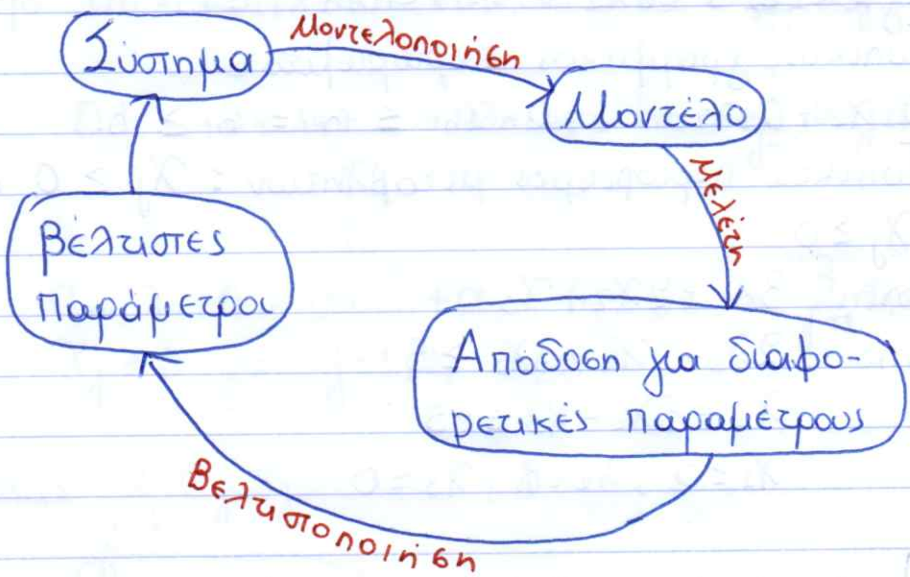
08/10/2021

Επιχειρησιακή Έρευνα

- Μαθηματικά μοντέλα μελέτης - βελτιστοποίησης διαδικασιών
- Μαθηματικές μέθοδοι βέλτιστης λήψης αποφάσεων



Γενικό πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού

- x_j, $j = 1, 2, \dots, n$: μεταβλητές απόφασης
- z : αντικειμενική συνάρτηση
- Αντικειμενική συνάρτηση: $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- Τυπικός συναρτησιακός περιορισμός:
  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \le$ ή $=$ ή $\ge b$
- Τυπικός περιορισμός μεταβλητών : $x_j \in A_j$

Π.Χ

$$\max \; 3(x_1+4)^2 + 5x_1x_2$$

υπό

$$3x_1x_2^2 \le 10$$
$$7x_1 + 3\frac{x_1}{x_2} \ge 5$$
$$x_i \ge 0$$
$$x_2 \in \{2, 4\}$$

Γενικό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

- x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$: μεταβλητές απόφασης.
- z : αντικειμενική συνάρτηση
- Γραμμική αντικειμενική συνάρτηση:
  $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$
- Τυπικός γραμμικός περιορισμός:
  $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leq$ ή $=$ ή $\geq b$.
- Τυπικός περιορισμός μεταβλητών: $x_j \geq 0$ ή ≤ 0 ή $\in \mathbb{R}$

πχ

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{υπό} \quad & 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 \geq 5 \\
& x_1 + 5x_2 - x_3 \leq -3 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

Προϋποθέσεις γραμμικού προγραμματισμού

1. Αναλογικότητα
2. Προσθετικότητα
3. Διαιρετότητα
4. Βεβαιότητα

Το πρόβλημα μίξης υλικών

- n τύποι προϊόντων προς παραγωγή
- m τύποι πρώτων υλών (υπάρχει περιορισμένο απόθεμα)
- a_{ij}: Ποσότητα από την πρώτη ύλη i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- b_i: διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης i.
- c_j: καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- Στόχος: Μεγιστοποίηση συνολικού καθαρού κέρδους από την πώληση των προϊόντων.

