, \quad t = 1, \dots, \nu$$

με τερματική συνθήκη $V(\nu+1, x_{\nu+1}) = \hat{c}(x_{\nu+1})$