ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, ΕΞΕΤΑΣΗ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2025
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΑΝ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων Φεβρουαρίου Ακ. Έτους 2024-2025

1. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, ή να δείξετε ότι δεν υπάρχουν:

   (α΄) *(1 μονάδα)*
   $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\sin^3 x}.$$

   (β΄) *(1 μονάδα)*
   $$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x^3}}.$$

   Λύση:

   (α΄) Παρατηρούμε πως διαφέρουν τα πλευρικά όρια. Πράγματι:
   $$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos^3 x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-3(\cos^2 x)(-\sin x)}{3(\sin^2 x)(\cos x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{\sin x}=\infty,$$
   αλλά
   $$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos^3 x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-3(\cos^2 x)(-\sin x)}{3(\sin^2 x)(\cos x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x}{\sin x}=-\infty.$$
   Άρα, το όριο δεν υπάρχει.

   (β΄)
   $$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{\log(1-\sin x)}{x^3}\right]=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\sin x)}{x^3}\right]=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{(1-\sin x)3x^2}\right]$$
   $$=\exp\left[\left(-\frac{1}{3}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\right]=\exp\left[\left(-\frac{1}{3}\right)\times 1\times\infty\right]=0.$$

2. **(Αόριστο ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα
   $$\int\frac{1}{10+e^x}\,dx.$$

   Λύση: Θέτουμε $u=10+e^x$, επομένως $du=e^x dx$, και
   $$\int\frac{1}{10+e^x}\,dx=\int\frac{du}{u(u-10)}.$$
   Αναζητούμε σταθερές A, B, τέτοιες ώστε
   $$\frac{A}{u}+\frac{B}{u-10}=\frac{1}{u(u-10)}\Leftrightarrow Au-10A+Bu=1\Leftrightarrow A=-B, A=-\frac{1}{10}.$$
   Επομένως,
   $$\int\frac{du}{u(u-10)}=\frac{1}{10}\int\frac{du}{u-10}-\frac{1}{10}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{10}\log|u-10|-\frac{1}{10}\log|u|+C=\frac{1}{10}\log\left|\frac{u-10}{u}\right|+C,$$
   και τελικά
   $$\int\frac{1}{10+e^x}\,dx=\frac{1}{10}\log\left|\frac{e^x}{10+e^x}\right|+C.$$

3. **(Ορισμένο Ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να δείξετε ότι
$$-50 \le \int_0^{10} x\cos(2x - \sin x)\,dx \le 50.$$

Λύση: Παρατηρούμε πως
$$|x\cos(2x-\sin x)| \le |x| \Rightarrow -|x| \le x\cos(2x-\sin x) \le |x|$$
$$\Rightarrow -\int_0^{10} |x|\,dx \le \int_0^{10} x\cos(2x-\sin x)\,dx \le \int_0^{10} |x|\,dx \Rightarrow -\int_0^{10} x\,dx \le \int_0^{10} x\cos(2x-\sin x) \le \int_0^{10} x\,dx$$
$$\Rightarrow -50 \le \int_0^{10} x\cos(2x-\sin x) \le 50.$$

4. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το ακόλουθο καταχρηστικό ολοκλήρωμα:
$$\int_0^\infty \frac{2x}{x^2+10}\,dx.$$

(β΄) *(1 μονάδα)* Να δείξετε ότι το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ είναι πεπερασμένο, δηλαδή δεν ισούται με $\pm\infty$.

Λύση:

(α΄)
$$\int_0^\infty \frac{2x}{x^2+10}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_0^h \frac{2x}{x^2+10}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_0^h \big(\log(x^2+10)\big)'\,dx$$
$$= \lim_{h\to\infty}\big[\log(h^2+10) - \log 10\big] = \infty.$$

(β΄) Η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν μπορεί να δοθεί χρησιμοποιώντας γνωστές μας συναρτήσεις (είναι η συνάρτηση του εκθετικού ολοκληρώματος). Έχουμε, όμως,
$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{e^{-x}}{x}\,dx \le \lim_{h\to\infty}\int_1^h e^{-x}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_1^h (-e^{-x})'\,dx = \lim_{h\to\infty}(1-e^{-h}) = 1.$$
(Παρατήρηση: το ζητούμενο όριο είναι δεδομένο ότι υπάρχει ή είναι ∞, γιατί αφορά γνησίως αύξουσα συνάρτηση.)