Μεταβλητές απόφασης:

x_j = η ποσότητα από το προϊόν τύπου j που θα παραχθεί

$j = 1, 2, \dots, n$

1ος τρόπος: $\max\ c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \xRightarrow{\text{αλλιώς}} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

υπό $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \le b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \le b_2$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \le b_m$

$x_j \ge 0$ για $j = 1, 2, \dots, n$

2ος τρόπος: $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

υπό $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$, για $i = 1, 2, \dots, m$

$x_j \ge 0$, για $j = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow A\underline{x} \le \underline{b}$ (πίνακας με διάνυσμα)

Το πρόβλημα της δίαιτας

- n τύποι φαγητών προς κατανάλωση
- m είδη θρεπτικών συστατικών
- a_{ij}: η ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που περιέχεται σε μια μερίδα φαγητού j.
- b_i: η ελάχιστη ημερήσια ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που επιβάλλεται να προσληφθεί
- d_i: η μέγιστη ημερήσια ποσότητα θρεπτικού συστατικού i που επιτρέπεται να προσληφθεί
- c_j: κόστος μιας μερίδας φαγητού j.
- Στόχος: Καθορισμός δίαιτας ελαχίστου κόστους που σέβεται τους διατροφικούς περιορισμούς

Μεταβλητές απόφασης:

x_j: ποσότητα φαγητού j που θα καταναλωθεί

$j = 1, 2, \ldots, n$

$$\min \; c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

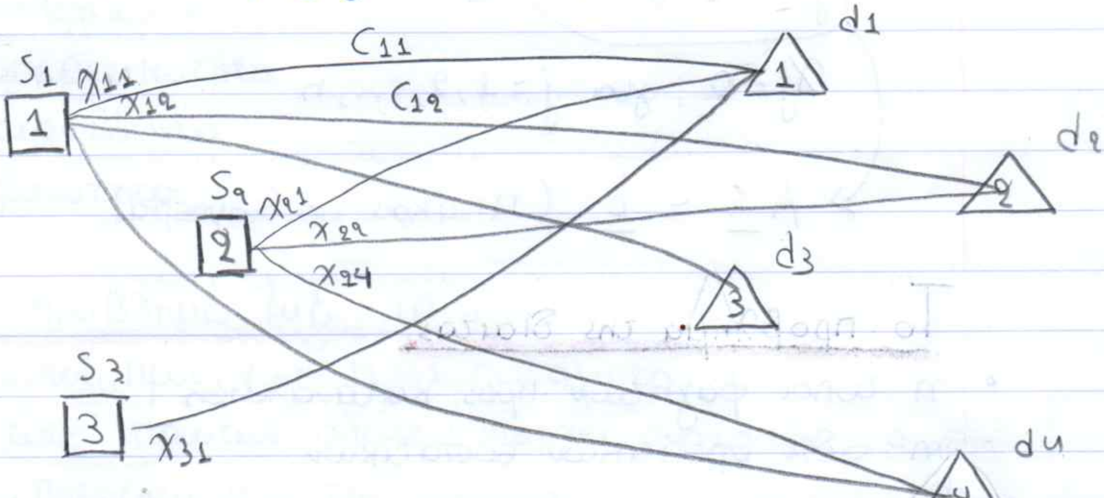
$$\text{υπό} \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq d_i$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

Το πρόβλημα της μεταφοράς

- m σημεία παραγωγής, n σημεία κατανάλωσης
- s_i: η προσφορά του σημείου i
- d_j: η ζήτηση του σημείου j
- c_{ij}: κόστος μεταφοράς μιας μονάδας προϊόντος από το i στο j
- Στόχος: ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς από τα σημεία παραγωγής στα σημεία κατανάλωσης



Μεταβλητές απόφασης:

x_{ij} = ποσότητα που θα μεταφερθεί από το σημείο παραγωγής i στο σημείο κατανάλωσης j, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$

(Υποθέτουμε εξ' αρχής ότι $\sum_{i=1}^{m} s_i \geq \sum_{j=1}^{n} d_j$, για να έχουμε εφικτές λύσεις)

$$\max \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

υπό $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j$, $j=1,\dots,n$ (το άθροισμα των ποσοτήτων που θα φτάσουν σε κάθε σταθμό κατανάλωσης θα πρέπει να καλύπτει τη ζήτηση ή να την ξεπερνάει)

