Επανάληψη:

$$\boxed{S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i}$$ σύνθετη σδ Poisson.

$N(t)$ σ. ανέλιξη Poisson(λ)

$\underline{u(t)} = u + ct - S(t) \quad t \geq 0$

στοχαστική ανέλιξη πλεονάσματος.

$$\boxed{c = (1+\theta)\lambda \cdot \mu}, \quad \mu = E(X)$$

θ: περιθώριο ασφαλείας

$T := \inf\{t \geq 0 : u(t) < 0\}$

$T_1 \quad T_2 \quad T_3$

$u(T)$ έλλειμα πτώσης

{ κανονικά επειδή πέφτω είναι αρνητικό

R συντελεστής προσαρμογής τη θετική λύση

$$\boxed{M_X(r) = 1 + \frac{c}{\lambda} \cdot r = 1 + (1+\theta)\mu \cdot r}$$

Και βρίσκω πολλές θετικές κρατάω τη μικρότερη.

(αυτοί είναι σταθερά)

άσκηση 4.3.1 καλώς

μια χρονική μονάδα

α) $E(e^{RS}) = E(e^{Rc}) = e^{Rc}$ όπου $S = S(1)$

• Αφού $S(t)$ σύνθετη σδ. Poisson:

$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$M_{S(t)}(t) = P_N(M_X(t))$

$$M_{S(t)}(v) = e^{\lambda t(\boxed{M_X(v)} - 1)}$$

$$M_{S(t)}(R) = e^{\lambda t\left(\boxed{\cancel{1} + \frac{c}{\lambda}R} - \cancel{1}\right)}$$

$$= e^{ctR}$$

$$-M_{S(1)}(R) = E(e^{RS}) = e^{Rc} \xRightarrow[\text{ως προς } c]{\text{λύνω}} \boxed{c = \frac{1}{R}\ln M_{S(1)}}$$

β) $M_{U(t)}(R) = e^{u \cdot R}$ $\forall t$ το R φέρνει μια ισορροπία σε σχέση με το αρχικό απόθεμα.

$$M_{U(t)}(R) = \boxed{E\left(e^{U(t)R}\right) = e^{uR}}$$

$$\| $$

$$E\left(e^{[u + ct - S(t)] \cdot R}\right) = e^{uR} e^{ctR} M_{S(t)}(-R)$$

$$= e^{uR} e^{ctR} - e^{ctR} = e^{uR}$$

$M\ldots =$

↓ συντελεστής
προσαρμογής

$$M_X(R) = 1 + (1+\theta)\mu R$$

$$\overset{\text{ανάπτυγμα Taylor}}{E(e^{XR}) > E\left(1 + RX + \frac{(Rx)^2}{2}\right)}$$

$$1 + (1+\theta)\mu R > 1 + R\cdot\mu + R^2\frac{\mu_2}{2}$$

$$\theta\cdot\mu\cdot R > R^2\frac{\mu_2}{2}$$

$$\boxed{R < \frac{2\theta\mu}{\mu_2}}$$

$\mu_k = E(X^k)$

$\mu_1 = \mu$

$\mu_2 = E(X^2)$

Εφαρμογή:

κλασικό μοντέλο

$N(t)$ ~ Poisson(λ) ανεξ + ισόνομ.

$$U(t) = u + c\cdot t - S(t)$$

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

$X_i \sim F$

$E(X^k) = \mu_k$

Εαν $X \sim Exp(\beta)$ να υπολογιστεί ο συντελεστής προσαρμογής R.

R θετική λύση της $M_X(r) = 1 + (1+\theta)\mu\cdot r$

όπου $M_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r}$, $r < \beta$.

