Αναλογιστικά Μαθηματικά

Μάθημα 09

Πέμπτη 2-12-2021

Survival models

Bowers et al 1997 (κεφ. 3)

X χρόνος ζωής ενός ατόμου (χρόνια έτη)

X τ.μ. X τιμές στο $[0,\infty)$

(x) άτομο που έχει τώρα ηλικία x $x \geq 0$

$X \sim F(x) = P(X \leq x)$ σ.κ. $F(x) = 0$ $x < 0$

$= P($ το άτομο να ζήσει το πολύ x έτη$)$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$S(x)$ συνάρτηση επιβίωσης survival function

$S(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$

$S(0) = 1$. $\left(\lim_{x \to \infty} S(x) = 1 \right.$ $S(t)$ μη αύξ. συναρτ. του t $\left. \right)$

$T(x) = T_x = X - x \mid X \geq x$

υπόλοιπη ζωή ή μελλοντική ζωή ατόμου ηλικίας x.

(x)

$G(t) = P(T(x) \leq t) \quad t \geq 0$ σκ

$= P(X - x \leq t \mid X \geq x)$

$= P(X \leq x + t \mid X \geq x)$

$g(t)dt = P(t < T(x) < t + dt)$

$(x+t, x+t+dt)$

$${}_tq_x = G(t) = P(T(x) \le t)$$
$= P($ο (x) να ζήσει υπόλοιπη ζωή το πολύ t έτη$)$

$${}_tp_x = 1 - G(t) = P(T(x) > t)$$
$= P($ο (x) να ζήσει υπόλοιπη ζωή περισσότερο από t έτη$)$

$$\boxed{{}_tp_x = 1 - {}_tq_x}$$

$${}_tp_x = P(X > x+t \mid X > x) = \frac{P(X > x+t,\ X > x)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x+t)}{P(X > x)} = \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$$\boxed{{}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}}$$

$${}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$${}_{t+s}p_x = \frac{s(x+t+s)}{s(x)} = \underbrace{\frac{s(x+t)}{s(x)}} \cdot \frac{s(x+t+s)}{s(x+t)}$$

$$\boxed{{}_{t+s}p_x = {}_tp_x \cdot {}_sp_{x+t}}$$

$$E(T(x)) = \int_0^{\infty} [1 - G(t)]\, dt.$$

$P_{\sigma k}$.

$$\underline{\underline{\mathring{e}_x}} = E(T(x)) = \underbrace{\int_0^{\infty} {}_tp_x \, dt.}$$

Ενταση θνησιμότητας

$$\mu(x) = \mu_x = \lim_{dt \to 0^+} \frac{P(X \leq x+dt \mid X > x)}{dt}$$

$$= \lim_{dt \to 0^+} \frac{P(x < X \leq x+dt)}{dt} \cdot \frac{1}{P(X > x)}$$

$$= \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{F'(x)}{1-F(x)}$$

$$\mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)}$$ αποδειξη

$$g(t) = \mu(x+t)\, {}_tp_x$$

$${}_tq_x = G(t) = \int_0^t {}_sp_x\, \mu(x+s)\, ds$$

$$\mathring{e}_x = \int_0^\infty t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt$$

Πρόταση

Η συνάρτηση μ_x χαρακτηρίζει τη κατανομή του χρόνου ζωής

<u>απόδειξη</u>

$$\mu(u) = -\frac{s'(u)}{s(u)} \quad \text{ή} \quad \int_x^{x+t} \mu(u)\,du = \int_x^{x+t} -\frac{s'(u)}{s(u)}\,du$$

$$\int_x^{x+t} \mu(u)\,du = -\ln s(u)\Big|_x^{x+t} = \ln(s(x)) - \ln(s(x+t))$$

$$= -\ln \frac{s(x+t)}{s(x)} = -\ln {}_tP_x$$

$$\boxed{{}_tP_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu(u)\,du}}$$

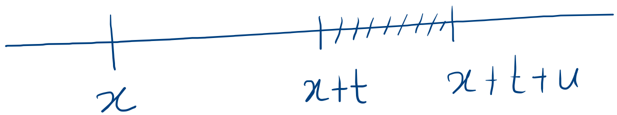
$$s(x+t) = s(x)\, e^{-\int_x^{x+t} \mu(u)\,du}$$

