26/11/2021

$\max f(\underset{\sim}{x})$
υπό $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$
όπου $f: \mathbb{R}^n \to R$

Αναγκαία συνθήκη για τοπικό μέγιστο

- $\underset{\sim}{x}^* \in \mathbb{R}^n$ είναι τοπικό μέγιστο της f $\Rightarrow \begin{Bmatrix} \nabla f(\underset{\sim}{x}^*) = \underset{\sim}{0} \\ Hf(\underset{\sim}{x}^*) \text{ αρνητικά ημιορισμένος} \end{Bmatrix}$

Ικανή συνθήκη για τοπικό μέγιστο

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \nabla f(\underset{\sim}{x}^*) = \underset{\sim}{0} \\ Hf(\underset{\sim}{x}^*) \text{ αρνητικά ορισμένος} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{το } \underset{\sim}{x}^* \text{ είναι τοπικό μέγιστο}$$

Άσκηση: Να βρεθεί τοπικό μέγιστο της:
$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 - 3x_2 + x_1 x_2$

Απάντηση: • $\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right)$
$= (-2x_1 + 2 + x_2, -2x_2 - 3 + x_1)$

- $Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

- $\nabla f(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} -2x_1 + 2 + x_2 = 0 \\ -2x_2 - 3 + x_1 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -2(2x_2 + 3) + 2 + x_2 = 0 \\ x_1 = 2x_2 + 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} -3x_2 = 4 \\ x_1 = 2x_2 + 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_2 = -4/3 \\ x_1 = 1/3 \end{Bmatrix}$$

$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

• $Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ← Για να δείξω ότι είναι αρνητικά ορισμένος, αρκεί να δείξω ότι ο αντίθετος του είναι θετικά ορισμένος:

$$-Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

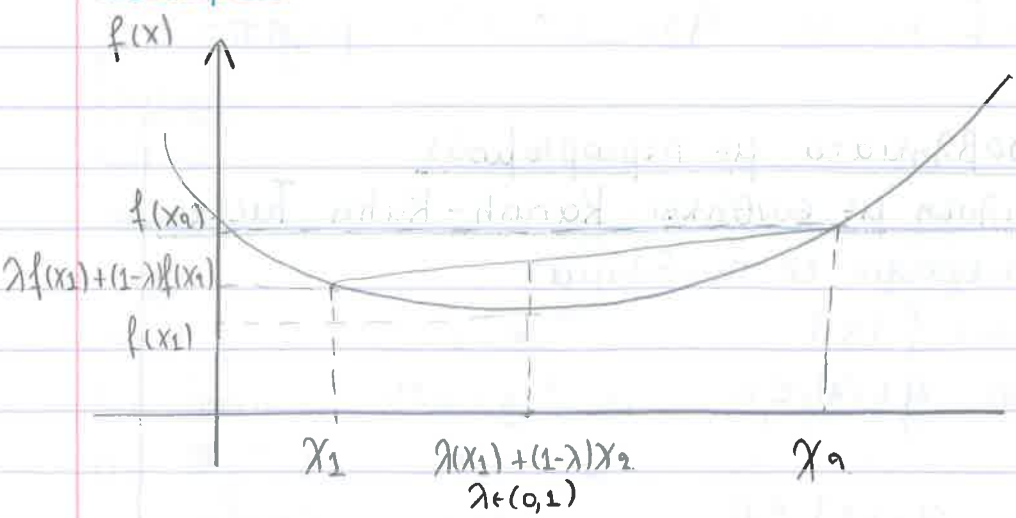
$$\left.\begin{array}{l} |2| = 2 > 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3 > 0 \end{array}\right\}$$ είναι θετικά ορισμένος, διότι οι κύριες υποορίζουσες είναι θετικές.