$f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$

$\mu = E(X) = \dfrac{1}{\beta}$

Άρα έχω $\dfrac{\beta}{\beta - r} = \cancel{1} + (1+\theta) \cdot \dfrac{r}{\beta}$

λύνω ως προς r:

$0 < \boxed{r = \dfrac{\beta \cdot \theta}{1+\theta}} < \beta$

H/W $X \sim Gamma(2, \beta)$

Θεώρημα:

$\forall u > 0$ $\boxed{\psi(u) = \dfrac{e^{-Ru}}{E\left(e^{-RU(T)} \mid T < \infty\right)}}$

πιθανότητα χρεοκοπίας

$\boxed{\psi(u) < e^{-Ru}}$ εκθετικό φράγμα Lundberg

Συνέχεια εφαρμογής:

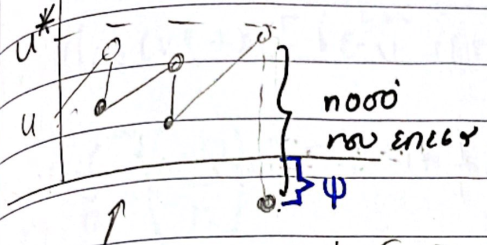
$\psi(u) = ?$

Χρειάζομαι την κατανομή της $-U(T) \mid T < \infty$

$P(-U(T) > y \mid T < \infty)$

με ενδιαφέρει η τιμή που είχα πριν την πτώση.

ακριβώς πριν την πτώση
είχα αποθ/α u^*
$\max(X_1, X_2)$



αναγεννητική διαδικασία

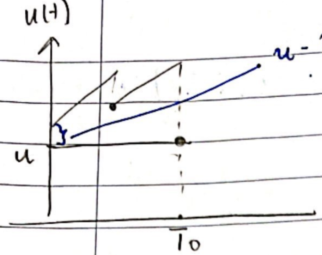
$= P(X > u^* + y \mid X > u^*)$
$= P(X > y)$ αμνήμονη ιδιότητα
$= e^{-\beta y} \sim Exp$

$$E(e^{-RU(T)} \mid T < \infty) = \frac{\beta}{\beta - R}$$

θυμήσουμε

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{\frac{\beta}{\beta - R}} \qquad \underline{R = \frac{\beta \cdot \theta}{1+\theta}} \qquad \frac{1}{1+\theta} \cdot e^{-Ru}.$$

$$\boxed{\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}}$$



$U(t) = u + ct - S(t)$

$T_0 = \min\{t \geq 0 : U(t) < u\}$

$= \min\{t \geq 0 : ct - S(t) < 0\}$

$u - U(T_0)$

$L_1 = u - U(T_0) \,/\, T_0 < \infty$

Εαν $u = 0$

Θεωρητικά

η πιθ το πλεονασμα να πεσει κατω απο το αρχικό u.

▶ $P(U(T_0) \in (u-y-dy, u-y \mid T < \infty) =$

$\frac{\lambda}{c} [1 - F_X(y)] dy$, $c = (1+\theta)\lambda\mu$

$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{(1+\theta)\mu}$

▶ ~~$U(T) \in (-y-dy, -y, T < \infty)$~~

$$\boxed{f_{L_1}(y) = \frac{1 - F_X(y)}{\mu}}$$

• $P(T_0 < \infty) = \int_0^\infty \frac{\lambda}{c} (1 - F_X(y)) dy$

$= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty (1 - F_X(y)) dy$ $E(X)$

$= \frac{\lambda}{c} \cdot \mu = \frac{1}{1+\theta}$

$$\bullet\ M_{L_1}(r) = E(e^{L_1 r}) = \int_0^\infty e^{ry}\,\frac{1-F_X(y)}{\mu}\,dy$$

$$= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \left(\frac{e^{ry}}{r}\right)'\,[1-F_X(y)]\,dy$$

$$= \frac{1}{\mu}\left[\frac{e^{ry}}{r}\,[1-F_X(y)]\Big|_0^\infty + \frac{1}{r}\int_0^\infty e^{ry} f_X(y)\,dy\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu}\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r}M_X(r)\right)$$

$$M_{L_1}(r) = \frac{M_X(r)-1}{r\mu}$$

οι ρσπογ βοηθουν
να βρισκω μεσες
τιμες και απο
$M_X(r)$ βρισκω R

$$\bullet\ E(L_1^k) = \frac{\mu_{k+1}}{(k+1)\mu}$$

$$\bullet\ E(L_1) = \frac{\mu_2}{2\mu}$$

$$\psi(0) = \frac{e^{-R\cdot 0}}{E[e^{-R(-L_1)}]}$$ γιατί $\psi(u) = \dfrac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)} \mid T<\infty)}$

