

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις.
2. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ότι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Ορια)** (1+1 μονάδες) Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, ή να δείξετε ότι δεν υπάρχουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\sin^3 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{(x^{-3})}.$$

2. **(Αόριστο ολοκλήρωμα)** (1 μονάδα) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{10 + e^x} dx$.

3. **(Ορισμένο Ολοκλήρωμα)** (1 μονάδα) Να δείξετε ότι

$$-50 \leq \int_0^{10} x \cos(2x - \sin x) dx \leq 50.$$

4. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)**

(α') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 10} dx$.

(β') (1 μονάδα) Να δείξετε ότι το $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ είναι πεπερασμένο, δηλαδή δεν ισούται με $\pm\infty$.

5. **(Διαφορικές Εξισώσεις)**

(α') (1 μονάδα) Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $z'(x) + \frac{1}{x}z(x) = x \log x$.

(β') (1 μονάδα) Να βρείτε όλες τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x) - \frac{1}{2x}y(x) = -\frac{x \log x}{2}y^3(x)$$

για τις οποίες $y(x) \neq 0$, και το πεδίο ορισμού είναι υποσύνολο του $(0, \infty)$. Μπορείτε να θέσετε $z(x) = (y(x))^{-2}$.

6. (Σειρές) Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

(α') (1 μονάδα) $\frac{1}{1^3 + \cos 1} + \frac{2}{2^3 + \cos 2} + \frac{3}{3^3 + \cos 3} + \frac{4}{4^3 + \cos 4} + \dots$

(β') (1 μονάδα) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x) = \cos x \cos y + \sin x \sin y, \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right), & \cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right), & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)], \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)], \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0 \exists X \in \mathbb{R} : x > X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists X \in \mathbb{R} : x < X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon, \quad \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists X \in \mathbb{R} : x > X \Rightarrow f(x) > M, \quad \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|, \quad |f(y) - f(x)| \leq C|y - x|$$

$$\begin{aligned} (\arcsin y)' &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & (\arccos y)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & (\arctan y)' &= \frac{1}{1+y^2} \\ f(\theta x_0 + (1-\theta)x_1) &< \theta f(x_0) + (1-\theta)f(x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(f, P) &\triangleq \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}), & U(f, P) &\triangleq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}), & \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right\} \\ \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta) d\theta, & \pi \int_a^b f^2, & 2\pi \int_a^b x f(x) dx, & \int_a^b A(t) dt, & \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2} dx \\ y' + P(x)y &= Q(x), & y(x) &= [S(x) + C] \exp[-R(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \left\{ y_0 + \int_{x_0}^x Q(u) \exp \left[\int_{x_0}^u P(t) dt \right] du \right\} \exp \left[- \int_{x_0}^x P(t) dt \right] \\ E_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^{x_0} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt, & |E_n(x)| &\leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(k), \quad t_n = \int_1^n f(x) dx$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k, \quad s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k, \quad 0 < (-1)^n (S - s_n) < a_{n+1}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, ΕΞΕΤΑΣΗ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2025
 ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
 ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
 ΑΝ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων Φεβρουαρίου Ακ. Έτους 2024-2025

1. **(Ορια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, ή να δείξετε ότι δεν υπάρχουν:

(α') (1 μονάδα)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\sin^3 x}.$$

(β') (1 μονάδα)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x^3}}.$$

Λύση:

(α') Παρατηρούμε πως διαφέρουν τα πλευρικά όρια. Πράγματι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^3 x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3(\cos^2 x)(-\sin x)}{3(\sin^2 x)(\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty,$$

αλλά

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos^3 x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3(\cos^2 x)(-\sin x)}{3(\sin^2 x)(\cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty.$$

Άρα, το όριο δεν υπάρχει.

