21/10/2021 - 2ο Μάθημα

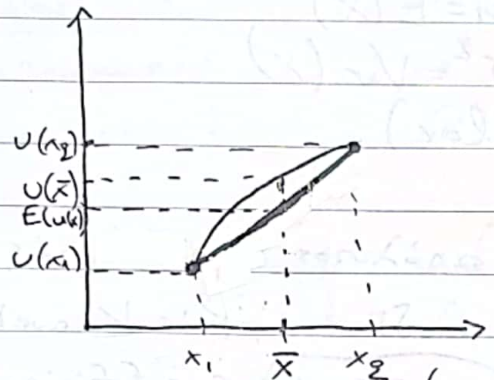
Κινδυνόφοβοι / Κινδυνόφιλοι

Risk averse / Risk seeking-loving

(u αύξουσα)

ισχυρά → u' φθίνει ⇝ $u''(x) \le 0$

ρυθμός αύξησης   κοίλη - concave



$$\left(E(u(x)) = \frac{u(x_1)+u(x_2)}{2} \right)$$

$$\left(E(\bar{x}) = \bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2} \right) \ldots$$

Ανισότητα Jensen $\boxed{u(E(x)) \ge E(u(x))}$

Στους κινδυνόφιλους η u κυρτή δηλ. $\boxed{u(E(x)) \le E(u(x))}$

$$E\left[u(E(x))\right] \ge E(u(x))$$

$$E(x) \ge X$$

προτιμάει fix τιμή από το ρίσκο

Πρόταση: u γνήσια αύξουσα και κοίλη (ωφελιμοσυνάρτηση κινδυνόφοβου ατόμου). Τότε:

$G_{max}, G_{min} \ge E(x)$

$V_{max}, V_{min} \le E(x)$

Εδώ υπήρχε $E(u(w-G_{max}))$ αλλά φεύγει λόγω αριθμού.

ανισ. Jensen για κοίλες

Απόδειξη: $u(w-G_{max}) = E(u(w-X)) \leq u[E(w-X)] = u(w-E(X)) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ u γν. αύξ.

$w - G_{max} \leq w - E(X) \Rightarrow G_{max} \geq E(X)$

Ομοίως το άλλο.

Πρόταση: Άτομο ασφαλιζόμενο, περιουσίας w με ωφ. συνάρτηση u τότε το G_{max} του ισούται περίπου με:

$$G_{max} \approx \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{u''(w-\mu)}{u'(w-\mu)} \qquad \mu = E(X), \quad \sigma^2 = Var(X)$$

Απόδειξη: (Με ανάπτυγμα Taylor)

Ορίζω $\boxed{r_u(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}}$ απόλυτος συντελεστής αποφυγής κινδύνου - Risk aversion coefficient

Κινδυνόφοβος $\overset{u' \text{ αύξουσα}}{u'>0}$ $u'' \leq 0$: $r_u(w) \geq 0$ (αρχικής του) u κοίλη

Κινδυνόφιλος $\overset{u' \text{ αύξουσα}}{u'>0}$ $u'' \geq 0$: $r_u(w) \leq 0$ u κυρτή

Εκφράζει πόσο κινδυνόφοβος ή κινδυνόφιλος είναι ο άλλος.

$u, \tilde{u}$ $\quad \tilde{u}(w) = a u(w) + b \quad a>0, \ b \in \mathbb{R}$

$$r_{\tilde{u}}(w) = -\frac{\tilde{u}''}{\tilde{u}'} = -\frac{\cancel{a}u''}{\cancel{a}u'} = -\frac{u''}{u'} = r_u(w)$$

Ο συντελεστής r_u μένει σταθερός ανεξάρτητα του μετασχηματισμού της u σε $\tilde{u}$.