$$s(t) = e^{-\int_0^t \mu(u)\,du}$$

$$F(t)$$

Εφαρμογή $X \sim \exp(\lambda)$ $\quad F \quad s \quad {}_tP_x \quad {}_tq_x \quad \mu$

$${}_{t|u}q_x = P(t < T(x) \le t+u)$$



$${}_{t|u}q_x = P(T(x) \le t+u) - P(T(x) \le t)$$

$$= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x$$

$$= 1 - {}_{t+u}p_x - (1 - {}_tp_x)$$

$$= {}_tp_x - {}_{t+u}p_x$$

$${}_{t|u}q_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} - \frac{S(x+t+u)}{S(x)} = \frac{S(x+t)}{S(x)}\left[1 - \frac{S(x+t+u)}{S(x+t)}\right]$$

$${}_{t|u}q_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t}$$

Εφαρμογή

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{t}{120}\right)^{1/6} & 0 \le t \le 120 \\ 1 & t \ge 120 \end{cases}$$

α). Πιθανότητα : ένα νεογέννητο να επιβιώσει πάνω από 30 έτη

β) " άτομο ηλικίας 30 να πεθάνει πριν τα 50 έτη

γ) " " " 40 να επιβιώσει πέραν των 65 χρον.

δ) Ένταση θνησιμότητας $\mu(x)$

ε) ${}_tP_x$ $\mathring{e}_x$, $Var(T(x))$.

α) $P(X>30) = S(30) = 1-F(30) =$

$S(x) = \left(1-\frac{x}{120}\right)^{1/6}$ $\quad = 1-\left[1-\left(1-\frac{30}{120}\right)\right]^{1/6} = \left(1-\frac{30}{120}\right)^{1/6}$

β) $$\underset{t}{20}\,q_{\underset{x}{30}} = 1-\frac{S(x+t)}{S(x)} = 1-\frac{S(50)}{S(30)} = 1-\frac{\left(1-\frac{50}{120}\right)^{1/6}}{\left(1-\frac{30}{120}\right)^{1/6}} \simeq 0{,}04$$

$\left(1-\frac{50}{120}\right)^{1/6} \simeq 0{,}95$

γ) $${}_{25}p_{40} = \frac{S(65)}{S(40)} = \frac{\left(1-\frac{65}{120}\right)^{1/6}}{\left(1-\frac{40}{120}\right)^{1/6}} = \frac{55^{1/6}}{80^{1/6}} = \left(\frac{55}{80}\right)^{1/6} \simeq 0{,}94$$

δ) $$\mu(x) = \frac{-S'(x)}{S(x)} \qquad S'(x) = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{120}\right)\left(1-\frac{x}{120}\right)^{-5/6}$$

$$\mu(x) = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{120}\left(1-\frac{x}{120}\right)^{-5/6}}{\left(1-\frac{x}{120}\right)^{1/6}} = \frac{1}{720}\left(1-\frac{x}{120}\right)^{-1} = \frac{1}{720-6x}$$

$0 \le x \le 120$

ε) $${}_tp_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \cdots = \left(1-\frac{t}{120-x}\right)^{1/6} \qquad x+t \le 120$$

$$0 \qquad x+t>120$$

$$\mathring{e}_x = \int_0^{120-x} {}_tp_x\,dt = \int_0^{120-x} \Big(\underbrace{1-\frac{t}{120-x}}_{y}\Big)^{1/6} dt = (120-x)\int_0^1 y^{1/6}\,dy = \frac{6}{7}(120-x)$$

$$E(T_x^2) = 2\int_0^{120-x} t \cdot {}_tp_x\,dt$$

$$K(x) = [T(x)]$$ διακριτή τ.μ.

χρονια που θα εχει συμπληρωσει το άτομο πριν το θανατό του

$$P[K(x)=k] = P[k \le T(x) < k+1] \qquad (P(T(x)=k)=0)$$

$$= P[k < T(x) \le k+1]$$

$$F_{K(x)}(y) = \sum_{s=0}^{y} P(K(x)=s)$$

$$P[K(x)=k] = {}_{k}p_x - {}_{k+1}p_x$$

(αποδ)

$$= {}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \qquad {}_{1}q_{x+k}$$

$$= {}_{k|}q_x \qquad {}_{k|1}q_x$$

$$E[K(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} P(\underbrace{K(x) \ge n}) \quad \text{γιατί}$$

$$\|$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P[K(x)=k] = \sum_{k=0}^{\infty} k \; {}_{k|}q_x = \sum_{k=0}^{\infty} k\,({}_{k}p_x - {}_{k+1}p_x)$$

$$= 0\;{}_{0}p_x - 0\;{}_{1}p_x + 1\;{}_{1}p_x - 1\;{}_{2}p_x + 2\;{}_{2}p_x - 2\;{}_{3}p_x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} {}_{n}p_x = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P(T(x) \ge n)}$$

l_0 "μεγάλο πληθυσμό"

