22/11/2021

Άσκηση 1

max $3x_1 + 2x_2$
υπό $3x_1 - 4x_2 \leq 12$
$2x_1 + x_2 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

(α) Να λυθεί το π.γ.π.
(β) Συμπέρασμα για το δυικό του;

Απάντηση:

(α) Το πρόβλημα είναι σε τυπική μορφή και το αρχικό λεξικό είναι:

$$
\begin{array}{l}
\zeta = 0 + \boxed{3x_1} + 2x_2 \\
\hline
w_1 = 12 - 3x_1 + 4x_2 \quad \downarrow \ x_1 = \frac{12}{3} \\
w_2 = 4 - 2x_1 - x_2 \quad \downarrow \ x_1 = \frac{4}{2}
\end{array}
$$

Η λύση είναι εφικτή (έχει μη-αρνητικά στοιχεία), άρα μπορώ να εφαρμόσω μέθοδο Simplex
Η λύση δεν είναι βέλτιστη (υπάρχουν θετικοί συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση)
Η x_1 μπαίνει στη βάση $(3>0)$
Η w_2 βγαίνει από τη βάση $\left(\min\left\{\frac{12}{3}, \frac{4}{2}\right\} = \frac{4}{2}\right)$

Το επόμενο λεξικό είναι:

$$
\begin{array}{l}
\zeta = 6 - \frac{3}{2} w_2 + \boxed{\frac{1}{2} x_2} \\
\hline
w_1 = 6 + \frac{3}{2} w_2 + \frac{11}{2} x_2 \quad \uparrow \\
x_1 = 2 - \frac{1}{2} w_2 - \frac{1}{2} x_2 \quad \downarrow
\end{array}
$$

Το λεξικό δεν είναι βέλτιστο

Η x_2 μπαίνει στη βάση $(1/2 > 0)$
Η x_1 θα βγη από τη βάση
Το επόμενο λεξικό είναι:

$$\begin{aligned} \zeta &= 8 - 2w_2 - x_1 \\ \hline w_1 &= 28 - 4w_2 - 11x_1 \\ x_2 &= 4 - w_2 - 2x_1 \end{aligned}$$

Είναι βέλτιστη λύση (αφού όλοι οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης ≤ 0)
Η βέλτιστη λύση είναι:
$(x_1^*, x_2^*, w_1^*, w_2^*) = (0, 4, 28, 0)$ με $\zeta^* = 8$

(β) Το δυϊκό έχη και αυτό βέλτιστη λύση (από ισχυρό δυϊκό θεώρημα) με $\xi^* = 8$ και η βέλτιστη λύση είναι:
$$(\underset{\substack{\downarrow \\ w_1}}{y_1^*}, \underset{\substack{\downarrow \\ w_2}}{y_2^*}, \underset{\substack{\downarrow \\ x_1}}{z_1^*}, \underset{\substack{\downarrow \\ x_2}}{z_2^*}) = (0, 2, 1, 0)$$

$$\text{αρχικές} \left\{ \begin{matrix} x_1 \longleftrightarrow z_1 \\ x_2 \longleftrightarrow z_2 \end{matrix} \right\} \text{περιθώριες}$$

$$\text{περιθώριες} \left\{ \begin{matrix} w_1 \longleftrightarrow y_1 \\ w_2 \longleftrightarrow y_2 \end{matrix} \right\} \text{αρχικές}$$

Άσκηση 2

$$\begin{aligned} \max \quad & -3x_1 - 4x_2 \\ \text{υπό} \quad & -1x_1 + 2x_2 \leq -6 \\ & 3x_1 - 1x_2 \leq -3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(α) Να λυθεί το π.γ.π
(β) Συμπέρασμα για δυϊκό;

Απάντηση:

(α) Είναι σε τυπική μορφή και το αρχικό λεξικό είναι:

$$\begin{array}{l} \zeta = 0 - \boxed{3x_1} - 4x_2 \\ \hline \boxed{w_1} = -6 + 1x_1 - 2x_2 \\ w_2 = -3 - 3x_1 + 1x_2 \end{array}$$

→ κοιτάω τους θετικούς συντελεστές (αν ήταν και οι 2 θα διάλεγα αυτό με τον μικρότερο λόγο. πχ εδώ 3/1 και 4/2, θα διάλεγα το 4/2 άρα την x_2)

Έχω "βελτιστότητα" αλλά όχι "εφικτότητα". Μπορώ να ξεκινήσω από τη Φάση I της Simplex ή να εφαρμόσω δυϊκή μέθοδο Simplex. (Αφού έχω βελτιστότητα θα εφαρμόσω δυϊκή μέθοδο Simplex)

Η w_1 βγαίνει από τη βάση επειδή $(\max\{|-6|, |-3|\} = |-6|)$

Η x_1 θα μπει στη βάση $(1>0)$

$$\begin{array}{l} \zeta = -18 - 3w_1 - 10x_2 \\ \hline x_1 = 6 + 1w_1 + 2x_2 \\ w_2 = -21 - 3w_1 - 5x_2 \end{array}$$

Δεν είναι πάλι βέλτιστο

Η w_2 βγαίνει από τη βάση $(-21<0)$

Δεν υπάρχει υποψήφια να μπει στη βάση γιατί όλοι οι συντελεστές είναι αρνητικοί $(-3<0$ & $-5<0)$. Άρα το πρόβλημα είναι μη εφικτό

(β) Το δυϊκό θα είναι μη εφικτό ή μη φραγμένο.