(β')

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x^3}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \left[\frac{\log(1 - \sin x)}{x^3} \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - \sin x)}{x^3} \right] = \exp \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{(1 - \sin x)3x^2} \right] \\ &= \exp \left[\left(-\frac{1}{3} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{1 - \sin x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \right] = \exp \left[\left(-\frac{1}{3} \right) \times 1 \times \infty \right] = 0. \end{aligned}$$

2. **(Αόριστο ολοκλήρωμα)** (1 μονάδα) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{10 + e^x} dx.$$

Λύση: Θέτουμε $u = 10 + e^x$, επομένως $du = e^x dx$, και

$$\int \frac{1}{10 + e^x} dx = \int \frac{du}{u(u - 10)}.$$

Αναζητούμε σταθερές A, B , τέτοιες ώστε

$$\frac{A}{u} + \frac{B}{u - 10} = \frac{1}{u(u - 10)} \Leftrightarrow Au - 10A + Bu = 1 \Leftrightarrow A = -B, A = -\frac{1}{10}.$$

Επομένως,

$$\int \frac{du}{u(u - 10)} = \frac{1}{10} \int \frac{du}{u - 10} - \frac{1}{10} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{10} \log |u - 10| - \frac{1}{10} \log |u| + C = \frac{1}{10} \log \left| \frac{u - 10}{u} \right| + C,$$

και τελικά

$$\int \frac{1}{10 + e^x} dx = \frac{1}{10} \log \left| \frac{e^x}{10 + e^x} \right| + C.$$

3. **(Ορισμένο Ολοκλήρωμα)** (1 μονάδα) Να δείξετε ότι

$$-50 \leq \int_0^{10} x \cos(2x - \sin x) dx \leq 50.$$

Λύση: Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} |x \cos(2x - \sin x)| &\leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \cos(2x - \sin x) \leq |x| \\ \Rightarrow -\int_0^{10} |x| dx &\leq \int_0^{10} x \cos(2x - \sin x) dx \leq \int_0^{10} |x| dx \Rightarrow -\int_0^{10} x dx \leq \int_0^{10} x \cos(2x - \sin x) \leq \int_0^{10} x dx \\ &\Rightarrow -50 \leq \int_0^{10} x \cos(2x - \sin x) \leq 50. \end{aligned}$$

4. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)**

(α') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε το ακόλουθο καταχρηστικό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 10} dx.$$

(β') (1 μονάδα) Να δείξετε ότι το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ είναι πεπερασμένο, δηλαδή δεν ισούται με $\pm\infty$.

Λύση:

(α')

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 10} dx &= \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^h \frac{2x}{x^2 + 10} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^h (\log(x^2 + 10))' dx \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} [\log(h^2 + 10) - \log 10] = \infty. \end{aligned}$$

(β') Η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν μπορεί να δοθεί χρησιμοποιώντας γνωστές μας συναρτήσεις (είναι η συνάρτηση του εκθετικού ολοκληρώματος). Έχουμε, όμως,

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_1^h \frac{e^{-x}}{x} dx \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \int_1^h e^{-x} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_1^h (-e^{-x})' dx = \lim_{h \rightarrow \infty} (1 - e^{-h}) = 1.$$

(Παρατήρηση: το ζητούμενο όριο είναι δεδομένο ότι υπάρχει ή είναι ∞ , γιατί αφορά γνησίως αύξουσα συνάρτηση.)

5. **(Διαφορικές Εξισώσεις)**

(α') (1 μονάδα) Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$z'(x) + \frac{1}{x}z(x) = x \log x.$$

(β') (1 μονάδα) Να βρείτε όλες τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x) - \frac{1}{2x}y(x) = -\frac{x \log x}{2}y^3(x)$$

για τις οποίες $y(x) \neq 0$, και το πεδίο ορισμού είναι υποσύνολο του $(0, \infty)$. Μπορείτε να θέσετε $z(x) = \frac{1}{(y(x))^2}$.