Αναμενόμενο αριθμό ατόμων που θα ξεπεράσει την ηλικία x.

i ατομο X_i

F, S

$$N(x) = \sum_{i=1}^{l_0} I_{\{X_i > x\}}$$

$$I = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad P = P(X > x)$$

$$E[N(x)] = \sum_{i=1}^{l_0} E(I_{\{X_i > x\}}) = \sum_{i=1}^{l_0} \underbrace{P(X > t)}_{S(t)} = \underbrace{l_0 \cdot S(t)}_{l_x}$$

$$\boxed{l_x = l_0 \, S(t)}$$

${}_tp_x \qquad {}_tq_x \qquad s(t) \qquad e_0$

$$l_x = l_0\, s(x)$$

$$s(x) = \frac{l_x}{l_0}$$

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{\frac{l_{x+t}}{\cancel{l_0}}}{\frac{l_x}{\cancel{l_0}}} = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$\leftarrow \boxed{{}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}}$$

$${}_1p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$${}_1q_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

$$\leftarrow {}_tq_x = 1 - {}_tp_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$
$$= l_0 \left(S(x) - S(x+1) \right)$$
$$= l_0 P\left(x \le X \le x+1 \right)$$

Ασκηση

$$l_x = l_0 e^{-\int_0^x \mu(u)\,du}$$

$$\mu_x = \frac{-l_x'}{l_x}\ ?$$

$$l_x = \int_x^\infty l_t \mu_t \,dt = \int_0^\infty l_{x+t} \mu_{x+t} \,dt$$

$$d_x \quad \int_0^1 l_{x+t} \mu_{x+t} \,dt$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \qquad {}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$$

$$\begin{cases} l_x = l_0 S(x) \\ S(x) = \dfrac{l_x}{l_0} \end{cases}$$

$$m|n\, q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x}$$

$$m|\, q_x = \frac{d_{x+m}}{l_x}$$

...

$$\mathring{e}_x = E\left[T(x)\right] \qquad e_x = E\left[K(x)\right]$$

$$\mathring{e}_x \simeq e_x + \frac{1}{2}$$

$$e_x = \sum {}_n p_x = \frac{1}{l_x} \sum_{k=1}^{\infty} l_{x+k}$$

Άσκηση (Πίνακας → Bowers)

- ${}_{1}P_{40} = ;$
- πιθανότητα ατομο ηλικίας 50 να ξεπεράσει τα 70
- πιθανότητα " " 80 να πεθάνει εντός του επόμενου έτους
- " " " 55 να πεθάνει τα επόμενα 5 χρόνια
- " " " 40 να πεθάνει ανάμεσα στα 70, 80

Κλασματικές ηλικίες

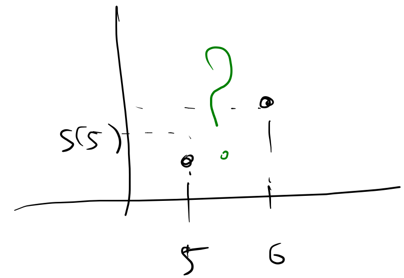
$\ell(x) \to s(x)$ από πίνακες μόνο για ακέραιους x.

? x μη ακέραιος $\qquad x = 6.4.3$

Παρεμβολή

$s(n+t)$ $\qquad s(n) \qquad s(n+1)$

$t \in (0,1)$



α) Γραμμική παρεμβολή

$$s(n+t) \simeq (1-t)\,s(n) + t\,s(n+1)$$

$$\ell(n+t) \simeq (1-t)\,\ell(n) + t\,\ell(n+1)$$

β) Εκθετική παρεμβολή

$$\log s(n+t) = (1-t)\log s(n) + t \log s(n+1)$$

γ) Αρμονική παρεμβολή

$$\frac{1}{s(n+t)} = \frac{1-t}{s(n)} + \frac{t}{s(n+1)}$$

Γραμμική παρεμβολή

Uniform distribution of deaths

UDD

$$_u d_{x+t} = l_{x+t} - l_{x+t+u}$$

$(x+t,\ x+t+u)$ $\simeq [(1-t)\,l_x + t\,l_{x+1}] - [(1-t-u)\,l_x + (t+u)\,l_{x+1}]$

