11 Νοεμβρίου

Ατομικό πρότυπο

$X_1, \dots X_n$ ανεξ

$S_n = x_1 + \dots + x_n$

$(I_1 x_1 + \dots + I_n x_n)$

$F_S(x)$

$M_S(t)$

$E(S)$

$Var(S)$

συλλογικό

$S_N = x_1 + \dots + X_N$

$X_1 \dots X_N$ ανεξ ισόνομες

X_i, N ανεξ $N \varphi$.

ΚΟΘ

$x_1 \dots X_n$ ανεξ ισόνομες

$\mu = E(x_i) < \infty$, $\sigma^2 = Var(x_i)$

$\forall$ για ανεξ και ισόνομες

Τότε $\dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} \le x\right) \overset{n>30}{\approx} \Phi(x)$$

ΚΟΘ για τυχαία αθροίσματα

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$, X_i ανεξ + ισον $\sim F_X$

με $E(X_i) < \infty$, $\sigma^2 = Var(X_i) < \infty$

Εαν $\frac{N_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta > 0$, θ σταθερα ανεξ του n

Τότε, $\frac{S_{N_n} - E(S_{N_n})}{\sqrt{Var(S_{N_n})}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$.

Ικανή συνθήκη για $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$

είναι $\begin{cases} E(Y_n) = \mu_n \to \theta. \\ Var(Y_n) = \sigma_n^2 \to 0 \end{cases}$

$Y_n = \frac{N_n}{n}$

Εφαρμογή: $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, X_i ανεξ + ισον $X \sim F_X$

$N \sim Poisson(\lambda)$

$(S_N \sim CP(F_X, \lambda))$

εισφέρω τον αριθμό αφίξεων.

$N_n = N_\lambda \sim Poisson(\lambda^n)$

Ελέγχω τις συνθήκης (*)

$E\left(\frac{N_n}{n}\right) = E\left(\frac{N_n}{n}\right) = \frac{n}{n} = 1 > 0$ θ

$S_N \quad S_{N_n} \quad S_{N_\lambda}$

$$Var\left(\frac{N_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} Var(N_n) = \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Άρα $\frac{N_n}{n} \xrightarrow{P} \theta$ ~~1~~ το.

Τελικά $\frac{S_N - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2 + n\mu^2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΟΥ

Αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου

$X \longrightarrow P(x)$ P Premium

τμ που εκφράζει τον κίνδυνο $\phi(x)$ συνάρτηση

επιθυμητές ιδιότητες της αρχής Premium

- Non-negative loading $P(x) \geq E(x)$
- Additivity (Προσθετικότητα) X_1, X_2
  $P(x_1 + x_2) = P(x_1) + P(x_2)$
- Scale Invariance : $Z = \alpha X$
  $P(a \cdot X) = \alpha \cdot P(X)$ $\quad \alpha > 0$

• Consistency (συνέπεια) $\quad Y = X + c \quad c > 0 \qquad P(X+c) = P(X) + c$

• no-ripoff $\quad P(X) = \}(\sup X)$

• Iterativity : επαναληπτικότητα $\quad P(X) = P(P(X|Y))$

Συνήθεις αρχές υπολογ. ασφαλίστρου.

πχ

① Pure premium - Net premium

Αρχή Μαθηματ. Ελπίδας

$$P(X) = E(X)$$

← δεν είναι καλή πολύ αρχικό

ικανοποιεί τις ιδιοτ

② Expected Value Principle

$$P(X) = (1+\theta)E(X) \quad , \theta > 0$$
$$= E(X) + \theta E(X)$$

ικανοποιεί τις ιδιότητες εκτός

→ $Y = X + C \qquad P(Y) = P(X+c) = (1+\theta)E(X+c)$

$= (1+\theta)E(X) + (1+\theta)\cdot C$

$= P(X) + \underbrace{(1+\theta)\cdot c}_{c+\theta c}$

→ απαγορεία ripoff $\quad$ Για $X: P(X=b) = 1$

$$P(X) = (1+\theta)E(X) = 1+\theta \cdot b > b \left(\sup^{max} X\right)$$

(?) ισχύει η επαναληπτικότητα

③ Αρχή διασποράς

$$P(x) = E(x) + \underbrace{\alpha V(x)}_{\text{loading}}$$

not scale invariant

$Y = \alpha X$

$$P(Y) = P(\alpha X) = E(\alpha X) + \alpha Var(\alpha X)$$
$$= \alpha E(X) + a^3 Var(X)$$
$$= \alpha (E(X) + a^2 Var(X))$$
$$\neq \alpha P(X)$$

ripoff

$\xi \downarrow$ max

$$P(X=8) = P(X=12) = 0,5$$
$$E(X) = 8 \cdot 0,5 + 12 \cdot 0,5 = 10$$
$$Var(X) = 4$$
$$P(X) = 10 + 4\alpha > 12$$

④ Αρχή ημιδιασποράς

$$P(x) = E(X) + \alpha Var_{+}(X)$$

υπολογ μόνο για τις μεγάλες τιμές

⑤ Αρχή της τυπικής απόκλισης

$$P(x) = E(x) + \alpha \sqrt{Var(x)}$$

⑥ Αρχή της ωφελιμότητας.

ο ασφαλιστής κινδυνόφοβος

zero utility

$$v(w) = E[u(w + P(X) - X)]$$

$u'(x) > 0$

$u''(x) < 0$

δεν είναι ~~αθροιστική~~

• $u \sim \exp(\lambda)$

Εκθετική αρχή

$$P(X) = \frac{1}{\lambda} \ln M_X(\lambda).$$

Gmax

ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες.

$$\boxed{u(x) = -e^{-\lambda x}}$$

⑦ Αρχή της μέγιστης απώλειας (Maximal loss principle)

ο κίνδυνος X είναι φραγμένος με μέγιστη τιμή ξ

$$\xi = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(X \le x) = 1\} < \infty$$

$p \in [0,1]$ $\quad P(X) = p\,E(X) + (1-p)\,\xi$

μικρός κίνδυνος.

πόσο συμμετέχει η μ.τ στο ποσοστό