2.26. ασυ Σημειώσεις Χελιώτη

16 Δεκεμβρίου

Άσκηση: Ασφάλεια ζωής μου (45)

2.000 στα 47 του
1.000 στα 50 του
500 στα 55 του

Ποια η αναλογιστική παρούσα αξία της; Δίνονται οι πιθανότητες

${}_2q_{45}$, ${}_5q_{45}$, ${}_{10}q_{45}$ και ετήσιο επιτόκιο 3%

Λύση

παρούσα αξία είναι

$$Z = 2000\, 1_{T_{45} > 2} v^2 + 1000\, 1_{T_{45} > 5}\, v^5 + 500\, 1_{T_{45} > 10}\, v^{10}$$

$$EZ = v^2 2000 \cdot P(T_{45} > 2) + 1000\, P(T_{45} > 5)\, v^5 + 500\, P(T_{45} > 10)\, v^{10}$$

$E(1_A) = P(A)$

$$= 2000\, v^2\, {}_2q_{45} + 1000\, v^5\, {}_5q_{45} + 500\, v^{10}\, {}_{10}q_{45}$$

όπου $v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1{,}03}$

ΡΑΝΤΕΣ

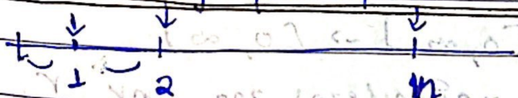
<u>Ράντα</u> λέγεται μια σειρά πληρωμών που γίνονται σε ισαπέχουσες χρ στιγμές

Κάθε πληρωμή λέγεται όρος της ράντας

- Μια ράντα λέγεται <u>μοναδιαία</u> αν κάθε όρος ισούται με 1
- » » <u>προκαταβλητέα</u> αν πληρώνεται στην αρχή της περιόδου
- » <u>Ληξιπρόθεσμη</u> »
  τέλος »
- <u>Διηνεκής</u> αν έχει άπειρους όρους

<u>Βέβαιες ράντες</u> → δεν εξαρτώνται από τη ζωή κάποιου ατόμου

<u>Μοναδιαία ληξιπρόθεσμη n περιόδων</u>



v: συντελ. προεξόφλ.

Παρούσα αξία $= a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \dots + v^n$

$$= v\,\frac{v^n-1}{v-1} = \frac{v}{1-v}(1-v^n)$$

$$= \frac{1}{i}(1-v^n)$$

$v = \frac{1}{1+i}$

$1-v = \frac{i}{i+1}$

$d = 1-v$

Μοναδιαία προκαταβλητέα n περιόδων

$0 \quad 1 \quad \dots \quad n$

παρούσα αξία $= 1 + v + \dots + v^{n-1} = 1 \cdot \dfrac{v^n - 1}{v - 1}$

$\underset{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\parallel}$

$= \dfrac{1}{d}(1 - v^n)$

Για $n = \infty$ $\quad a_{\overline{\infty}|} = \dfrac{1}{i} \quad \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \dfrac{1}{d}$

Μέχρι τώρα είδαμε διακριτές ράντες

Συνεχείς ράντες

Έχουμε συνάρτηση $r : [0, \infty) \to [0, \infty)$.
Μια συνεχής ράντα που καθορίζεται από την r πληρώνει $r(t)\,dt$ στο διάστημα $[t, t + dt]$

$$\left(\int_a^b r(t)\, v^t \, dt \right)$$

Μια ράντα που πληρώνει με ρυθμό $r(t) = 1$ στο διάστημα $[0, y]$ έχει παρούσα αξία

$$\bar{a}_{\overline{y}|} = \int_0^y v^t r(t)\, dt = \int_0^y e^{-\delta t}\, dt$$

$(u = e^{-\delta})$

$$= \frac{e^{-\delta t}}{-\delta}\Bigg|_0^{y} = \frac{1-e^{-\delta y}}{\delta}$$

+ στις σχσ δεν εχει νοηλα η προκαταβ ή η ληξιπρ αφού εχω συνεχεια πληρωμες.

Ραντες ζωης : ειναι οι ραντες των οποιων η καταβολή εξαρταται από τη ζωη ενός ατόμου.

Παρουσα αξιας μιας τέτοιας ραντας ειναι Y τμ

Αναλογιστική παρουσα αξια $= E(Y)$.