Άρα ο $Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ είναι αρνητικά ορισμένος.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Άρα δείξαμε ότι } \nabla f\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = (0,0) \\ \text{και ότι } Hf\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ αρνητικά ορισμένος} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$x^* = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ τοπικό μέγιστο

υπενθύμιση:



Ορισμός

Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή (κοίλη) συνάρτηση αν $\forall \underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$ ισχύει ότι:

$$\boxed{f(\lambda \underset{\sim}{x_1} + (1-\lambda)\underset{\sim}{x_2}) \underset{(\geq)}{\leq} \lambda f(\underset{\sim}{x_1}) + (1-\lambda) f(\underset{\sim}{x_2})}$$

Κριτήριο κυρτότητας - κοιλότητας

Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή (κοίλη) αν και μόνο αν ο $Hf(\underset{\sim}{x})$ είναι θετικά ημιορισμένος (αρνητικά ημιορισμένος) $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Θεώρημα

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f \text{ κοίλη} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{το τοπικό μέγιστο είναι και ολικό μέγιστο}$$

Άσκηση (συνέχεια)

$\underset{\sim}{x}^* = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ τοπικό μέγιστο

$$Hf(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$ αρνητικά ορισμένος $\forall \underset{\sim}{x} = (x_1, x_2)$

$\Rightarrow f$ κοίλη. Άρα $\underset{\sim}{x}^*$ ολικό μέγιστο.

Προβλήματα με περιορισμούς

Επίλυση με συνθήκες Karush-Kuhn Tucker

Θεωρούμε το πρόβλημα:

$\max f(\underset{\sim}{x})$

υπό $g_1(\underset{\sim}{x}) \leq 0$

$\vdots$

$g_p(\underset{\sim}{x}) \leq 0$

με $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη και

$g_1(\underset{\sim}{x}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτές, $i=1,\dots,p$

Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται πρόβλημα κυρτού προγραμματισμού (ΚΠ1)

Κάνουμε το εξής:

Για κάθε περιορισμό θεωρούμε έναν πολλαπλασιαστή $\mu_i \geq 0$.

Φτιάχνουμε τη συνάρτηση Lagrange:

$$\boxed{L(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(x_1,x_2,\dots x_n)-\sum_{i=1}^{p}\mu_i g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)}$$

(μ_i: πολλαπλασιαστές Lagrange)

Θεώρημα

Θεωρούμε το ΚΠ1 με εφικτή περιοχή F. Έστω

$\underset{\sim}{x}^*=(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)\in F$ και $\underset{\sim}{\mu}^*=(\mu_1^*,\mu_2^*,\dots,\mu_p^*)$

τέτοια ώστε
$$\mu_i^* \geq 0,\ i=1,\dots,p \qquad (1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\underset{\sim}{x}^*)=0,\ j=1,\dots,n \qquad (2)$$
$$\mu_i^*\cdot g_i(\underset{\sim}{x}^*)=0,\ i=1,\dots,p \qquad (3)$$
$$g_i(\underset{\sim}{x}^*)\leq 0,\ i=1,\dots,p \qquad (4)$$

Τότε το $\underset{\sim}{x}^*$ είναι βέλτιστη λύση του ΚΠ1

Πόρισμα 1

Έστω το π.μ.γ.π.

max $f(\underset{\sim}{x})$ ΚΠ2

υπό $\underset{\sim}{x}\geq 0$

με $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ κοίλη

Αν υπάρχει $\underset{\sim}{x}^*=(x_1^*,x_2^*,\dots,x_n^*)$

με $x_j^*\geq 0,\ j=1,\dots,n$ (1)

$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}\leq 0,\ j=1,\dots,n$ (2)

$$x_j^* \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underset{\sim}{x}^*) = 0, \; j = 1, \dots, n \quad (3)$$

Αν το x^* ικανοποιεί τα παραπάνω είναι βέλτιστη λύση του ΚΠ2

<u>Πόρισμα</u>

Θεωρούμε το π.μ.γ.π

$$\max f(\underset{\sim}{x})$$

υπό $g_1(\underset{\sim}{x}) \leq 0$

$g_2(\underset{\sim}{x}) \leq 0$ ΚΠ3

$\vdots$

$g_n(\underset{\sim}{x}) \leq 0$

$x_j \geq 0, \; j = 1, \dots, n$

όπου $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κοίλη, $g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ κυρτές, $i = 1, \dots, p$

τότε $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Αν υπάρχουν $\underset{\sim}{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ και