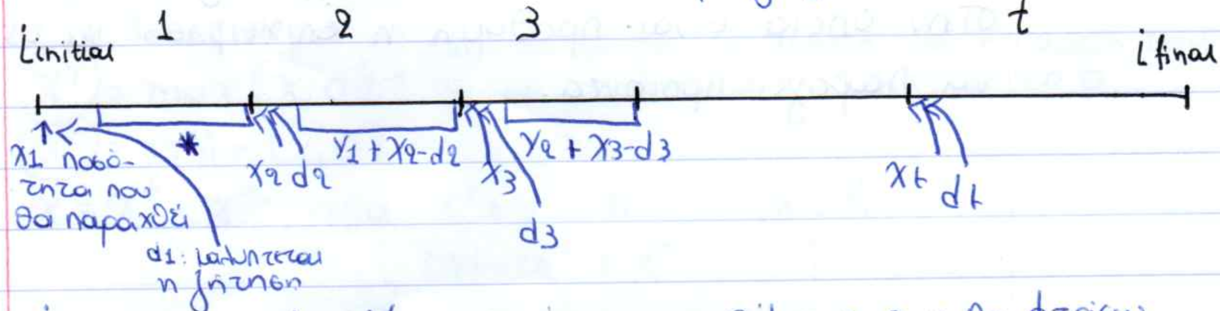
$\sum_{j=1}^{n} x_{i1} \le s_i$, $i=1,\dots,m$ (Για κάθε σταθμό παραγωγής δε γίνεται να φύγει μεγαλύτερη ποσότητα απ' αυτή που έχει διαθέσιμη)

$x_{ij} \ge 0$, $\forall i=1,\dots,m$

$\forall j=1,\dots,n$

Προγραμματισμός παραγωγής

- Εταιρεία προγραμματίζει την παραγωγή προϊόντος
- t: αριθμός περιόδων παραγωγής
- $i_{initial}$: αρχικό απόθεμα προϊόντος
- Στην αρχή κάθε περιόδου, η εταιρεία παράγει νέα προϊόντα και αμέσως μετά ικανοποιεί την τρέχουσα ζήτηση
- d_n: ζήτηση προϊόντος την περίοδο n, $n=1,2,\dots,t$
- i_{final}: τελικό απαιτητό απόθεμα προϊόντος
- C_n: κόστος παραγωγής ανά μονάδα προϊόντος την περίοδο n, $n=1,2,\dots,t$
- h_n: κόστος αποθήκευσης υπερβάλλοντος προϊόντος ανά μονάδα προϊόντος την περίοδο n, $n=1,2,\dots,t$
- Η ζήτηση κάθε περιόδου πρέπει να ικανοποιείται άμεσα. (no backlogging)
- Στόχος: Ελαχιστοποίηση κόστους παραγωγής / αποθήκευσης



* $i_{initial} + x_1 - d_1 = y_1$, η ποσότητα αποθέματος που θα φτάσω στην περίοδο 1

Μεταβλητές απόφασης:

x_n: ποσότητα παραγωγής την περίοδο n, $n=1,2,\ldots,t$

$$\min\Big(\underbrace{\sum_{n=1}^{t} c_n x_n}_{\text{κόστος παραγωγής}} + \sum_{n=1}^{t} h_n * y_n\Big), \quad y_t = i_{final}$$

Θεωρώ επιπλέον τις μεταβλητές απόφασης

y_n: απόθεμα στο τέλος της περιόδου n, $n=1,2,\ldots,t$

(Κάθε φορά το απόθεμα προσδιορίζεται από αυτό που είχα + αυτό που έφτιαξα − ζήτηση)