Ισοβια προκαταβλητεα μοναδιαία ραντα ζωης

πληρωνει 1 στην αρχή καθε ετους αν τοτε ο (x) ειναι ζωντανός

Παρουσα αξια $= Y = \sum_{k=0}^{\infty} u^k \, 1_{T_x > k}$

$K_x \geq k$

$K_x = [T_x]$

$$\sum_{k=0}^{K_x} u^k = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = \frac{1-u^{K_x+1}}{d}$$

K_x $\quad$ K_x+1

T_x

επειδη K_x διακριτη $\Rightarrow$ Y διακριτη

$$\ddot{a}_{\overline{k}|} = \frac{1-v^k}{1-v}$$

μ.τ. των εσοδων που πειλ/ενω

Αναλογιστική παρούσα αξία $= \ddot{a}_x = E(Y)$

Εκφράσεις για το $\ddot{a}_x$ $\quad (A_x)$

α) $\ddot{a}_x = E\left(\frac{1-v^{K_x+1}}{d}\right) = \frac{1}{d}\left(1 - E(v^{K_x+1})\right)$

$= \frac{1-A_x}{d}$

$0 \quad K_x \quad K_x+1$, $\underbrace{\quad}_{T_x}$

β) $\ddot{a}_x = E\left(\sum_{k=0}^{\infty}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \underbrace{E(1_{T_x > k})}_{_kP_x}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_kP_x$

το v^k δεν είναι βέβαιο θεωρείται οπότε πολλ/ζεται με την πιθανότητα $P(x)$ να ζει ο (x) ή = θάνατος

Ισόβια ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής

Δίνει = 1 στο τέλος κάθε έτους αν ζει ο (x) ζωντανός

$0 \quad K_x \quad K_{x+1}$

T_x

παρουσια αξια

$$Y = \sum_{k=1}^{K_x} v^k = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \, 1_{K_x \geq k}$$

$$\parallel$$

$$v \, \frac{v^{K_x - 1}}{v-1}$$

αναλογιστική παρουσα αξια $= E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \, {}_kp_x$

$\frac{1}{i}(1 - E$

$$= \ddot{a}_x - 1$$

αρχίζει ένα έτος μετά από την προσυμφωνία

Προσωρινή προκαταβλητέα ράντα ζωής n-ετών.

Δίνει 1 στην αρχή καθενός από τα επόμενα n έτη αν ο (x) είναι ζωντανός τότε

$0 \quad 1 \quad r \quad n-1 \quad n$

παρούσα αξία $= Y = \sum_{k=0}^{(n-1) \wedge K_x} v^k$

$$= \frac{1 - u^{1+(n-1)\wedge K_x}}{1-u} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, 1_{T_x \geq k}$$

$x \wedge y = \min\{x, y\}$

$x \vee y = \max\{x, y\}$

Scanned with CamScanner

αναλογιστική παρούσα αξία = $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ =

$$E(Y) = \frac{1 - E[v^{n \wedge (K_x+1)}]}{1-u}$$ μεικτή ασφάλιση

$$= \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}$$

βγαίνει έξω γιατί τα αθροίσματα δεν εξαρτ. από τη

Άλλος τύπος: $E(Y) = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_kp_x$

Πληρωμές χρονικές στιγμές 0, 1, ..., n-1

n-1

Πρόσκαιρη ληξιπρόθεσμη

Δίνει 1 στο τέλος κάθε έτους από τα επόμενα n έτη αν ο (x) ζωντανός

παρούσα αξία

$$Y = \sum_{k=1}^{K_x \wedge n} v^k = \sum_{k=1}^{n} v^k 1_{K_x \geq k}$$

$\Rightarrow$ Αναλογ. παρ. αξία $a_{x:\overline{n}|} = E(Y)$

ό,τι δεν έχω γι' είναι ληξιπρόθεσμη

$$= \sum_{k=1}^{n} v^k \, {}_kP_x$$

$D_x = v^x l_x$ extra τιμοί

$N_x = \sum_{i=x}^{\infty} D_i$

$$v^k \, {}_kP_x = \frac{v^k l_{x+k}}{l_x} = \frac{v^{k+x} l_{x+k}}{v^x l_x} = \frac{D_{x+k}}{D_x}$$

$$\ddot{\alpha}_x = \sum_{j=0}^{\alpha} v^j \, {}_jP_x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_{x+j}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

Άσκηση:
Ν.δ.ο.