5. **(Διαφορικές Εξισώσεις)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης
$$z'(x) + \frac{1}{x}z(x) = x\log x.$$

(β΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε όλες τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης
$$y'(x) - \frac{1}{2x}y(x) = -\frac{x\log x}{2}y^3(x)$$
για τις οποίες $y(x) \neq 0$, και το πεδίο ορισμού είναι υποσύνολο του $(0,\infty)$. Μπορείτε να θέσετε $z(x) = \frac{1}{(y(x))^2}$.

Λύση:

(α΄) Η ΔΕ είναι γραμμική πρώτης τάξης, και παρατηρούμε πως
$$z'(x) + \frac{1}{x}z(x) = x\log x \Leftrightarrow xz'(x) + z(x) = x^2\log x \Leftrightarrow (xz(x))' = x^2\log x.$$

Όμως,

$$\int x^2 \log x\, dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \log x\, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Επομένως,

$$(xz(x))' = \left(\frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9}\right)' \Leftrightarrow z(x) = \frac{x^2}{3} \log x - \frac{x^2}{9} + \frac{C}{x}.$$

(β΄) Ακολουθώντας την υπόδειξη, έχουμε

$$z(x) = \frac{1}{y^2(x)} \Rightarrow z'(x) = -2\frac{y'(x)}{y^3(x)},$$

επομένως:

$$y'(x) - \frac{1}{2x} y(x) = -\frac{x \log x}{2} y^3(x) \Leftrightarrow \frac{y'(x)}{y^3(x)} - \frac{1}{2xy^2(x)} = -\frac{x \log x}{2} \Leftrightarrow -2\frac{y'(x)}{y^3(x)} + \frac{1}{xy^2(x)} = x \log x$$

$$\Leftrightarrow z'(x) + \frac{1}{x} z(x) = x \log x \Leftrightarrow \frac{1}{y^2(x)} = \frac{x^2}{3} \log x - \frac{x^2}{9} + \frac{C}{x} \Leftrightarrow y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^2}{9} + \frac{C}{x}}}.$$

6. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

(α΄) *(1 μονάδα)* $\dfrac{1}{1^3 + \cos 1} + \dfrac{2}{2^3 + \cos 2} + \dfrac{3}{3^3 + \cos 3} + \dfrac{4}{4^3 + \cos 4} + \dots$

(β΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$.

Λύση:

(α΄) Η δοσμένη σειρά είναι η $\sum \frac{n}{n^3 + \log n}$, που για μεγάλες τιμές συμπεριφέρεται όπως η $\sum \frac{1}{n^2}$. Θέτουμε, επομένως,

$$a_n = \frac{n}{n^3 + \cos n}, \quad b_n = \frac{1}{n^2},$$

και παρατηρούμε πως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^3 + \cos n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3 + \cos n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{\cos n}{n^3}} = 1,$$

επομένως, κατά τα γνωστά από το Κριτήριο της Σύγκρισης, αφού συγκλίνει η $\sum \frac{1}{n^2}$ θα συγκλίνει και η δοσμένη σειρά.

(β΄) Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο του Ολοκληρώματος. Η σειρά θα συγκλίνει αν και μόνο αν είναι πεπερασμένο το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\log x}}.$$

Όμως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία των καταχρηστικών ολοκληρωμάτων, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\log x}} &= \lim_{h\to\infty} \int_2^h \frac{dx}{x\sqrt{\log x}} = \lim_{h\to\infty} \int_2^h \left(2\sqrt{\log x}\right)' dx = \lim_{h\to\infty} \left[2\sqrt{\log x}\right]_2^h \\ &= \lim_{h\to\infty} \left[2\sqrt{\log h} - 2\sqrt{\log 2}\right] = \infty, \end{aligned}$$

επομένως η δοσμένη σειρά αποκλίνει.