υπό $i_{initial} + x_1 - d_1 = y_1$, $n=1$

$y_{n-1} + x_n - d_n = y_n$, $n=2,\ldots,t-1$

$y_{t-1} + x_t - d_t = i_{final}$, $n=t$

$x_n \geq 0$, $n=1,\ldots,t$

$y_n \geq 0$, $n=1,\ldots,t-1$

Αυτός ο περιορισμός ταυτόχρονα σημαίνει ότι ικανοποιείται και η ζήτηση

Το πρόβλημα της αποτίμησης των υλικών

- n τύποι προϊόντων προς παραγωγή
- m τύποι πρώτων υλών
- a_{ij}: Ποσότητα από την πρώτη ύλη i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- b_i: διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης i
- c_j: καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου j
- Στόχος: Καθορισμός τιμών ανά μονάδα πρώτης ύλης ώστε να ελαχιστοποιείται η συνολική αξία των πρώτων υλών στην οποία είναι πρόθυμη η επιχείρηση να τις πουλήσει αντί να παράγει προϊόντα.

Μεταβλητές Αποφάσης:

y_i: τιμή ανα μονάδα για την πρώτη ύλη i, $i=1,\dots,m$

$\min\ b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m$

(πρέπει για κάθε προϊόν η επιχείρηση να προτιμά να πουλήσει τις πρώτες ύλες με τις οποίες θα έφτιαχνε μία μονάδα προϊόντος αντί να φτιάξει το ίδιο το προϊον και να το πουλήσει)

υπό $\underbrace{a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m}_{\text{το ποσό που θα κερδίσω πουλώντας τις πρώτες ύλες με τις οποίες φτιάχνω 1 μονάδα προϊόντος } j} \geq c_j,\ j=1,\dots,n$

$y_i \geq 0,\ \forall = 1,\dots,m$

Προβλήματα που ανάγονται σε Π.Γ.Π

1. Προβλήματα με απόλυτες τιμές μεταβλητών
2. Προβλήματα max-min & min-max:

- Μεγ. κατά τμήματα γραμμικών κοίλων συναρτήσεων
- Ελαχ κατά τμήματα γραμμικών κυρτών συναρτήσεων

1. Θέλουμε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης και να υπάρχει όρος $c_j|x_j|$ με $c_j > 0$ & $x_j \in \mathbb{R}$

Π.Χ

$\min\ 3|x| + 2y$

υπό $4x + 6y \geq 10$

$2x + 4y \geq 5$

$x \in \mathbb{R},\ y \geq 0$

θετικό μέρος

$x^+ = \max(x, 0) \rightarrow$ (αν είναι θετικός το μέγιστο είναι ο εαυτός του, αλλιώς αν είναι αρνητικός είναι το 0)

$x^- = -\min(x, 0)$

αρνητικό μέρος

$x = x^+ - x^-$, άρα $x^+ * x^- = 0$ $\quad \underline{x \in \mathbb{R}}$

$|x| = x^+ + x^-$

Στο παράδειγμα:

$\min\ 3x^+ + 3x^- + 2y$ (Προς το παρόν δε λέω ότι x^+ και x^- είναι το θετικό ή αρνητικό μέρος)

υπό $4x^+ - 4x^- + 6y \geq 10$

$2x^+ - 2x^- + 4y \geq 5$

$x^+, x^-, y \geq 0$

Η βέλτιστη λύση σ'αυτό το πρόβλημα θα μου δώσει τη βέλτιστη λύση και στο αρχικό

1 εφικτή λύση: $x^+ = 3,\ x^- = 1,\ y = 1$

$x = 3 - 1 = 2,\ y = 1$

$x^+ = 2,\ x^- = 0,\ y = 1 \Rightarrow$ (Αυτές που είναι βέλτιστες θα πρέπει ή το $x^+ = 0$ ή το $x^- = 0$)

$\downarrow$

Άρα η βέλτιστη λύση για το αρχικό πρόβλημα είναι $x = 2,\ y = 1$

Π.χ. 2

Αν σ'ένα πρόβλημα έχω τις παρακάτω λύσεις:

$$\left.\begin{array}{l} x^+ = 5 \\ x^- = 0 \\ y^+ = 0 \\ y^- = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τότε η βέλτιστη λύση για το αρχικό πρόβλημα θα είναι:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = -7 \end{array}}$$