$$= \frac{e^{-R\cdot 0}}{E(e^{RL_1})} = \frac{1}{M_{L_1}(R)}$$

$\Rightarrow$

όπου $M_{L_1}(R) = \dfrac{M_X(R) - 1}{R\mu}$

$= \dfrac{1 + (1+\theta)\mu R - 1}{R\mu} = 1 + \theta$

Άρα $\boxed{\psi(0) = \dfrac{1}{1+\theta}}$

Άσκηση
Ψ?ασικό μοντέλο
$P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{2}$

$f_{L_1}(x)$;

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1/2 & 1 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

$$1 - F_X(x) = \begin{cases} 1, & x<1 \\ 1/2, & 1 \le x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

$f_{L_1}(x) = \dfrac{1 - F_X(x)}{\mu}$, $\mu = 1 \cdot \frac{1}{2} + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{3}{2}$

σπη d_1 $f_{L_1}(x) = \begin{cases} 2/3 & 0 < x < 1 \\ 1/3 & 1 \le x < 2 \end{cases}$

↓ μέγιστη συσσωρευτική απώλεια

$$L = \max_{t \geq 0} \{ u - U(t) \} = \max_{t \geq 0} \{ S(t) - ct \}$$

$S(t) - ct = 0 \qquad L \geq 0.$

- $1 - \psi(u) = P(U(t) \geq 0 \ \forall t)$

$$= P(u + \underbrace{c \cdot t}_{\text{έσοδα}} - \underbrace{S(t)}_{\text{έξοδα}} \geq 0 \ \forall t)$$

$$= P(S(t) - ct \leq u \quad \forall t)$$

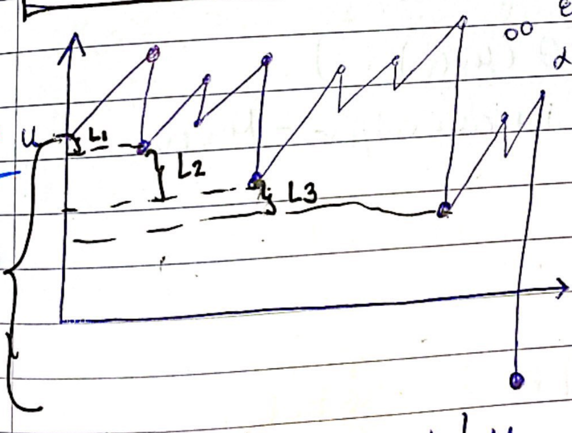
$$= P(L \leq u) \quad \text{σκs}$$

Αφού θέλω $\forall t$, θέλω και για το max

- $1 - \psi(0) = P(L \leq 0)$ διακριτή

$\boxed{L \text{ μικτή κατανομή}}$

μέγιστο ποσό που θα χάσει



∞ είναι ανανεωτική διαδικασία κάθε φορά είναι σαν να έχω άλλο u

L_i ισόνομες

$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_M \quad (M = 4)$

$M \sim Geom.$

$P(N = n) = \psi^n(0)(1 - \psi(0))$

$M_L(r) = P_M\left(M_{L_1}(r)\right)$, $L = \sum_{i=1}^{M} L_i$

$L_i \sim L_1$

$$\boxed{M_L(r)} = \frac{\theta}{1+\theta - M_{L_1}(r)}$$

$$= \frac{\theta}{1+\theta - \dfrac{M_X(r)-1}{r\mu}}$$

$$\boxed{= \frac{\theta\mu r}{1+(1+\theta)\mu r - M_X(r)}}$$

$$= \underbrace{\frac{\theta}{1+\theta}}_{P(L=0)} + \frac{1}{\theta}\underbrace{\frac{\theta\left(M_X(r)-1\right)}{1+(1+\theta)\mu r - M_X(r)}}$$