Λύση:

(α') Η ΔΕ είναι γραμμική πρώτης τάξης, και παρατηρούμε πως

$$z'(x) + \frac{1}{x}z(x) = x \log x \Leftrightarrow xz'(x) + z(x) = x^2 \log x \Leftrightarrow (xz(x))' = x^2 \log x.$$

Όμως,

$$\int x^2 \log x \, dx = \int \left(\frac{x^3}{3} \right)' \log x \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Επομένως,

$$(xz(x))' = \left(\frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9} \right)' \Leftrightarrow z(x) = \frac{x^2}{3} \log x - \frac{x^2}{9} + \frac{C}{x}.$$

(β') Ακολουθώντας την υπόδειξη, έχουμε

$$z(x) = \frac{1}{y^2(x)} \Rightarrow z'(x) = -2 \frac{y'(x)}{y^3(x)},$$

επομένως:

$$\begin{aligned} y'(x) - \frac{1}{2x} y(x) &= -\frac{x \log x}{2} y^3(x) \Leftrightarrow \frac{y'(x)}{y^3(x)} - \frac{1}{2xy^2(x)} = -\frac{x \log x}{2} \Leftrightarrow -2 \frac{y'(x)}{y^3(x)} + \frac{1}{xy^2(x)} = x \log x \\ \Leftrightarrow z'(x) + \frac{1}{x} z(x) &= x \log x \Leftrightarrow \frac{1}{y^2(x)} = \frac{x^2}{3} \log x - \frac{x^2}{9} + \frac{C}{x} \Leftrightarrow y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^2}{9} + \frac{C}{x}}}. \end{aligned}$$

6. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

(α') (1 μονάδα) $\frac{1}{1^3 + \cos 1} + \frac{2}{2^3 + \cos 2} + \frac{3}{3^3 + \cos 3} + \frac{4}{4^3 + \cos 4} + \dots$

(β') (1 μονάδα) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\log n}}.$

Λύση:

(α') Η δοσμένη σειρά είναι η $\sum \frac{n}{n^3 + \log n}$, που για μεγάλες τιμές συμπεριφέρεται όπως η $\sum \frac{1}{n^2}$. Θέτουμε, επομένως,

$$a_n = \frac{n}{n^3 + \cos n}, \quad b_n = \frac{1}{n^2},$$

και παρατηρούμε πως

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^3 + \cos n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + \cos n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\cos n}{n^3}} = 1,$$

επομένως, κατά τα γνωστά από το Κριτήριο της Σύγκρισης, αφού συγκλίνει η $\sum \frac{1}{n^2}$ θα συγκλίνει και η δοσμένη σειρά.

(β') Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο του Ολοκληρώματος. Η σειρά θα συγκλίνει αν και μόνο αν είναι πεπερασμένο το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\log x}}.$$

Όμως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία των καταχρηστικών ολοκληρωμάτων, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\log x}} &= \lim_{h \rightarrow \infty} \int_2^h \frac{dx}{x \sqrt{\log x}} = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_2^h \left(2\sqrt{\log x} \right)' dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \left[2\sqrt{\log x} \right]_2^h \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left[2\sqrt{\log h} - 2\sqrt{\log 2} \right] = \infty, \end{aligned}$$

επομένως η δοσμένη σειρά αποκλίνει.

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις.
2. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ότι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός, έξυπνων ρολογιών και συναφών συσκευών. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Η εξέταση είναι με κλειστά βιβλία. Απαγορεύεται να χρησιμοποιήσετε οτιδήποτε πέραν των θεμάτων και των τετράδιων των λύσεων.
7. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
8. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
9. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
10. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
11. Σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα υπάρξει συμπληρωματική εξέταση και θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. (Πλευρικό Όριο) (2 μονάδες) Δίνεται το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt}{x^a},$$

όπου a είναι μια πραγματική παράμετρος. Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου, εφόσον υπάρχει, εξετάζοντας περιπτώσεις για την τιμή της παραμέτρου a .

2. (Ορισμένο Ολοκλήρωμα) (1 μονάδα) Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{100 + \cos(x^2 \cos x)} dx$.

3. Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα

(α') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\log x}{x} \right) dx$. (Υπόδειξη: μπορείτε να σπάσετε το ολοκλήρωμα σε δύο μέρη και να τα υπολογίσετε χωριστά.)

(β') (1.5 μονάδα) Να υπολογίσετε την τιμή του καταχρηστικού ολοκληρώματος $\int_0^\infty \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\log x}{x} \right) dx$, ή να αποδείξετε ότι το καταχρηστικό ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

4. **(Διαφορική Εξίσωση)** Δίνεται η διαφορική εξίσωση (ΔΕ)

$$y'(x)(\cos x)^2 y(x) \sqrt{1 - y^2(x)} = 1, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

(α') (1.5 μονάδα) Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ, στη μορφή μιας μη διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιούν όλες οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την άνω διαφορική εξίσωση σε διαστήματα που ανήκουν στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, και μόνο αυτές.