Άσκηση 3

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + x_2 - 4x_3 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_3 \le -4 \\ & -3x_1 - 4x_2 + 3x_3 \le -7 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 8 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{array}$$

(α) Να λυθεί το π.γ.π
(β) Συμπέρασμα για το δυϊκό;
(γ) Ισχύει το Θεώρημα Συμπληρωματικής Χαλαρότητας;

(α) Το αρχικό λεξικό είναι:

$$\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 3x_1 + x_2 - 4x_3 \\
\hline
w_1 &= -4 + 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 \\
w_2 &= -7 + 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\
w_4 &= 2 - x_1 - x_2 + x_3
\end{aligned}$$

Δεν είναι βέλτιστο.
όχι "εφικτότητα" => δεν μπορώ να εφαρμόσω Simplex
όχι "βελτιστότητα" => δεν μπορώ να εφαρμόσω δυϊκή Simplex
Μπορώ να ξεκινήσω με τη φάση I ή θα εφαρμόσω δυϊκή μέθοδο Simplex σε τροποποιημένο πρόβλημα (αλλάζω μόνο την αντικειμενική συνάρτηση)

$$\begin{aligned}
\zeta' &= 0 - 1x_1 - \boxed{1x_2} - 1x_3 \\
\hline
w_1 &= -4 + 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 \\
\boxed{w_2} &= -7 + 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\
w_4 &= 2 - x_1 - x_2 + x_3
\end{aligned}$$

Η w_2 βγαίνει από τη βάση αφού $\left(\max\{|-4|, |-7|\} = |-7|\right)$
Η x_2 θα μπει στη βάση αφού $\left(\min\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}\right)$

Το επόμενο λεξικό θα είναι:

$$\zeta' = -7/4 - 1/4\,x_1 - 1/4\,w_2 - 7/4\,x_3$$
$$\boxed{w_1} = -1/2 - 1/2\,x_1 + \boxed{1/2\,w_2} + 1/2\,x_3$$
$$x_2 = 7/4 - 3/4\,x_1 + 1/4\,w_2 + 3/4\,x_3$$
$$w_3 = 11/4 - 3/4\,x_1 - 3/4\,w_2 - 1/4\,x_3$$
$$w_4 = 1/4 - 1/4\,x_1 - 1/4\,w_2 + 1/4\,x_3$$

Δεν είναι βέλτιστο

Η w_1 βγαίνει από τη βάση

Η w_2 μπαίνει στη βάση, αφού $\left(\min\left\{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}}\right\} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\right)$

Το επόμενο λεξικό είναι:

$$\zeta' = -5/2 - 1/2\,x_1 - 1/2\,w_1 - 3/2\,x_3$$
$$w_2 = 1 + x_1 + 2w_1 - x_3$$
$$x_2 = 2 - 1/2\,x_1 + 1/2\,w_1 + 1/2\,x_3$$
$$w_3 = 2 - 3/2\,x_1 - 3/2\,w_1 + 1/2\,x_3$$
$$w_4 = 0 - 1/2\,x_1 - 1/2\,w_1 + 1/2\,x_3$$

Είναι βέλτιστο → Δίνει βέλτιστη λύση για το τροποποιημένο και εφικτή λύση για το αρχικό

Κρατάμε τους περιορισμούς όπως είναι στο τελευταίο λεξικό του τροποποιημένου και γράφουμε την αντικειμενική συνάρτηση του αρχικού συνάρτηση των μη-βασικών μεταβλητών του τροποποιημένου

$$\zeta = 3x_1 + x_2 - 4x_3$$
$$= 3x_1 + (2 - 1/2\,x_1 + 1/2\,w_1 + 1/2\,x_3) - 4x_3$$
$$= 2 + \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}w_1 - \frac{7}{2}x_3$$

Άρα, το λεξικό θα είναι:

$$
\begin{array}{l}
\zeta = 2 + \boxed{\tfrac{5}{2}x_1} + \tfrac{1}{2}w_1 - \tfrac{7}{2}x_3 \\
\hline
w_2 = 1 + x_1 + 2w_1 - x_3 \\
x_2 = 2 - \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}w_1 + \tfrac{1}{2}x_3 \\
w_3 = 2 - \tfrac{3}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}w_1 + \tfrac{1}{2}x_3 \\
w_4 = 0 - \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}w_1 + \tfrac{1}{2}x_3
\end{array}
$$

