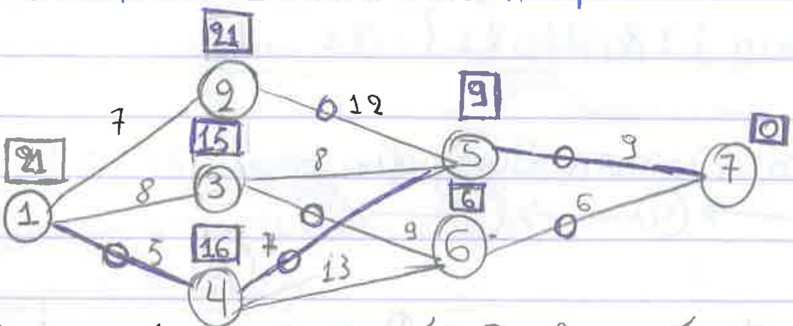
03/12/2021

Δυναμικός Προγραμματισμός

Θεωρούμε προβλήματα που αποτελούνται από στάδια στα οποία παίρνουμε αποφάσεις. Σε κάθε στάδιο λαμβάνεται μια απόφαση. Σπάμε το πρόβλημα σε υποπροβλήματα και κάθε ένα έχει μια μεταβλητή απόφασης

Πρόβλημα (Πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής)

Θέλουμε να βρούμε την ελάχιστη διαδρομή που οδηγεί από την πόλη 1 στην πόλη 7



Στάδιο 1 Στάδιο 2 Στάδιο 3 Στάδιο 4

Λύση

Παρατηρήσεις

- Κάθε διαδρομή αποτελείται από 3 βήματα ⇒ θα πάρω 3 διαδοχικές αποφάσεις
- Σε κάθε βήμα ανάλογα με την πόλη (κατάσταση) στην οποία βρίσκομαι μπορώ να πάρω συγκεκριμένες αποφάσεις.
- Κάθε απόφαση έχει συγκεκριμένο (και γνωστό) κόστος και με οδηγεί σε συγκεκριμένη κατάσταση

→ Ορίζουμε $u(x)$ = ελάχιστη απόσταση από την πόλη x στην πόλη 7. Άρα έχουμε:

(a^* η βέλτιστη απόφαση)

Βήμα 3

$v(5) = 9$ $\qquad a^*(5) = 7$

$v(6) = 6$ $\qquad a^*(6) = 7$

Βήμα 2 $u(2) = 12 + u(5) = 12 + 9 = 21$ $\qquad a^*(2) = 5$

$u(3) = \min\{\underbrace{8 + u(5)}_{\text{αποφ 5}}, \underbrace{9 + u(6)}_{\text{αποφ 6}}\}$ $\qquad a^*(3) = 6$

$= \min\{8+9, 9+6\} = 15$

$u(4) = \min\{7 + u(5), 13 + u(6)\}$ $\qquad a^*(4) = 5$

$= \min\{7+9, 13+6\} = 16$

Βήμα 1 $u(1) = \min\{\underbrace{7 + u(2)}_{\text{αποφ 2}}, \underbrace{8 + u(3)}_{\text{αποφ 3}}, \underbrace{5 + u(4)}_{\text{αποφ 4}}\}$ $\qquad a^*(1) = 4$

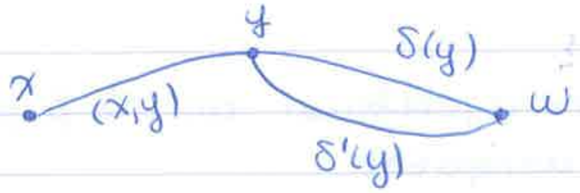
$= \min\{7+21, 8+15, 5+16\}$

$= \min\{28, 23, 21\} = 21$

Άρα η ελάχιστη διαδρομή είναι 21 χλμ:

$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7$

Αρχή βελτιστοποίησης Bellman



Αν η $\delta(x) = ((x,y), \delta(y))$ είναι βέλτιστη, τότε το $\delta(y)$ είναι ο βέλτιστος τρόπος να πάω από την y στην ω.