(β') (0.5 μονάδα) Να βρείτε την λύση της ΔΕ που διέρχεται από το σημείο $(0, \frac{1}{2})$.

(γ') (0.5 μονάδα, δύσκολο) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του προηγούμενου σκέλους;

5. **(Σειρές)** Να αποφανθείτε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν, και αν συγκλίνουν να υπολογίσετε την πραγματική τους τιμή.

(α') (1 μονάδα) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(8 + \log(n+1))}$. (Υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Κριτήριο του Ολοκληρώματος.)

(β') (1 μονάδα) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. (Υπόδειξη: υπολογίστε τα πρώτα 3-4 μερικά αθροίσματα.)

Τυπολόγιο

$$\begin{aligned} \cos(y-x) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y, \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad \cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad \cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)], \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)], \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \\ |f(x) - f(x_0)| &\leq C|x - x_0|, \quad |f(y) - f(x)| \leq C|y - x| \\ (\arcsin y)' &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2} \\ f(\theta x_0 + (1-\theta)x_1) &< \theta f(x_0) + (1-\theta)f(x_1) \\ L(f, P) &\triangleq \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}), \quad U(f, P) \triangleq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}), \quad \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right\} \\ \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta) d\theta, \quad \pi \int_a^b f^2, \quad 2\pi \int_a^b x f(x) dx, \quad \int_a^b A(t) dt, \quad \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2} dx \\ y' + P(x)y &= Q(x), \quad y(x) = [S(x) + C] \exp[-R(x)] \\ y(x) &= \left\{ y_0 + \int_{x_0}^x Q(u) \exp\left[\int_{x_0}^u P(t) dt\right] du \right\} \exp\left[-\int_{x_0}^x P(t) dt\right] \\ E_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^{x_0} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt, \quad |E_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \\ s_n &= \sum_{k=1}^n f(k), \quad t_n = \int_1^n f(x) dx \\ S &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k, \quad s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k, \quad 0 < (-1)^n (S - s_n) < a_{n+1} \end{aligned}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2025
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΑΝ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων Σεπτεμβρίου Ακ. Έτους 2024-2025

1. (Πλευρικό Όριο) (2 μονάδες) Δίνεται το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt}{x^a},$$

όπου a είναι μια πραγματική παράμετρος. Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου, εφόσον υπάρχει, εξετάζοντας περιπτώσεις για την τιμή της παραμέτρου a .

Λύση: Αρχικά παρατηρούμε πως

$$0 \leq \int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt \leq \int_0^x \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

και επομένως από το Κριτήριο της Παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt = 0.$$

Λαμβάνουμε περιπτώσεις:

(α') Αν $a = 0$, τότε από το άνω όριο προκύπτει πως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt}{x^a} = 0.$$

(β') Αν $a < 0$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt}{x^a} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{|a|} \right) \times \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt \right) = 0 \times 0 = 0.$$

(γ') Αν $a > 0$, τότε και ο αριθμητής και ο παρονομαστής τείνουν στο μηδέν, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του L'Hôpital, επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} e^{-x}}{a x^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} x^{\frac{3}{2}-a} e^{-x}.$$

Σε αυτή την περίπτωση:

i. Αν $a > \frac{3}{2}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} x^{\frac{3}{2}-a} e^{-x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} x^{\frac{3}{2}-a} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} \right) = \infty \times 1 = \infty.$$

ii. Αν $a = \frac{3}{2}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} x^{\frac{3}{2}-a} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3} e^{-x} = \frac{2}{3}.$$

iii. Αν $a < \frac{3}{2}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{a} x^{\frac{3}{2}-a} e^{-x} = \frac{1}{a} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{3}{2}-a} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} \right) = 0 \times 1 = 0.$$

Συνοψίζοντας,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{t} e^{-t} dt}{x^a} = \begin{cases} 0, & a < \frac{3}{2}, \\ \frac{2}{3}, & a = \frac{3}{2}, \\ \infty, & a > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

2. **(Ορισμένο Ολοκλήρωμα)** (1 μονάδα) Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{100 + \cos(x^2 \cos x)} dx$.