$\underset{\sim}{\mu}^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_n^*)$ έτσι ώστε

$$\mu_i \geq 0, \; i = 1, \dots, p \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\underset{\sim}{x}^*) \leq 0, \; j = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$x_j^* \frac{\partial L}{\partial x_j}(\underset{\sim}{x}^*) = 0, \; j = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$g_i(\underset{\sim}{x}^*) \leq 0, \; i = 1, \dots, p \quad (4)$$

$$\mu_i g_i(\underset{\sim}{x}^*) = 0, \; i = 1, \dots, p \quad (5)$$

$$x_j^* \geq 0 \;\; \forall j = 1, \dots, n \quad (6)$$

τότε το $\underset{\sim}{x}^*$ είναι βέλτιστη λύση του ΚΠ3

Άσκηση:

Έστω $f(x_1,x_2)=5+4x_1+6x_2-x_1^2-x_2^2$. Να λυθεί το:

$\max f(x_1,x_2)$

υπό $x_1+x_2\le 4$

$x_1\ge 0$

$x_2\ge 0$

Λύση:

Έχουμε $g_1(x_1,x_2)=x_1+x_2-4$. Άρα

$\max f(x_1,x_2)$

υπό $g_1(x_1,x_2)\le 0$

$x_1,x_2\ge 0$

f κοίλη $\to$ Αρκεί ν.δ.ο ο $Hf(x_1,x_2)$ είναι αρνητικά ημιορισμένος

- $\nabla f(x_1,x_2)=(4-2x_1,\ 6-2x_2)$
- $Hf(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$
- $-Hf(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l}|2|=2>0\\ \begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4-0=4>0\end{array}\right\}$$

Ο $-Hf(x_1,x_2)$ είναι θετικά $\Rightarrow$ ορισμένος, άρα $Hf(x_1,x_2)$ αρνητικά ορισμένος $\Rightarrow$ f **κοίλη**

Η $g(x_1,x_2)=x_1+x_2-4$ είναι **κυρτή** ως γραμμική

$\to$ Άρα έχω πρόβλημα της μορφής ΚΠ3. Η συνάρτηση Lagrange είναι:

$L(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)-\mu_1 g_1(x_1,x_2)\Rightarrow$

$L(x_1,x_2)=5+4x_1+6x_2-x_1^2-x_2^2-\mu_1(x_1+x_2-4)$

Συνθήκες ΚΚΤ

$\mu_1 \geq 0$	ΚΚΤ1
$4-2x_1-\mu_1 \leq 0$	ΚΚΤ2
$6-2x_2-\mu_1 \leq 0$	ΚΚΤ3
$x_1 * (4-2x_1-\mu_1)=0$	ΚΚΤ4
$x_1 * (6-2x_2-\mu_1)=0$	ΚΚΤ5
$x_1+x_2-4 \leq 0$	ΚΚΤ6
$\mu_1(x_1+x_2-4)=0$	ΚΚΤ7
$x_1 \geq 0$	ΚΚΤ8
$x_2 \geq 0$	ΚΚΤ9

Για να λύσω το σύστημα παίρνω περιπτώσεις:

$\mu_1=0$ ή $\mu_1>0$ (2 περιπτώσεις)

$x_1=0$ ή $x_1>0$ (2 περιπτώσεις)

$x_2=0$ ή $x_2>0$ (2 περιπτώσεις)

8 περιπτώσεις

1η περίπτωση: $\mu_1=0$, $x_1=0$, $x_2=0$

ΚΚΤ2 δεν ισχύει ✗

2η περίπτωση: $\mu_1=0$, $x_1=0$, $x_2>0$

ΚΚΤ2 δεν ισχύει ✗

3η περίπτωση: $\mu_1=0$, $x_1>0$, $x_2=0$

ΚΚΤ3 δεν ισχύει ✗

4η περίπτωση: $\mu_1=0$, $x_1>0$, $x_2>0$

ΚΚΤ2 $\Rightarrow 4-2x_1-0 \leq 0 \Rightarrow x_1 \geq 2$

ΚΚΤ3 $\Rightarrow 6-2x_2-0 \leq 0 \Rightarrow x_2 \geq 3$

ΚΚΤ4 $\xRightarrow{x_1>0} 4-2x_1-0=0 \Rightarrow x_1=2$

ΚΚΤ5 $\xRightarrow{x_2>0} 6-2x_2-0=0 \Rightarrow x_2=3$

ΚΚΤ6 $\xRightarrow{x_1=2,\, x_2=3} 2+3-4 \leq 0 \Rightarrow 1 \leq 0$ δεν ισχύει ✗