- $a_{x:\overline{n}|} = {}_1E_x \, \ddot{\alpha}_{x+1:\overline{n}|}$ (ληξιπρόθ, προκατ.)

$${}_kE_x = v^k \, {}_kP_x$$

Λύση

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k \, {}_kP_x \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \cdot$$

$${}_{j+1}P_x = v \sum_{j=0}^{n-1} v^j \, {}_1P_x \cdot {}_jP_{x+1}$$

$$= v P_x \sum_{j=0}^{n-1} v^j \, {}_jP_{x+1} = {}_1E_x \, \ddot{\alpha}_{x+1:\overline{n}|}$$

Πρόσωπαρη συνεχής ράντα ζωής

πληρώνει συνεχώς με ρυθμό 1 ως τον χρόνο $T_x \wedge n$

παρούσα αξία $= Y = \int_0^{T_x \wedge n} v^t dt$ $[t, t+dt]$

παίρνω την ρ/ τουν ορίου σαν δείκτρια

$$= \int_0^n u^t \mathbb{1}_{T_x > t} dt = \bar{a}_{\overline{T_x \wedge n|}}$$

$$= \frac{1 - u^{T_x \wedge n}}{\delta}$$

αναλογιστική παρούσα αξία $= \bar{a}_{x:\overline{n|}} = E(Y)$

$$= \frac{1}{\delta}\left(1 - E\left(v^{T_x \wedge n}\right)\right) = \frac{1}{\delta}\left(1 - \bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)$$

Επίσης $\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n u^t E(\mathbb{1}_{T_x > t}) dt$

$$= \int_0^n v^t \, {}_tP_x dt$$

* στο διάστημα 0 μέχρι n πληρώνει με ρυθμό 1 εφόσον το άτομο είναι ζωντανό

Αναβαλλόμενες ράντες ζωής

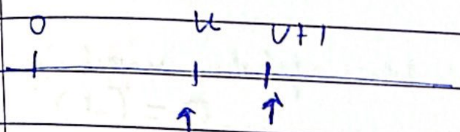
αρχίζουν να καταβάλλονται σε χρόνο n από σήμερα

Παράδειγμα: ισόβια προκαταβλητέα με αναβολή n ετών.

ληξιπρόθεσμη

όλα τα είδη έχουν και την αναβολή

έκδοση



$$\text{παρούσα αξία} = Y = \sum_{k=n}^{\infty} v^k \, 1_{T_x \geq k}$$

$$\text{αναλογιστική παρούσα αξία} = \underset{\text{αναβαλλόμενη}}{{}_{n|}}\ddot{a}_x = E(Y) =$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_kP_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_kP_x - \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_kP_x =$$

$$= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Άσκηση: Να εκφραστεί η ${}_{m|}\ddot{a}_x$ ως συνάρτηση των N, D

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{\infty} v^k {}_kP_x = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{v^{x+k}}{v^x} \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

$$= \frac{1}{D_x} \sum_{k=m}^{\infty} v^{x+k} l_{x+k}$$

$$= \frac{1}{D_x} \sum_{r=x+m}^{\infty} v^r l_r$$

$$= \frac{1}{D_x} N_{x+m}$$

ο όρος που πρέπει να πληρώνει κάθε φορά ο ασφαλής

Κεφ 4 σημειώσεων

Ασφάλιστρα

Ολική απώλεια του ασφαλιστή

L = παρούσα αξία παροχών − παρούσα αξία ασφαλίστρων

Τα ασφάλιστρα επιλέγονται έτσι ώστε $E(L)=0$.

Άρα E[παρούσα αξία παροχών) $= E($ » ασφαλίστρων $)A_x$

Παράδειγμα

Ο (x) αγοράζει ισόβια ασφάλιση που πληρώνει 1 στο τέλος του έτους θανάτου. Θα πληρώνει P στην αρχή κάθε έτους που είναι ζωντανός ξεκινώντας από την αρχή της απογραφής του συμβολαίου $P=\ddot{a}_{\overline{K_x}|}$

Λύση

$L = v^{K_x+1} - P\,\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}$

$0 = E(L) = E(v^{K_x+1} - P\,E(\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|})$

$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1+v+\dots v^{n-1}$

n πληρωμές

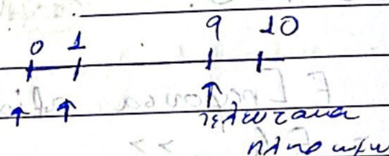
// Ασφάλιστρα

$= A_x - P\ddot{a}_x$

$\Leftrightarrow \quad A_x = P\ddot{a}_x$

$\Rightarrow \quad P = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x} = \dfrac{1-d\ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}$

Πόσο θα ήταν το P αν (x) θέλει να πληρώσει σε 10 ;



Τότε $L = v^{K_x+1} - P\ddot{a}_{\overline{n \wedge (K_x+1)}|}$

$\Rightarrow \quad A_x = P\ddot{a}_{x:\overline{10}|}$

$\Rightarrow \quad P = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{10}|}}$

Ποιο P είναι μικρότερο; το 2ο, αποπληρώνει πιο γρήγορα (μέσα σε 10 χρόνια).