Κλάσεις ωφελιμοσυναρτήσεων

το A είναι προαιρετικό
το b είναι προαιρετικό

- Γραμμική $u(w) = w$
- Εκθετικές $u(x) = A - B \cdot e^{-\lambda x}$, $B > 0$, $\lambda > 0$, $A \in \mathbb{R}$
- Τετραγωνικές $u(x) = x - bx^2$, $x < \frac{1}{2b}$, $b > 0$
- Λογαριθμικές $u(x) = \log(a + x)$, $x > -a$
- Εκθετικές (κλάσματα εκθετικές) $u(x) = x^c$, $x > 0$, $0 < c < 1$

Εφαρμογή: Υπό την εκθετική ωφελιμοσυνάρτηση (άτομου που θέλει να ασφαλιστεί έναντι κινδύνου X) δηλαδή με ωφελιμοσυνάρτηση $u(x) = A - Be^{-\lambda x}$ $B > 0$ $\lambda > 0$ $A \in \mathbb{R}$, ποιό είναι το G_{max};

$$E[u(w - X)] = u(w - G_{max}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(A - B e^{-\lambda(w - X)}) = A - B e^{-\lambda(w - G_{max})}$$

$$A - B e^{-\lambda w} E(e^{\lambda X}) = A - B e^{-\lambda w} \cdot e^{\lambda G_{max}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda G_{max}} = E(e^{\lambda X}) = M_X(\lambda) \leftarrow \text{Ροπογεννήτρια}$$

Στο σενάριο που η X είναι γνωστή κατανομή, ξέρουμε απ' θεωρία την ροπογεννήτρια.

$$\Leftrightarrow \lambda G_{max} = \ln M_X(\lambda) \Leftrightarrow \boxed{G_{max} = \frac{\ln M_X(\lambda)}{\lambda}}$$

$$u(x) = A - Be^{-\lambda x}$$
$$u'(x) = -B(-\lambda) e^{-\lambda x}$$
$$u''(x) = B\lambda(-\lambda) e^{-\lambda x}$$

$$r_u(w) = \frac{-u''(w)}{u'(w)} = \frac{\cancel{B}\lambda^{\cancel{2}} \cancel{e^{-\lambda x}}}{\cancel{B\lambda e^{-\lambda x}}} = \lambda \leftarrow \text{κινδυνόφοβοι}$$

επειδή $\lambda > 0$ και άρα $r_u(w) > 0$ που σημαίνει κινδυνόφοβος.

Ειδική Περίπτωση: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$M_X(\lambda) = e^{\mu\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}$$

$$G_{max} = \frac{1}{\lambda} \ln\left(e^{\mu\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$G_{max} = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda$$

Αν η εκθετική και $X \sim N$ η προσέγγιση γίνεται αυτή.

$$G_{max} = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 r_u(w)$$

Άσκηση: Άτομο με περιουσία w, ασφαλισμένος με $u(x) = -e^{-0.005x}$ και έστω ζημία X με μικτή εκθετική κατανομή

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\cdot 0{,}01 \cdot e^{-0.01x}, & x > 0 \leftarrow \text{Συνεχής} \\ \frac{3}{4}, & x = 0 \leftarrow \text{Διακριτή} \end{cases}$$

$G_{max} = ;$

Λύση: $u(w - G_{max}) = E(u(w - X))$

$$u(w - G_{max}) = u(w)\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\int_0^\infty u(w-x)\, 0.01 \cdot e^{-0{,}01x}\, dx \iff$$

για $x=0$ διακριτή οπότε $E(u(w)) = \sum f_X(w)\cdot u(w)$

$$\iff -e^{-0.005(w - G_{max})} = -e^{-0{,}005w}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\int_0^\infty -e^{-0.005(w-x)}\cdot 0{,}01\cdot e^{-0.01x}\, dx$$

$$\iff e^{0{,}005G} = \frac{3}{4} + \frac{0.01}{4}\int_0^\infty e^{-0{,}005x}\, dx \sim \left[-\frac{e^{-0.005x}}{0.005}\right]_0^\infty$$

$$e^{0{,}005G} = \frac{3}{4} + \frac{0{,}01}{4}\cdot\frac{1}{0.005} = 1{,}25$$

$\ln$:

$$0{,}005\, G_{max} = \ln 1{,}25$$

$$G_{max} = \frac{\ln 1{,}25}{0{,}005}$$

Συνάρτηση π.π. εκθ. κατ.

$$\int_0^\infty \lambda\cdot e^{-\lambda x} = 1$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$

