05/11/2021

Πολλές επιλογές για εισερχόμενη στη βάση μεταβλητή

π.χ

$$\begin{aligned}
\zeta &= 5 + 2x_3 + 3x_1 - 1w_3 \\
w_1 &= 6 - 3x_3 - 2x_1 - 2w_3 \quad \downarrow\ x_1 = 3 \\
x_2 &= 5 + 2x_3 - 5x_1 + 1w_3 \quad \downarrow\ x_1 = 1 \\
w_2 &= 12 - 2x_3 + 1x_1 + 2w_3 \quad \uparrow
\end{aligned}$$

Αν μπει x_3, η w_1 βγαίνει
Αν μπει x_1, η x_2 βγαίνει } =>

- Με κανόνα μέγιστου συντελεστή μπαίνει η x_1
- Με κανόνα 1ου θετικού συντελεστή μπαίνει η x_3
- Με κανόνα του Bland μπαίνει η x_1
- Με κανόνα μέγιστης άμεσης αύξησης:
  - αν μπει η x_3, αύξηση ζ $2*2=4$
  - αν μπει η x_1, αύξηση ζ $3*1=3$

Απουσία επιλογής για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή

$$\begin{aligned}
\zeta &= 5 + 2x_3 + 3x_1 - 1w_3 \\
w_1 &= 6 + 3x_3 - 2x_1 - 2w_3 \\
x_2 &= 5 + 2x_3 - 5x_1 + 1w_3 \\
w_2 &= 12 + 2x_3 + x_1 + 2w_3
\end{aligned}$$

→ Αν επιλέξω να μπει η x_3 στη βάση, όσο αυξάνεται η x_3 αυξάνονται οι τιμές των βασικών μεταβλητών. Μπορώ να αυξήσω την x_3 απεριόριστα, άρα το πρόβλημα είναι μη φραγμένο (και σταματάμε εκεί)

[Να τσεκάρουμε γενικά τις στήλες μήπως είναι παντού θετικές ακόμα κι αν εδώ πχ εδώ είχα ασχοληθεί μόνο με x_1]

Πολλές επιλογές για εξερχόμενη από τη βάση μεταβλητή

π.χ

$\zeta = 5 + 2x_3 - 3x_1 - 1w_3$

$w_1 = 6 - 3x_3 - 2x_1 - 2w_3 \quad \downarrow x_3 = 2$

$x_2 = 5 + 2x_3 - 5x_1 + 1w_3 \quad \uparrow$

$w_2 = 12 - 6x_3 + 1x_1 + 2w_3 \quad \downarrow x_3 = 2$

Εδώ διαλέγω τυχαία w_1 ή w_2, αλλά περιμένω η άλλη από αυτή που θα διαλέξω στο επόμενο λεξικό να εμφανιστεί με τιμή 0.

Η αντικειμενική συνάρτηση δεν βελτιώνεται στο επόμενο λεξικό

π.χ

$\zeta = 5 + 2w_1 - 3x_1 - 6w_3$

$x_3 = 2 - w_1 - 2/3x_1 - 2/3w_3 \quad \downarrow w_1 = 2$

$x_2 = 5 + w_1 \quad \uparrow$

$w_2 = 0 - 2w_1 \quad \downarrow w_1 = 0$

Εδώ η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα παραμείνει 5, αφού επέλεξα την w_2

π.χ. 2

$\zeta = 0 + 2x_1 + \boxed{3x_2}$

$w_1 = 2 - x_1 - 2x_2 \quad \downarrow x_2 = 1$

$w_2 = 1 - x_1 + x_2 \quad \uparrow$

$w_3 = 1 + x_1 - x_2 \quad \downarrow x_2 = 1$

$\zeta = 3 + \boxed{5x_1} - 3w_3$

$w_1 = 0 - 3x_1 + 2w_3 \quad \downarrow$

$w_2 = 2 \quad\quad - w_3 \quad -$

$x_2 = 1 + x_1 - w_3 \quad \uparrow$

$\Rightarrow$ $(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 1, 0, 2, 0)$ με $\zeta = 3$

Εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση: έχει βασική μεταβλητή με τιμή 0

$$\zeta = 3 - \tfrac{5}{3} w_1 + \boxed{\tfrac{1}{3} w_3}$$

$$x_1 = 0 - \tfrac{1}{3} w_1 + \tfrac{2}{3} w_3 \quad \uparrow$$

$$w_2 = 2 \qquad - w_3 \quad \downarrow w_3 = 2$$

$$x_2 = 1 - \tfrac{1}{3} w_1 - \tfrac{1}{3} w_3 \quad \downarrow w_3 = 3$$

$\Rightarrow (x_1, x_2, w_1, w_2, w_3)$ $(0, 1, 0, 2, 0)$ με $\zeta = 3$

Αφού εδώ δε διάλεξα την x_1 "ξέφυγα" από την κυκλικότητα.