Λύση: Παρατηρούμε πως η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{100 + \cos(x^2 \cos x)}$ είναι περιττή:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{100 + \cos((-x)^2 \cos(-x))} = -\frac{e^x - e^{-x}}{100 + \cos(x^2 \cos x)}.$$

Επίσης, μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{100 + \cos(x^2 \cos x)} dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx.$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $t = -x$ στο πρώτο ολοκλήρωμα, παρατηρούμε πως

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = -\int_1^0 f(-t) dt = -\int_0^1 f(t) dt,$$

και τελικά προκύπτει πως το δοσμένο ολοκλήρωμα ισούται με 0.

3. Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα

- (α') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\log x}{x} \right) dx$. (Υπόδειξη: μπορείτε να σπάσετε το ολοκλήρωμα σε δύο μέρη και να τα υπολογίσετε χωριστά.)

- (β') (1.5 μονάδα) Να υπολογίσετε την τιμή του καταχρηστικού ολοκληρώματος $\int_0^\infty \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\log x}{x} \right) dx$, ή να αποδείξετε ότι το καταχρηστικό ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

Λύση:

- (α') Αρχικά παρατηρούμε πως

$$\int \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\log x}{x} \right) dx = \int \frac{x}{e^x} dx - \int \frac{\log x}{x} dx.$$

Για τα δύο ολοκληρώματα, έχουμε

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx = \int x (-e^{-x})' dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C,$$

και

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int (\log x)' \log x dx = \int \left(\frac{(\log x)^2}{2} \right)' dx = \frac{(\log x)^2}{2} + C,$$

επομένως

$$\int \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\log x}{x} \right) dx = -x e^{-x} - e^{-x} - \frac{(\log x)^2}{2} + C.$$

- (β') Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό και γιατί η ολοκληρωτέα συνάρτηση απειρίζεται καθώς το x τείνει στο αριστερό άκρο ολοκλήρωσης 0 (όπως προκύπτει με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital για τον όρο $\frac{\log x}{x}$), και διότι το άλλο άκρο ολοκλήρωσης είναι το ∞ . Επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\log x}{x} \right) dx = \int_{0+}^1 \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\log x}{x} \right) dx + \int_1^\infty \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\log x}{x} \right) dx.$$

Σχετικά με το πρώτο καταχρηστικό ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο σκέλος,

$$\int_{0+}^1 \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\log x}{x} \right) dx = \lim_{h \rightarrow 0+} \left[-x e^{-x} - e^{-x} - \frac{(\log x)^2}{2} \right]_h^1 = \infty,$$

αφού $\log x \rightarrow -\infty$ καθώς $x \rightarrow 0$.

Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα, ανάλογα έχουμε

$$\int_1^\infty \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\log x}{x} \right) dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \left[-x e^{-x} - e^{-x} - \frac{(\log x)^2}{2} \right]_1^h = -\infty,$$

αφού $\log x \rightarrow \infty$ καθώς $x \rightarrow \infty$ και επίσης $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = 0$ καθώς $x \rightarrow \infty$, όπως προκύπτει με χρήση του Κριτηρίου του L'Hôpital.

Επομένως, προκύπτει απροσδιοριστία $\infty - \infty$ και εν τέλει το καταχρηστικό ολοκλήρωμα δεν ορίζεται.

4. **(Διαφορική Εξίσωση)** Δίνεται η διαφορική εξίσωση (ΔΕ)

$$y'(x)(\cos x)^2 y(x) \sqrt{1 - y^2(x)} = 1,$$

όπου $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(α') (1.5 μονάδα) Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ, στη μορφή μιας μη διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιούν όλες οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την άνω διαφορική εξίσωση σε διαστήματα που ανήκουν στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, και μόνο αυτές.

(β') (0.5 μονάδα) Να βρείτε την λύση της ΔΕ που διέρχεται από το σημείο $(0, \frac{1}{2})$.