στο 1ο έχω $\sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_kp_x$

2ο $\sum_{k=0}^{10} v^k \, {}_kp_x$

Άσκηση Ένας 50χρονος σκοπεύει να πάρει σύνταξη στα 60 με ετήσιο ποσό $\Sigma_1 = 20000$ € που περιλαμβάνει εγώ στην αρχή κάθε χρονιάς. Αποφασίζει να πάρει σύνταξη στα 50. Ποιο το ετήσιο ποσό σύνταξης Σ_2;

Λύση

Δίνονται τα N_{50}, N_{60}

Σενάριο 1

παρούσα αξία $Y_1 = \Sigma_1 \, {}_{10|}\ddot{a}_{\overline{K_{50}-9}|}$

50 60 61

$K_{50} = 11$

Σενάριο 2

παρούσα αξία $Y_2 = \Sigma_2 \, \ddot{a}_{\overline{K_{50}+1}|}$

πρέπει $E(Y_1) - E(Y_2) = 0$

$$\Rightarrow \Sigma_1 \, {}_{10|}\ddot{a}_{50} = \Sigma_2 \, \ddot{a}_{50}$$

$$\Rightarrow \Sigma_2 = \Sigma_1 \cdot \frac{{}_{10|}\ddot{a}_{50}}{\ddot{a}_{50}}$$

$m=0$: $\ddot{a}_x$

$$= \Sigma_1 \frac{N_{60}/D_{50}}{N_{60}/D_{50}} = \Sigma_1 \frac{N_{60}}{N_{50}}$$

${}_{m|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}$

Άσκηση Ο (35) ασφαλίζεται για 10 χρόνια με τους εξής όρους $T = T_{35}$

- Αν $T \in (0,5)$, 1000 στους κληρονόμους τον χρόνο $[T]+1$
- Αν $T \in [5,10)$, 2000 ״
- Αν $T > 5$, 5000 στον (35) τον χρόνο 5
- Αν $T > 10$, 10000 ״ 10

Πληρώνει την ασφάλιση με ετήσιο προκαταβλητέο ασφάλιστρο που είναι P τα πρώτα 5 χρόνια και $2P$ τα επόμενα 5.
Να βρεθεί το P ως συνάρτ. αναλογ. συναρτήσεων.

$$0 \quad 5$$

Λύση

Έστω $K = K_{35} = [T_{35}]$

$$L = 10^4 \underbrace{v^{K+1}}_{} 1_{K \le 4} + 2 \cdot 10^4 \underbrace{v^{K+1}}_{\substack{\text{τέλος του έτους}\\ \text{θανάτου}\\ \text{αν πεθάνει}\\ \text{χρονιά τη } K}} 1_{K \in [5,9]}$$

$$+ 5000\, v^5\, 1_{K \geq 5} + 10^4 \cdot v^{10}\, 1_{\underset{T \geq 10}{K \geq 10}}$$

$$- P\, \ddot{a}_{\overline{5 \wedge (K+1)}|} - 2P\, 1_{K \geq 5}\, \ddot{a}_{\overline{5 \wedge (K-5+1)}|}$$

(αν $K=6$: θα πληρώσει για 2 περιόδους)

όπου βάζω 1 : πρώτα πρέπει να γίνει το γεγονός

πρέπει $E(L) = 0 \Leftrightarrow$

$$10^4 A^1_{35:\overline{5|}} + 2 \cdot 10^4 \, {}_{5|}A^1_{35:\overline{5|}}$$

προσωρινή ζωής

προσωρινή ζωής αναβαλλ.

$$+ 5000 \, {}_5E_{35} - P \, \ddot{a}_{35:\overline{5|}} - 2P \, {}_{5|}\ddot{a}_{35:\overline{5|}}$$

επιβίωσης

▶ Ασφαλίσεις ζωής εκτρα eclass