$0 \le t \le 1$

u μικρό

$$= u\,l_x - u\,l_{x+1} = u \cdot d_x$$

$$_t q_x = 1 - {}_t p_x = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

$x = k \in \mathbb{N}$

$$_t q_k = 1 - \frac{S(k+t)}{S(k)} = 1 - \frac{(1-t)S(k) + t\,S(k+1)}{S(k)}$$

$$= t\left(1 - \frac{S(k+1)}{S(k)}\right)$$

$$\boxed{_t q_k = t \cdot q_k}$$

$$_{0,5} q_{50} = 0,5 \cdot q_{50}$$

$$\mathring{e}_x = E[T(x)]$$

$$E(T(x)) = E(K(x)) + E(R(x))$$

$$\mathring{e}_x = e_x + \frac{1}{2}$$

$$F_{R(x)|K(x)=k}(r) = r \quad 0<r<1$$

ομοιομορφη

Β) Εκθετική παρεμβολή

$$\log s(k+t) = (1-t)\log s(k) + t\log s(k+1)$$

$$e \qquad\qquad e$$

$$s(k+t) = s(k)^{(1-t)} \cdot s(k+1)^{t}$$

$$s(k+t) = \left(\frac{s(k+1)}{\underbrace{s(k)}}\right)^{t} \cdot s(k)$$

Επιλέγω μ: $\boxed{\frac{s(k+1)}{\underbrace{s(k)}} = e^{-\mu}}$ $\qquad$ $\boxed{s(k+t) = e^{-\mu t} \cdot s(k)}$

$$\mu(k+t) = \frac{-S'(k+t)}{S(k+t)}$$

$$= -\frac{(-\mu)\, S(k)\, e^{-\mu t}}{e^{-\mu t} \cdot S(k)} = \mu$$

$\left(S(k+t) = e^{-\mu t} \cdot S(k) \right)$

Ένταση θνησιμότητας στον αριθμό $k+t$, $t \in (0,1)$

Άσκηση

$\ell_{52}, \ell_{53}, \dots \ell_{60}$ (από πίνακες)

Να υπολογιστεί $_{0.2}q_{52.4}$

- UDD → γραμμική παρεμβολή (α)
- σταθερή ένταση θνησιμότητας → εκθ. παρεμβολή (b)

$$_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}$$

$t = 0,6$, $t' = 0,4$

$$_{0,2}q_{52,4} = 1 - \frac{s(52,6)}{s(52,4)} = 1 - \frac{\ell_{52,6}}{\ell_{52,4}} =$$

(α)

$$= 1 - \frac{(1-t)\ell_{52} + t\,\ell_{53}}{(1-t')\ell_{52} + t'\ell_{53}} = 1 - \frac{0,4\,\ell_{52} + 0,6\,\ell_{53}}{0,6\,\ell_{52} + 0,4\,\ell_{53}}$$

(b)

$$_{0,2}q_{52,4} = 1 - {}_{0,2}p_{52,4} \overset{?}{=} 1 - (p_{52})^{0,2}$$

λάθι →

$_{5,7}p_{52,4}$ < UDD
constant force of mortality

$_{3,2|2,5}q_{52,4}$ <

$${}_{5,7}P_{52,4} = \frac{l_{58,1}}{l_{52,4}} = \frac{0,9\, l_{58} + 0,1\, l_{59}}{0,6\, l_{52} + 0,4\, l_{53}}$$

$${}_{5,7}P_{52,4} = {}_{0,6}P_{52,4} \cdot {}_{5}P_{53} \cdot {}_{0,1}P_{58}$$

$$= \left(P_{52} \right)^{0,6} \cdot {}_{5}P_{53} \cdot \left(P_{58} \right)^{0,1}$$

52,4
5,7

58,1

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)} = 1 - \frac{S(x)\,e^{-\mu t}}{S(x)} = $$

μ : $\quad // \quad \frac{S(x+1)}{S(x)} = e^{-\mu}$

${}_1p_x$

p_x

$$ = 1 - e^{-\mu \cdot t} = 1 - (p_x)^t $$

$$ {}_tp_x = (p_x)^t $$