(γ') (0.5 μονάδα, δύσκολο) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του προηγούμενου σκέλους;

Λύση:

(α') Η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} y'(x)(\cos x)^2 y(x) \sqrt{1 - y^2(x)} = 1 &\Leftrightarrow y \sqrt{1 - y^2} dy = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ &\Leftrightarrow \int y \sqrt{1 - y^2} dy = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}(1 - (y(x))^2)^{\frac{3}{2}} = \tan x + C, \end{aligned}$$

και επομένως οι λύσεις της ΔΕ είναι οι συναρτήσεις $y(x)$ που ικανοποιούν την άνω μη διαφορική εξίσωση σε κάποιο υποδιάστημα του $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ για κάποιο C .

(β') Καταρχάς, παρατηρήστε ότι το αριστερό σκέλος της εξίσωσης που βρήκαμε λαμβάνει τιμές στο διάστημα $(-\frac{1}{3}, 0)$, ενώ, σε περίπτωση που το $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ το δεξί σκέλος λαμβάνει τιμές σε όλο το $\mathbb{R}$. Επομένως, δεν μπορεί το πεδίο ορισμού της $y(x)$ να είναι όλο το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Σχετικά με το ερώτημα, θέτουμε $x = 0$ και $y(x) = \frac{1}{2}$ στην εξίσωση που βρήκαμε:

$$-\frac{1}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} = \tan 0 + C \Rightarrow C = -\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

(γ') Παρατηρήστε ότι από την εξίσωση που βρήκαμε στο πρώτο σκέλος, καθώς μεταβάλλεται η τιμή του x , μεταβάλλεται και η τιμή της $y(x)$, μεταξύ των δύο ορίων $y(x) = 0$ και $y(x) = 1$. Επομένως, το x μεταβάλλεται μεταξύ των ορίων x_0 και x_1 όπου

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}(1 - 1^2)^{\frac{3}{2}} &= \tan x_1 - \frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow x_1 = \arctan \frac{\sqrt{3}}{8}, \\ -\frac{1}{3}(1 - 0^2)^{\frac{3}{2}} &= \tan x_0 - \frac{\sqrt{3}}{8} \Rightarrow x_0 = \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{3} \right), \end{aligned}$$

και το πεδίο ορισμού είναι το $(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{8})$.

5. **(Σειρές)** Να αποφανθείτε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν, και αν συγκλίνουν να υπολογίσετε την πραγματική τους τιμή.

(α') (1 μονάδα) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(8 + \log(n+1))}$. (Υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Κριτήριο του Ολοκληρώματος.)

(β') (1 μονάδα) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. (Υπόδειξη: υπολογίστε τα πρώτα 3-4 μερικά αθροίσματα.)

Λύση:

(α') Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο του Ολοκληρώματος. Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)(8+\log(x+1))} &= \int_1^\infty \frac{(8+\log(x+1))'}{8+\log(x+1)} dx = \int_1^\infty (\log(8+\log(x+1)))' dx \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \int_1^h (\log(8+\log(x+1)))' dx \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} [(\log(8+\log(h+1)) - \log(8+\log 9))] = \infty, \end{aligned}$$

επομένως η σειρά αποκλίνει.

(β') Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο της Σύγκρισης στο Όριο. Έστω $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ και $b_n = \frac{1}{n^2}$. Παρατηρούμε πως

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1,$$

επομένως αφού συγκλίνει η $\sum b_n$, θα συγκλίνει και η δοσμένη, $\sum a_n$.

Σχετικά με την τιμή που λαμβάνει η σειρά, παρατηρούμε πως τα μερικά αθροίσματα ισούνται με

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}, \\ s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{2}{3}, \\ s_3 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

και επειδή γενικά

$$\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+1)+1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

τελικά προκύπτει πως $s_n = \frac{n}{n+1}$ και τελικά η σειρά συγκλίνει στη μονάδα. Εναλλακτικά, παρατηρούμε πως

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \Leftrightarrow 1 = A + An + Bn \Leftrightarrow A = 1, B = -1,$$

επομένως

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{k+1} \right] = 1. \end{aligned}$$