Άσκηση

Άτομο με περιουσία w επιλέγει ανάμεσα σε 2 εναλλακτικές $P_1(X_1)$, $P_2(X_2)$. Οι 2 εναλλακτικές του φέρνουν κέρδος $w+X_1$, $w+X_2$ αντίστοιχα.
Εάν $E(X_1)=10$ $Var(X_1)=2$ $E(X_2)=10.1$
Έστω $u(x)=x-0{,}002x^2$. Για ποιές τιμές $Var(X_2)$ θα έχουμε $P_1 \succ P_2$ αν $w=200€$ και υποθέτουμε ότι $P(w+X_i<250)=1$ $i=1,2$

θέλω $u\nearrow$

$u'(x)>0$ θέλω αύξουσα

$u'(x)=1-0{,}004x>0 \Rightarrow x<\frac{1}{0{,}004}=250$

$P_1 \succ P_2 \Leftrightarrow E(u(w+X_1)) > E(u(w+X_2))$

$E(w+X_1-0.002(w+X_1)^2] > E(w+X_2-0.002(w+X_2)^2)$

$E(w+X_1-0.002w^2-0{,}004wX_1-0.002X_1^2] > \ldots$

$\underbrace{E(X_1)}_{10}-0{,}004\cdot \underset{200}{w}\,\underset{10}{E(X_1)}-0{,}002E(X_1^2) > \underbrace{E(X_2)}_{10.1}-0.004\cdot w\,\underline{E(X_2)}+$ γνωστό $=10.1$

$-0.002\,\underline{E(X_2^2)}$ άγνωστο

$V(X_1)=E(X_1^2)-E^2(X_1)$

Βρίσκω αυτό

$E(X_2^2)=V(X_2)+\underbrace{E^2(X_2)}_{(10.1)^2}$

Βγαίνει με πράξεις ...

$Var>\ldots$

Ασφαλιστικά Σχήματα

Κάνει ασφάλεια που του καλύπτει $\overbrace{I(X)}^{\text{μέρος}}$ της ζημιάς X

Μερική Κάλυψη.

Αν $- I(X) = X$ (πλήρης κάλυψη)

όταν ξεπεράσει πάνω από d το πληρώνει η ασφαλιστική εξ ολοκλήρου το ποσό από d και πάνω

$- I_\lambda(X) = \lambda \cdot X \quad 0<\lambda<1$ ένα λογική κάλυψη.

$- I_d(X) = \max\{0, X-d\} = \begin{cases} X-d & X \geq d \\ 0 & X<d \end{cases}$

Αφού τα ποσά 0, $(1-\lambda)\cdot X$, $\min\{X,1\}$

Χωρίς Ασφάλιση — Με ασφάλιση

$$\boxed{E(u(w-X)) = E(u(w-G-X+I(X)))}$$

$E[I_d(X)]$ stop loss premium

Στην πλήρης $= E(u(w-G))$ → το X με το $I(X)$ αλληλοεξουδετερώνονται ως τέλος.

Εάν $I_\lambda(x) = \lambda X$

$$E(u(w-X)) = E(u(w-G-X+\lambda X)) = E(u(w-G-(1-\lambda)X))$$

Λήμμα: Έστω τ.μ. $X \geq 0$ με αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας - πιθανότητας $F_X(x)$, τότε

$$E(X) = \int_0^\infty [1-F_X(t)]\,dt$$

$$E[I_d(X)] = \int_0^\infty [1-F_Y(t)]\,dt \quad (Y = I_d(X))$$

Αναμενόμενο ποσό που θα πληρώσει ο ασφαλιστής.

όπου $F_Y(t) = P[\max\{0, X-d\} \leq t] = P(X-d \leq t) = P(X \leq t+d)$

$$E[I_d(X)] = \int_0^\infty [1-F_X(t+d)]\,dt = \underline{\int_d^\infty 1-F_X(u)\,du}$$

Θεώρημα (Arrow-Pratt)

$u(\cdot)$ κοίλη

$I(X)$, $X \geq 0$, θέλει να πληρώσει G — stop loss

Από όλες τις μερικές καλύψεις $I(X)$ τ.ώ. $G = \boxed{E[I(X)]}$ — G - ποιο d;

Εκείνη που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη ωφέλεια είναι η $I_d(X)$