Απόδειξη: Έστω ότι το $\delta(y)$ δεν είναι βέλτιστο. Τότε υπάρχει άλλη διαδρομή $\delta'(y)$ καλύτερη. Όμως, τότε $\delta'(x) = ((x,y), \delta'(y))$ θα ήταν καλύτερη από την $\delta(x)$. Άτοπο

Συμβολισμοί - Ορισμοί

Σ' ένα πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού έχουμε:

- **Στάδια**: N # σταδίων, χρονικός ορίζοντας
  $t = 1, 2, \ldots, N, \underbrace{N+1}_{\text{τερματικό στάδιο}}$
- **Καταστάσεις**: x_t: κατάσταση στο στάδιο t
  S_t: σύνολο δυνατών καταστάσεων στο στάδιο t
- **Αποφάσεις**: a_t: απόφαση στο στάδιο t
  $D_t(x_t)$ = το σύνολο των δυνατών αποφάσεων όταν στην αρχή του σταδίου t βρισκόμαι στην x_t.
- **Επόμενη κατάσταση**: $x_{t+1} = g_t(x_t, a_t)$ ← συνάρτηση
- **Άμεσο κόστος / κέρδος**: $C_t(x_t, a_t)$
- **Τερματικό κόστος / κέρδος**: $\hat{C}(x_{N+1})$
- **Εξισώσεις Βελτιστοποίησης - Εξισώσεις Bellman**

$$v(t, x_t) = \min_{a_t \in D_t(x_t)} / \max \left\{ C_t(x_t, a_t) + v(t+1, \underbrace{g_t(x_t, a_t)}_{x_{t+1}}) \right\}$$

με τερματικές συνθήκες:

$$v(N+1, x_{N+1}) = \hat{C}(x_{N+1})$$

Πρόβλημα

Ένας φοιτητής πρέπει να επιλέξει 7 μαθήματα επιλογής από 4 κατηγορίες με τουλάχιστον 1 μάθημα από κάθε κατηγορία. Ο παρακάτω πίνακας δίνει ένα σκορ που μετράει τη γνώση που έχει αποκομίσει, παίρνοντας κάποιο αριθμό μαθημάτων από κάθε κατηγορία.

$R(t, a_t)$	# μαθημάτων (a_t)			
κατηγορία (t)	1	2	3	4
1	25	50	60	80
2	20	70	90	100
3	40	60	80	100
4	10	20	30	40

Λύση: Μοντελοποίηση σαν π.δ.π.

- **Στάδια**: $N = 4$

Στο στάδιο t αποφασίζουμε πόσα μαθήματα θα πάρει από την κατηγορία t.

- **Κατάσταση**: x_t = αριθμός μαθημάτων που απομένουν για τα στάδια $t, t+1, \dots, N$
- **Αποφάσεις**: a_t = αριθμός μαθημάτων που θα πάρει από την κατηγορία t.

