

Λύσεις Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2025-2026

1. **(Ορια)** Να υπολογίσετε ακριβείς τιμές για τα ακόλουθα όρια, ή να δείξετε ότι ισούνται με $\pm\infty$:

(α') (1 μονάδα)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-4x}.$$

(β') (1 μονάδα)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x+1}{10x}\right)^{\sqrt{x}}.$$

(γ') (1 μονάδα)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1}{10x}\right)^{\sqrt{x}}.$$

Λύση:

(α')

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-4x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left[-4x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = \exp \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{-4 \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right] \\ &= \exp \left[\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-4 \log(1+h)}{h} \right] = \exp \left[\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-4}{1+h} \right] = e^{-4}. \end{aligned}$$

(β') Όταν $x > 0$, έχουμε

$$0 \leq 1 - \frac{x+1}{10x} \leq 1 - \frac{x}{10x} = \frac{9}{10} \Rightarrow 0 \leq \left(1 - \frac{x+1}{10x}\right)^{\sqrt{x}} \leq \left(\frac{9}{10}\right)^{\sqrt{x}},$$

και επομένως από το Κριτήριο της Παρεμβολής η δοσμένη συνάρτηση τείνει στο 0 καθώς $x \rightarrow \infty$.

(γ') Παρόμοια, παρατηρούμε πως όταν $x > 0$ έχουμε

$$1 + \frac{x+1}{10x} \geq 1 + \frac{x}{10x} = \frac{11}{10} \Rightarrow \left(1 + \frac{x+1}{10x}\right)^{\sqrt{x}} \geq \left(\frac{11}{10}\right)^{\sqrt{x}},$$

και επομένως σε αυτή την περίπτωση, και πάλι από το Κριτήριο της Παρεμβολής προκύπτει πως η συνάρτηση τείνει στο άπειρο.

2. **(Παράγωγοι)** Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^x \cos(\cos t) dt,$$

ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

(α') (0.5 μονάδα) Να εξετάσετε αν η $g(x)$ είναι περιττή ή άρτια.

(β') (0.5 μονάδα) Να υπολογίσετε την παράγωγο της $g(x)$.

(γ') (0.5 μονάδα) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

Λύση:

(α') Θέτουμε $\theta = -t \rightarrow d\theta = -dt$ και παρατηρούμε πως

$$g(x) = - \int_0^{-x} \cos(\cos(-\theta)) d\theta = - \int_0^{-x} \cos(\cos(\theta)) d\theta = -g(-x),$$

επομένως η $g(x)$ είναι περιττή.

(β') Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, προκύπτει

$$g'(x) = \left(\int_0^x \cos(\cos t) dt \right)' = \cos(\cos x).$$

(γ') Στο διάστημα $[-1, 1]$ η συνάρτηση του συνημιτόνου έχει ελάχιστη τιμή την $\cos 1 = \cos(-1)$. Επομένως, παρατηρούμε πως, για κάθε $x > 0$,

$$\int_0^x \cos(\cos t) dt \geq \int_0^x \cos 1 dt = x \cos 1,$$

επομένως από το Κριτήριο της Παρεμβολής η δοσμένη συνάρτηση $g(x)$ τείνει στο άπειρο.

3. (Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)

(α') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

στο διάστημα $(0, 1)$. Υπόδειξη: μπορείτε να κάνετε την αντικατάσταση $x = \sin^2 \theta$.

(β') (0.5 μονάδα) Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Λύση:

(α') Ακολουθούμε την υπόδειξη και θέτουμε $x = \sin^2 \theta$. Αφού το $x \in (0, 1)$, το $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Επίσης, $\frac{dx}{d\theta} = 2 \sin \theta \cos \theta$. Επομένως,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{2 \sin \theta \cos \theta d\theta}{|\sin \theta| |\cos \theta|} = 2\theta + C = 2 \arcsin \sqrt{x} + C.$$

Στα άνω, αφαιρέσαμε τις απόλυτες τιμές διότι εφόσον το $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ θα έχουμε ότι $\cos \theta > 0$ και $\sin \theta > 0$.

(β') Το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό διότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση απειρίζεται και στα δύο άκρα ολοκλήρωσης. Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_h^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx + \lim_{h \rightarrow 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^h \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} [2 \arcsin \sqrt{x}]_h^{\frac{1}{2}} + \lim_{h \rightarrow 1^-} [2 \arcsin \sqrt{x}]_{\frac{1}{2}}^h = \pi. \end{aligned}$$

4. (1.5 μονάδα) (Διαφορικές Εξισώσεις) Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$xy'(x) + (1+x)y(x) = x^2 e^{-x}.$$

Λύση: Καταρχάς,

$$xy'(x) + (1+x)y(x) = x^2 e^{-x} \Leftrightarrow y'(x) + \left(\frac{1}{x} + 1\right)y(x) = x e^{-x}.$$

Όμως,

$$\int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx = \log x + x + C,$$

και

$$e^{\log x + x} = x e^x,$$

επομένως

$$\begin{aligned} xy'(x) + (1+x)y(x) = x^2 e^{-x} &\Leftrightarrow y'(x) + \left(\frac{1}{x} + 1\right)y(x) = x e^{-x} \Leftrightarrow x e^x y'(x) + \left(\frac{1}{x} + 1\right)x e^x y(x) = x^2 \\ &\Leftrightarrow (y(x)x e^x)' = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' \Leftrightarrow y(x) = \frac{x^2}{3} e^{-x} + \frac{C}{x} e^{-x}, \end{aligned}$$

όπου $C \in \mathbb{R}$.

5. (Σειρές)

(α') (1 μονάδα) Να αποδείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

συγκλίνει χρησιμοποιώντας το Κριτήριο του Ολοκληρώματος.

(β') (1 μονάδα) Δίνεται η σειρά

$$\sum \frac{n^2 + \log n}{n^5 + \sin n}.$$

Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει. Υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την σειρά του προηγούμενου σκέλους.

(γ') (0.5 μονάδα - δύσκολο) Να δείξετε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{3}{2}.$$

Λύση:

(α') Κατά τα γνωστά από το Κριτήριο του Ολοκληρώματος, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3} dx.$$

Όμως, έχουμε

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_1^h \frac{1}{x^3} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_1^h \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)' dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^h = \frac{1}{2}.$$

(β') Θέτουμε

$$a_n = \frac{n^2 + \log n}{n^5 + \sin n}, \quad b_n = \frac{1}{n^3}$$

και παρατηρούμε πως

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^5 + n^3 \log n}{n^5 + \sin n} = \frac{1 + \frac{\log n}{n^2}}{1 + \frac{\sin n}{n^5}} = 1.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Κριτήριο της Σύγκρισης στο Όριο, και επειδή η σειρά $\sum \frac{1}{n^3}$ συγκλίνει, προκύπτει πως η δοσμένη σειρά επίσης συγκλίνει.

(γ') Παρατηρούμε πως το καταχρηστικό ολοκλήρωμα του πρώτου σκέλους είναι μεγαλύτερο του αθροίσματος της σειράς από τον δεύτερο όρο και μετά, καθώς το άπειρο αυτό άθροισμα είναι το καταχρηστικό ολοκλήρωμα μιας μικρότερης τμηματικά σταθερής συνάρτησης, επίσης στο διάστημα $(1, \infty)$. Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$