5η περίπτωση: $\mu_1>0$, $x_1=0$, $x_2=0$

ΚΚΤ7 $\xRightarrow{\mu_1>0} x_1+x_2-4=0 \xRightarrow{x_1=x_2=0} -4=0$ δεν ισχύει ✗

6η περίπτωση: $\mu_1>0,\ x_1>0,\ x_2=0$

KKT7 $\xRightarrow{\mu_1>0} x_1+x_2-4=0 \xRightarrow{x_2=0} x_1=4$

KKT4 $\xRightarrow{x_1>0} 4-2x_1-\mu_1=0 \Rightarrow 4-2\cdot 4=\mu_1 \Rightarrow \mu_1=-4$ δεν ισχύει λόγω KKT1 X

7η περίπτωση: $\mu_1>0,\ x_1=0,\ x_2>0$

KKT7 $\xRightarrow{\mu_1>0} x_1+x_2-4=0 \xRightarrow{x_1=0} x_2=4$

KKT5 $\xRightarrow{x_2>0} 6-2x_2-\mu_1=0 \xRightarrow{x_2=4} 6-2\cdot 4=\mu_1 \Rightarrow \mu_1-2$ δεν ισχύει λόγω KKT1 X

8η περίπτωση: $\mu_1>0,\ x_1>0,\ x_2>0$

KKT7 $\xRightarrow{\mu_1>0} x_1+x_2-4=0 \Rightarrow \boxed{x_1=4-x_2}$

KKT4 $\xRightarrow{x_1>0} 4-2x_1-\mu_1=0 \xRightarrow{x_1=4-x_2} 4-2(4-x_2)=\mu_1 \Rightarrow$

$\boxed{\mu_1=-4+2x_2}$

KKT5 $\xRightarrow{x_2>0} 6-2x_2-\mu_1=0 \Rightarrow \boxed{\mu_1=6-2x_2}$

$-4+2x_2=6-2x_2 \Rightarrow x_2=5/2$

$x_1=4-\frac{5}{2} \Rightarrow x_1=3/2$

$\mu_1=6-\cancel{2}\cdot\frac{5}{\cancel{2}} \Rightarrow \mu_1=1$

Επαληθεύονται όλες άρα βρήκα τη λύση, που είναι:

$x^*=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$

Άσκηση: Έχουμε

max $-2x_1^2-1x_2^2+x_1x_2-2x_1-x_2$

υπό $x_1+x_2\le 5$

Λύση: $f(x_1,x_2)=-2x_1^2-1x_2^2+x_1x_2-2x_1-x_2$ πρέπει ν.δ.ο είναι κοίλη

$g_1(x_1,x_2)=x_1+x_2-5$ κυρτή ως γραμμική

Είναι της μορφής ΚΠ1

$L(x_1,x_2)=-2x_1^2-1x_2^2+x_1x_2-2x_1-x_2-\mu_1(x_1+x_2-5)$

Συνθήκες ΚΚΤ

$\mu_1 \geq 0$ ΚΚΤ1

$-4x_1 + x_2 - 2 - \mu_1 = 0$ ΚΚΤ2

$-2x_2 + x_1 - 1 - \mu_1 = 0$ ΚΚΤ3

$\mu_1 (x_1 + x_2 - 5) = 0$ ΚΚΤ4

$x_1 + x_2 - 5 \leq 0$ ΚΚΤ5

Περιπτώσεις: $\mu_1 = 0$ & $\mu_1 > 0$

- Αν $\mu_1 = 0$

ΚΚΤ2 : $x_2 = 4x_1 + 2$

ΚΚΤ3 : $x_1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow$

$x_1 = 2(4x_1 + 2) + 1 \Rightarrow x_1 = -5/7$

$x_2 = 4\left(-\frac{5}{7}\right) + 2 \Rightarrow x_2 = -6/7$

ΚΚΤ1 ✓ ΚΚΤ4 ✓ ΚΚΤ5 ✓

Η λύση είναι: $x^* = \left(-\frac{5}{7}, -\frac{6}{7}\right)$