$a_t \geq 1$, $a_t \leq 4$, $a_t \leq x_t - (N-t)$

$D_t(x_t) = \{a_t \in \mathbb{N},\ 1 \leq a_t \leq \min\{4, x_t-(N-t)\}\}$

- **Άμεσο κέρδος**: $C_t(x_t, a_t) = R(t, a_t)$

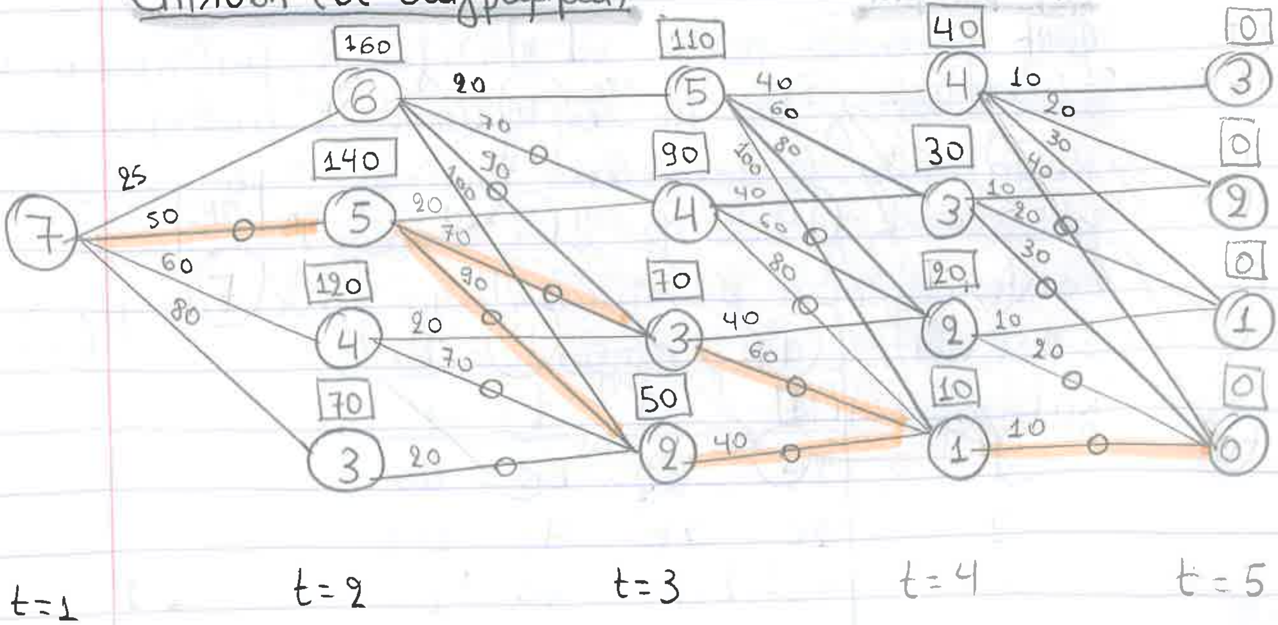
όπως το δίνει ο πίνακας

- **Τερματικό κέρδος**: $\hat{C}(x_{N+1}) = 0$
- **Επόμενη κατάσταση**: $x_{t+1} = g_t(x_t, a_t) = x_t - a_t$
- **Εξισώσεις Bellman**:

$$u(t, x_t) = \max_{a_t \in D_t(x_t)} \{C_t(x_t, a_t) + u(t+1, \overbrace{x_t - a_t}^{x_{t+1}})\}$$

με τερματικές συνθήκες $u(5, x_5) = \hat{C}(x_5) = 0$

Επίλυση (σε διάγραμμα)



Επίλυση (με πίνακα)

t	x_t	a_t	$C_t(x_t, a_t)$	x_{t+1}	$V(t,x)$
1	7	1	25		$25+160=185$
		2	50		$50+140=\boxed{190}$
		3	60		$60+120=180$
		4	80		$80+70=150$
2	6	1	20		$20+110=130$
		2	70		$70+90=\boxed{160}$
		3	90		$90+70=\boxed{160}$
		4	100		$100+50=150$
	5	1	20		$20+90=110$
		2	70		$70+70=\boxed{140}$
		3	90		$90+50=\boxed{140}$
	4	1	20		$20+70=90$
		2	70		$70+50=\boxed{120}$
	3	1	20		$20+50=\boxed{70}$
3	5	1	40		$40+40=80$
		2	60		$60+30=90$
		3	80		$80+20=100$
		4	100		$100+10=\boxed{110}$
	4	1	40		$40+30=70$
		2	60		$60+20=80$
		3	80		$80+10=\boxed{90}$
	3	1	40		$40+20=60$
		2	60		$60+10=\boxed{70}$
	2	1	40		$40+10=\boxed{50}$
4	4	1	10		$10+0=10$
		2	20		$20+0=20$
		3	30		$30+0=30$
		4	40		$40+0=\boxed{40}$

t	x_t	a_t	$C_t(x_t,a_t)$	x_{t+1}	$V(t,x)$
	3	1	10		$10+0=10$
		2	20		$20+0=20$
		3	30		$30+0=\boxed{30}$
	2	1	10		$10+0=10$
		2	20		$20+0=\boxed{20}$
	1	1	10		$10+0=\boxed{10}$
5	3		—		$\boxed{0}$
	2		—		$\boxed{0}$
	1		—		$\boxed{0}$
	0		—		$\boxed{0}$

$V(1,7) = 190$