Αποφυγή κυκλικότητας - Μέθοδος Διαταραχής

max $2x_1 + 4x_2$

υπό
$$-x_1 + x_2 \le 0$$
$$-3x_1 + x_2 \le 0$$
$$4x_1 - x_2 \le 0$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\zeta = 0 + 2x_1 + 4x_2$$
$$w_1 = 0 + x_1 - x_2$$
$$w_2 = 0 + 3x_1 - x_2$$
$$w_3 = 0 - 4x_1 + x_2$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ <u>ΔΕΝ</u> είναι μεταβλητές, είναι απλώς παράμετροι)

$\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2 \gg \varepsilon_3$ ...

$$\zeta = 0 \qquad + 2x_1 + \boxed{4x_2}$$
$$w_1 = 0 + \varepsilon_1 \qquad + x_1 - x_2 \quad \downarrow x_2 = \varepsilon_1$$
$$w_2 = 0 \qquad + \varepsilon_2 \qquad + 3x_1 - x_2 \quad \downarrow x_2 = \varepsilon_2$$
$$w_3 = 0 \qquad + \varepsilon_3 - 4x_1 + x_2 \quad \uparrow$$

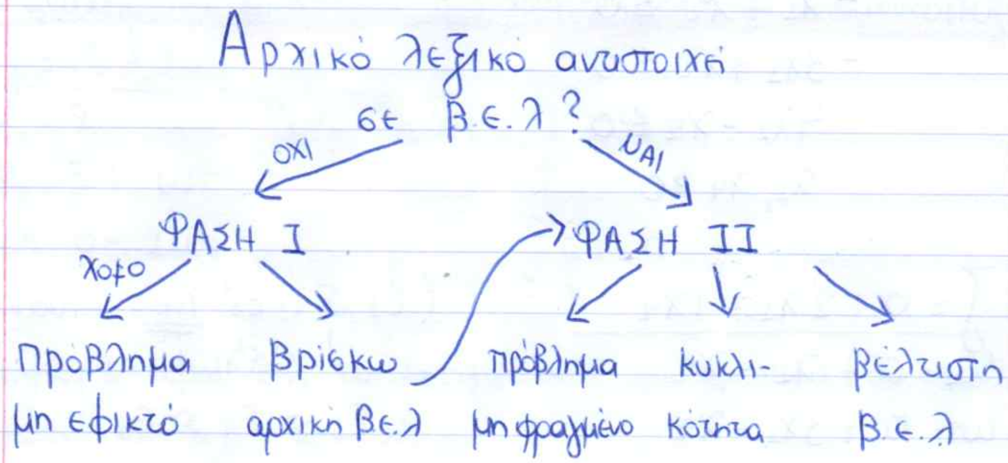
$$\zeta = 0 \qquad + 4\varepsilon_2 \qquad + 14x_1 - 4w_2 \qquad \Gamma_1' = \Gamma_1 + 4\Gamma_2$$
$$w_1 = 0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \qquad - 2x_1 + w_2 \quad \downarrow \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2} \qquad \Gamma_2' = \Gamma_2 - \Gamma_3$$
$$x_2 = 0 \qquad + \varepsilon_2 \qquad + 3x_1 - w_2 \quad \uparrow \qquad \Gamma_3'$$
$$w_3 = 0 \qquad + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - x_1 - w_2 \quad \downarrow \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \qquad \Gamma_4 = \Gamma_4 + \Gamma_3$$

(Τώρα η τιμή $\zeta = 0 + 4\varepsilon_2$)

$$\zeta = 0 \quad + 18\varepsilon_2 + 14\varepsilon_3 - 14w_3 - 18w_2$$
$$w_1 = 0 + \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 + 2w_3 + 3w_2$$
$$x_2 = 0 \quad + 4\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 - 3w_3 - 4w_2$$
$$x_1 = 0 \quad + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - w_3 - w_2$$

Το τελευταίο λεξικό είναι βέλτιστο
$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0,0,0,0,0)$ με $\zeta = 0$
(βάζω όπου $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = 0$)

Τερματισμός Simplex & Κυκλικότητα



Δυϊκή θεωρία γραμμικού προγραμματισμού

Το πρόβλημα της μίξης υλικών

Μεταβλητές απόφασης

x_j = ποσότητα προϊόντος τύπου j, $j = 1, \dots, n$

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{υπό} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n$$

μεταβλητών απόφασης $= n$

γραμμικών περιορισμών $= m$

Πρόβλημα αποτίμησης των υλικών

Μεταβλητές απόφασης

y_i = τιμή πρώτης ύλης i ανά μονάδα, $i = 1, \dots, m$

$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ ← συνολική αξία που έχει η πρώτη ύλη i

κέρδος αν φτιάξω 1 μονάδα j και την πωλήσω

$$\text{υπό } \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i}_{\text{κέρδος αν πωλήσει τις πρώτες ύλες με τις οποίες φτιάχνει 1 μονάδα } j} \geq c_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$y_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$

\# μεταβλητών απόφασης $= m$

\# γραμμικών περιορισμών $= n$

Το ένα πρόβλημα είναι δυϊκό του άλλου

π.χ

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{υπό}\ & 2x_1 + 7x_2 \leq 3 \\ & 6x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 7x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Π (πρωτεύον)
2 μεταβλητές απόφασης
3 γραμμικοί περιορισμοί

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} \min\ & 3y_1 + 5y_2 + 2y_3 \\ \text{υπό}\ & 2y_1 + 6y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ & 7y_1 + 3y_2 + 7y_3 \geq 5 \end{aligned}$$

Δ (δυϊκό)
3 μεταβλητές απόφασης
2 γραμμικοί περιορισμοί

Κάθε π.γ.π έχει και το δυϊκό του (από τη λύση του δυϊκού μπορούμε πιο εύκολα να λύσουμε το πρωτεύον

Π.χ. 2 **Πρόβλημα μίξης**

x_1 = ποσότητα ορείχαλκου

x_2 = ποσότητα μπρούντζου

$\max \ 3x_1 + 5x_2$

υπο $1x_1 + 0x_2 \leq 4$

$0x_1 + 2x_2 \leq 12$

$3x_1 + 2x_2 \leq 18$

$x_1, x_2 \geq 0$

Πρόβλημα αποτίμησης

y_1 = τιμή ανά μονάδα νευδάργυρου

y_2 = τιμή ανα μονάδα κασσίτερου

y_3 = τιμή ανά μονάδα χαλκού

$\min \ 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$

υπό $1y_1 + 0y_2 + 3y_3 \geq 3$

$0y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 5$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$