Επιχειρησιακή Έρευνα
Ενότητα 4
Δυϊκή Θεωρία Γραμμικού Προγραμματισμού

Αθανασία Μάνου

Διαπανεπιστημιακό Διατμηματικό
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής (ΜΑΠ)

Το πρόβλημα της μίξης των υλικών

- n τύποι προϊόντων προς παραγωγή.
- m τύποι πρώτων υλών.
- a_{ij}: ποσότητα από την πρώτη ύλη i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- b_i: διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης i.
- c_j: καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- Στόχος είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού καθαρού κέρδους από την πώληση των προϊόντων.

Το πρόβλημα της μίξης - Μοντελοποίηση

- x_j: ποσότητα προϊόντος j που θα παραχθεί.
- Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

Το πρόβλημα της αποτίμησης των υλικών

- n τύποι προϊόντων προς παραγωγή.
- m τύποι πρώτων υλών.
- a_{ij}: ποσότητα από την πρώτη ύλη i που απαιτείται για την παραγωγή μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- b_i: διαθέσιμη ποσότητα πρώτης ύλης i.
- c_j: καθαρό κέρδος από την πώληση μιας μονάδας προϊόντος τύπου j.
- Στόχος είναι ο καθορισμός τιμών ανά μονάδα πρώτης ύλης ώστε να ελαχιστοποιείται η συνολική αξία των πρώτων υλών στην οποία είναι πρόθυμη η επιχείρηση να τις πουλήσει αντί να παραγάγει προϊόντα.

Το πρόβλημα της αποτίμησης - Μοντελοποίηση

- y_i: τιμή ανά μονάδα πρώτης ύλης i που θα πωληθεί.
- Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\
 & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m.
\end{array}
$$

Δυϊκότητα

- Για κάθε π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{υπό} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

ορίζεται το δυϊκό του π.γ.π.

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\ \text{υπό} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, 2, \ldots, n \\ & y_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, m. \end{array}$$

Παράδειγμα

- Εργοστάσιο κατεργασίας μεταλευμάτων παράγει δυο κράματα
  - Ορείχαλκο με τιμή 3 ευρώ ανά μονάδα
  - Μπρούντζο με τιμή 5 ευρώ ανά μονάδα.
- Για μια μονάδα κράματος απαιτούνται
  - 1 μονάδα ψευδαργύρου, 3 μονάδες χαλκού για ορείχαλκο
  - 2 μονάδες κασσίτερου, 2 μονάδες χαλκού για μπρούντζο.
- Το εργοστάσιο έχει
  - 4 μονάδες ψευδαργύρου,
  - 12 μονάδες κασσίτερου,
  - 18 μονάδες χαλκού.
- Βέλτιστο σχέδιο μίξης;
- Βέλτιστη αποτίμηση υλικών;

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης

- Μεταβλητές απόφασης:
  x_1: Μονάδες ορείχαλκου που θα παραχθούν,
  x_2: Μονάδες μπρούντζου που θα παραχθούν.
- Π.γ.π.:

$$\begin{array}{lcccccc}
\max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\
& & & 2x_2 & \leq & 12 \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

Παράδειγμα - Π.γ.π. αποτίμησης

- Μεταβλητές απόφασης:
  y_1: Τιμή ανά μονάδα ψευδαργύρου,
  y_2: Τιμή ανά μονάδα κασσιτέρου,
  y_3: Τιμή ανά μονάδα χαλκού.
- Π.γ.π.:

$$
\begin{array}{llcccccc}
\min & 4y_1 & + & 12y_2 & + & 18y_3 & & \\
\text{υπό} & y_1 & & & + & 3y_3 & \geq & 3 \\
 & & & 2y_2 & + & 2y_3 & \geq & 5 \\
 & & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Παράδειγμα - Π.γ.π. μίξης και αποτίμησης

- Το δυϊκό του π.γ.π.

$$\begin{array}{llcccc}
\max & 3x_1 & + & 5x_2 & & \\
\text{υπό} & x_1 & & & \leq & 4 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

είναι το

$$\begin{array}{llcccccc}
\min & 4y_1 & + & 12y_2 & + & 18y_3 & & \\
\text{υπό} & y_1 & & & + & 3y_3 & \geq & 3 \\
 & & & 2y_2 & + & 2y_3 & \geq & 5 \\
 & & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

- Το δυϊκό προέκυψε με φυσικό τρόπο από συζυγές οικονομικό πρόβλημα.