⇔ Ελαχιστοποιεί τη διασπορά της σκάλωσης ζημιάς

$G = E[I_d(X)]$

$$E(u(w - G - X + I(X))) \leq E(u(w - G - X + I_d(X)))$$

$$Var(X - I(X)) \geq Var(X - I_d(X))$$

Άσκηση

Ασφαλιστική Εταιρεία έχει αναλάβει χαρτοφυλάκιο συμβολαίων που οι αποζημιώσεις χαρακτηρίζονται από την κατανομή Pareto (συν.κ~Pareto) με $\alpha = 4$, $\lambda = 100$. Η ασφαλιστική σημερα αντασφαλίζει το χαρτοφυλάκιο με κάλυψη υπερβάλλοντος ζημιάς (stop-loss) ιδίας κράτησης M ώστε το 90% των αποζημιώσεων να πληρώνονται από την ασφαλιστική εταιρεία.

i) Υπολογίστε το M

ii) Υπολογίστε το αναμενόμενο ύψος αποζημίωσης που θα πληρώσει ο αντασφαλιστής για τα συμβόλαια που συμμετέχει.

$$P(X \leq M) = 0.90$$

$$F(M) = 0{,}90$$

$$1 - \frac{100^4}{(100+M)^4} = 0.90$$

$$\Downarrow$$

Συν. Κατανομής Pareto:

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha}, \quad x > 0$$

$$f_X(x) = \frac{\alpha \lambda^{\alpha}}{(\lambda + x)^{\alpha+1}}$$

$$\frac{100^4}{(100+M)^4} = 0{,}10 \Leftrightarrow (100+M)^4 = \frac{100^4 \cdot 10\cancel{0}}{1\cancel{0}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100+M = 100 \cdot \sqrt[4]{10} \Leftrightarrow M = 100\sqrt[4]{10} - 100$$
$$= 77{,}83$$

$$E\left[I_M(x)\right] = \int_M^\infty (1 - F_x(u))\, du = \int_M^\infty \left(\frac{\lambda}{\lambda+u}\right)^a du =$$

$$= 100^4 \int_M^\infty (100+u)^{-4} du = 100^4 \left.\frac{(100+u)^{-3}}{-3}\right|_M^\infty =$$

$$= \frac{100}{3 \cdot 10^{3/4}}$$

__Ασκησ:__

Γνωρίζω ότι το ασφάλιστρο $G = 12{,}5$, $X \sim U(0,100)$

$\lambda = ;$ $d = ;$

έτσι ώστε $G = E\left[I_\lambda(x)\right]$

$G = E\left[I_d(x)\right]$

$$E\left[I_\lambda(x)\right] = 12.5 \Leftrightarrow E[\lambda \cdot X] = 12.5 \Leftrightarrow \lambda \cdot E(X) = 12.5$$

$$E(X) = \frac{0+100}{2} = 50 \quad \left(\text{Γενικά } \underbrace{\frac{a+b}{2}}^{E(U)} \text{ όπου } a \text{ αριστ. άκρο και } b \text{ δεξιό άκρο του } U(a,b)\right)$$

$$\lambda = \frac{12.5}{\underbrace{50}_{E(x)}} = \frac{1}{4} \checkmark$$

$$E\left[I_d(X)\right] = \int_d^\infty (1 - \underbrace{F_x(u)}_{P(X \le u)})\, du = \int_d^\infty (1 - F_x(x))\, dx$$

Scanned with CamScanner

$$12.5 = \int_d^{100} (x-d) f_X(x)\, dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12.5 = \int_d^{100} (x-d) \frac{1}{100}\, dx \overset{x-d=y}{=\!=} \int_0^{100-d} y \frac{1}{100}\, dy =$$

$$= \frac{1}{100} \frac{y^2}{2} \Big|_0^{100-d} = \boxed{\frac{(100-d)^2}{200}}$$

$$(100-d)^2 = 2500 \qquad 100-d = 50 \quad d = 50$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ \Leftarrow -50 \quad d = 150$$

Διαλέγουμε $d = 50$ επειδή $U(0,100)$

30/10/2021 - 3ο Μάθημα

Θεωρία Κινδύνου

Για τον ασφαλιστή κοιτάμε: