

Οδηγίες (Διαβάστε τες!) ΠΡΟΣΟΧΗ: ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΠΙΣΩ ΣΕΛΙΔΑ!!!!

1. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το φύλλο.
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός, έξυπνων ρολογιών και συναφών συσκευών. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Η εξέταση είναι με κλειστά βιβλία. Απαγορεύεται να χρησιμοποιήσετε οτιδήποτε πέραν των θεμάτων και των τετράδιων των λύσεων.
5. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
6. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.

Θέματα

1. **(Όρια)** Να υπολογίσετε ακριβείς τιμές για τα ακόλουθα όρια, ή να δείξετε ότι ισούνται με $\pm\infty$:

(α') (1 μονάδα)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-4x}.$$

(β') (1 μονάδα)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x+1}{10x}\right)^{\sqrt{x}}.$$

(γ') (1 μονάδα)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1}{10x}\right)^{\sqrt{x}}.$$

2. **(Παράγωγοι)** Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \int_0^x \cos(\cos t) dt,$$

ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

(α') (0.5 μονάδα) Να εξετάσετε αν η $g(x)$ είναι περιττή ή άρτια.

(β') (0.5 μονάδα) Να υπολογίσετε την παράγωγο της $g(x)$.

(γ') (0.5 μονάδα) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

3. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)**

(α') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

στο διάστημα $(0, 1)$. Υπόδειξη: μπορείτε να κάνετε την αντικατάσταση $x = \sin^2 \theta$.

(β') (0.5 μονάδα) Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

4. (Διαφορικές Εξισώσεις) (1.5 μονάδα) Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$xy'(x) + (1+x)y(x) = x^2e^{-x}.$$

5. (Σειρές)

(α') (1 μονάδα) Να αποδείξετε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

συγκλίνει χρησιμοποιώντας το Κριτήριο του Ολοκληρώματος.

(β') (1 μονάδα) Δίνεται η σειρά

$$\sum \frac{n^2 + \log n}{n^5 + \sin n}.$$

Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει. Υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την σειρά του προηγούμενου σκέλους.

(γ') (0.5 μονάδα - δύσκολο) Να δείξετε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{3}{2}.$$

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x) = \cos x \cos y + \sin x \sin y, \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad \cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad \cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)], \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)], \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|, \quad |f(y) - f(x)| \leq C|y - x|$$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}$$

$$f(\theta x_0 + (1-\theta)x_1) < \theta f(x_0) + (1-\theta)f(x_1)$$

$$L(f, P) \triangleq \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}), \quad U(f, P) \triangleq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}), \quad \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right\}$$

$$\frac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta) d\theta, \quad \pi \int_a^b f^2, \quad 2\pi \int_a^b x f(x) dx, \quad \int_a^b A(t) dt, \quad \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2} dx$$

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad y(x) = [S(x) + C] \exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x) \triangleq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$y(x) = \left\{ y_0 + \int_{x_0}^x Q(u) \exp \left[\int_{x_0}^u P(t) dt \right] du \right\} \exp \left[- \int_{x_0}^x P(t) dt \right]$$