διακριτό μέρος

συνεχές μέρος

$M_L(r) = E(e^{rt}) = e^0 P(L=0) + \int_0^\infty e^{ry} f_L(y)\,dy$

Εφαρμογή: $X=2$ πιθ 1 $\quad M_X(r) = E(e^{rX})$

ηγετούσα ... πολλαπλ. χάνω

$$M_L(r) = \frac{\theta \cdot 2 \cdot r}{1+(1+\theta)\cdot 2 \cdot r - e^{2r}}$$

αθροισμα $L \sim Geom$

$$E(L) = E(M)\, E(L_1)$$
$$= \frac{1}{\theta} \frac{\mu_2}{2\mu}$$

ισουτε την εφαρμογή για $X = 2$ και 1

$$V(L) = E(M)\, Var(L_1) + Var(M)\, E^2(L_1)$$

$X \sim$ mixtures of exponentials

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i B_i e^{-B_i x} \qquad x>0 \quad B_i>0 \quad A_i>0$$

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = 1$$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{1}{B_i}$$

$$M_X(r) = \sum A_i \frac{B_i}{B_i - r} \qquad r < j = \min\{B_i, \dots, B_n\}$$

$$\int_0^\infty e^{ur}(-\psi'(u))\, du = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{r_i}{r_i - r}$$

$$\psi(u) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-r_i u} \qquad \psi(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i$$

Άσκηση

$=3$, $c=1$ $f_X(x) = \frac{1}{3} e^{-3x} + \frac{16}{3} e^{-6x}$, $x>0$

$\mu = ;$ $\theta = ;$

$M_X(r) = ;$ $R = ;$

$M_L(r) = ;$

$\psi(u) = ;$

μίξη εκθετικών

Λύση

$f_X(x) = \frac{1}{9}(3e^{-3x}) + \frac{16}{18}(6e^{-6x})$

- $\mu = E(X) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} + \frac{16}{18} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{27}$.

- $c = (1+\theta)\lambda\mu \Rightarrow 1+\theta = \frac{1}{3 \cdot \frac{5}{27}} = \frac{9}{5} \Rightarrow \theta =$

- $M_X(r)$ $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{3-r} + \frac{16}{18} \frac{6}{6-r}$, $r<3$

- $M_L(r) = \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{\theta+1} \frac{\theta\,[M_X(r) - 1]}{1+(1+\theta)\mu r - M_X(r)} =$

$$\frac{1}{9}\frac{4}{4-r} + \frac{4}{9}\frac{2}{2-r}$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \frac{r(10-3r)}{r(r-2)(r-4)}$$

$$\Sigma c_i e^{-r_i u}$$

$$\psi(u) = \frac{1}{9} e^{-4u} + \frac{4}{9} e^{-2u} \quad \circ\circ$$

$M_X(r) = 1 + (1+\theta)\mu \cdot r \Rightarrow$ βρίσκω r_1, r_2

διαλέγω το max για R.

Άσκηση

$$f_X(x) = e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{-\frac{2x}{3}}, \quad x>0$$

$$M_X(r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2-r} + \frac{1}{2} \frac{2/3}{2/3-r}$$

$$= 1 + (1+\theta)\mu r$$

για $\theta = 0,1$

$r = 0$

$r = 1,68$

$r = 0,07$

$\Downarrow$

$R = 0,07$

— — —

$$\psi(u) = c_1 e^{-r_1 u} + c_2 e^{-r_2 u}$$

$$\psi(0) = c_1 + c_2$$

$$\frac{\psi_2}{2\theta\mu} = c(L) = \frac{c_1}{r_1} + \frac{c_2}{r_2}$$

$X \sim \Gamma(2, 3/5)$

agumon $\lambda = 1$, $c = 10$

$f_X(x) = \frac{9}{25} x e^{-3x/5}$, $x > 0$

$\mu = E(X) = 2/3/5$

$\psi = ;$ $\theta = ;$ $M_X(r) = ;$

$M_L(r) =$

$\frac{1}{1+\theta} \frac{\theta (M_X(r) - 1)}{1(1+\theta)\mu r - M_X(r)} =$

$-\frac{1}{15} \frac{0.8}{0.8 - r} + \frac{2}{5} \frac{0.3}{0.3 r}$

$\psi(u) = -\frac{1}{15} e^{-0.8} + \frac{2}{5} e^{-0.3u}$