$\uparrow$

$\downarrow$ μηδ για $x_1 = 2/1/2$

$\downarrow$ μηδ. για $x_1 = 2/3/2$

$\downarrow$ μηδ. για $x_1 = 0/1/2$

Δεν είναι βέλτιστο.
Συνεχίζουμε με μέθοδο Simplex.
Η w_1 μπαίνει στη βάση $(1/2 > 0)$
Η w_4 βγαίνει από τη βάση, αφού $\left(\min\left\{\frac{2}{\frac{1}{2}}, \frac{2}{\frac{3}{2}}, \frac{0}{\frac{1}{2}}\right\} = \frac{0}{\frac{1}{2}}\right)$

Το επόμενο λεξικό θα είναι:

$$
\begin{array}{l}
\zeta = 2 - 5w_4 - 2w_1 - x_3 \\
\hline
w_2 = 1 - 2w_4 + w_1 \\
x_2 = 2 + w_4 + w_1 \\
w_3 = 2 + 3w_4 - x_3 \\
x_1 = 0 - 2w_4 - w_1 + x_3
\end{array}
$$

Το λεξικό είναι βέλτιστο.
Η βέλτιστη λύση είναι
$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, w_1^*, w_2^*, w_3^*, w_4^*) = (0, 2, 0, 0, 1, 2, 0)$ με $\zeta^* = 2$

(β) Το δυϊκό έχει βέλτιστη λύση με $\xi^* = 2$ και
$(y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, z_1^*, z_2^*, z_3^*) = (2, 0, 0, 5, 0, 0, 1)$

(γ) Θα πρέπει

$$
\begin{array}{lcl}
y_1^* \cdot w_1^* = 0 & & x_1^* \cdot z_1^* = 0 \\
y_2^* \cdot w_2^* = 0 & \& & x_2^* \cdot z_2^* = 0 \\
y_3^* \cdot w_3^* = 0 & & x_3^* \cdot z_3^* = 0 \\
y_4^* \cdot w_4^* = 0 & &
\end{array}
$$

που εδώ ισχύουν - επαληθεύονται όλες

Μη γραμμικός προγραμματισμός

* Προβλήματα μη-γραμμικού προγραμματισμού χωρίς περιορισμούς

$\max \ f(\underset{\sim}{x})$

υπό $\quad \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$

$\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

όπου $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους 2ης τάξης

Π.χ. $\max \ x_1^3 + 2x_1x_2^2 + 2x_1x_2$

υπό $\quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Ορισμοί

- $\underset{\sim}{x}^*$ είναι ολικό μέγιστο της f, αν $f(\underset{\sim}{x}^*) \geq f(\underset{\sim}{x})$, $\forall \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\underset{\sim}{x}^*$ είναι τοπικό μέγιστο της f, αν $\exists \varepsilon > 0$ $f(\underset{\sim}{x}^*) \geq f(\underset{\sim}{x})$ $\forall \underset{\sim}{x}$ με $\|\underset{\sim}{x} - x^*\| < \varepsilon$

Ορισμοί

- Ανάδελτα της f στο $\underset{\sim}{x}$: $\nabla f(\underset{\sim}{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underset{\sim}{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underset{\sim}{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underset{\sim}{x})\right)$
- Εσσιανός πίνακας της f:

$$Hf(\underset{\sim}{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\underset{\sim}{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(\underset{\sim}{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n}(\underset{\sim}{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(\underset{\sim}{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\underset{\sim}{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n}(\underset{\sim}{x}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1}(\underset{\sim}{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2}(\underset{\sim}{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\underset{\sim}{x}) \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2 x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

(α) $\nabla f(x_1, x_2, x_3) =$;

(β) $\nabla f(1, 2, 0) =$;

(γ) $H f(x_1, x_2, x_3) =$;

(α) $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (1 - 2x_1,\ x_3 - 2x_2,\ 2 + x_2 - 2x_3)$

$\downarrow$ Βάζω τα σημεία 1, 2, 0 που θέλω

(β) $\nabla f(1,2,0) = (-1, -4, 4)$

(γ) $$H f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ορισμοί

- Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Ο A λέγεται:
  (i) Θετικά ορισμένος, αν $x'Ax > 0,\ \forall x \neq 0$
  (ii) Θετικά ημιορισμένος, αν $x'Ax \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
  (iii) αρνητικά ορισμένος, αν $x'Ax < 0,\ \forall x \neq 0$
  (iv) αρνητικά ημιορισμένος, αν $x'Ax \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Κριτήρια

- A αρνητικά (ημι)ορισμένος $\Leftrightarrow$ $-A$ είναι θετικά (ημι)ορισμένος
- A θετικά ορισμένος αν οι κύριες υποορίζουσές του είναι όλες θετικές

$$\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Ν.δ.ο ο $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ είναι αρνητικά ορισμένος

Λύση:

$-A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$|2| = 2 > 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$

Ο $-A$ έχει θετικές κύριες υποορίζουσες => είναι θετικά ορισμένος => A αρνητικά ορισμένος