

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις.
2. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ότι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όρια)** (2 μονάδες) Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - e^{-x})}{\log(\cos x)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan \left(\sqrt{x + x^2} - \sqrt{x} \right).$$

2. **(Αόριστα ολοκληρώματα)** (2 μονάδες)

(α') Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx, \quad \int x^2 (\log x)^2 dx.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, μπορείτε να δοκιμάσετε την αντικατάσταση $x = \cos \theta$ και για το δεύτερο ολοκλήρωμα μπορείτε να δοκιμάσετε διπλή παραγοντική ολοκλήρωση.

3. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα)**

(α') (0.5 μονάδα) Να προσδιορίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \log |x - 1| dx.$$

(β') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε την τιμή του καταχρηστικού ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \log |x - 1| dx.$$

4. (Διαφορικές εξισώσεις)

(α') (1 μονάδα) Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y'(x) + (1 + \tan x)y(x) = 10 \cos x$$

στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Να βρείτε τη γενική της λύση.

(β') (1.5 μονάδα) Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y'(x) = e^{y(x)}.$$

Να βρείτε τη γενική της λύση, και να δείξετε ότι όλες οι ειδικές λύσεις τείνουν στο ∞ όταν το x τείνει πλευρικά σε κάποια πεπερασμένη τιμή.

5. (Σειρές) (2 μονάδες) Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή όχι:

$$\sum \frac{n^4 + e^n}{(2n)!}, \quad \sum \frac{\sqrt{n+10} - \sqrt{n}}{n^2 + \log n}.$$

Τυπολόγιο

$$\begin{aligned}\cos(y-x) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y, \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad \cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad \cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)], \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)], \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon, & \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \\ \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon, & \forall \epsilon > 0 \exists X \in \mathbb{R} : x > X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \\ \forall \epsilon > 0 \exists X \in \mathbb{R} : x < X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon, & \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) > M. \\ \forall M \in \mathbb{R} \exists X \in \mathbb{R} : x > X \Rightarrow f(x) > M, & \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq C|x - x_0|, \quad |f(y) - f(x)| \leq C|y - x| \\ (\arcsin y)' &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2} \\ f(\theta x_0 + (1-\theta)x_1) &< \theta f(x_0) + (1-\theta)f(x_1) \\ L(f, P) &\triangleq \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}), \quad U(f, P) \triangleq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}), \quad \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right\} \\ \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta) d\theta, \quad \pi \int_a^b f^2, \quad 2\pi \int_a^b x f(x) dx, &\int_a^b A(t) dt, \quad \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2} dx \\ y' + P(x)y &= Q(x), \quad y(x) = [S(x) + C] \exp[-R(x)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{n,a}(x) &\triangleq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ y(x) &= \left\{ y_0 + \int_{x_0}^x Q(u) \exp \left[\int_{x_0}^u P(t) dt \right] du \right\} \exp \left[- \int_{x_0}^x P(t) dt \right] \\ E_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^{x_0} (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt, \quad |E_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \\ s_n &= \sum_{k=1}^n f(k), \quad t_n = \int_1^n f(x) dx \\ S &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k, \quad s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k, \quad 0 < (-1)^n (S - s_n) < a_{n+1} \\ A_{\parallel} &= \left[\frac{A \cdot B}{\|B\|^2} \right] B, \quad A_{\perp} = A - A_{\parallel}, \quad (x - x_0, y - y_0)(A, B) = 0 \Leftrightarrow Ax + By = Ax_0 + By_0 \\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} &= 0, \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0, \\ A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) &= 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0 \\ y^2 = 4px, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)} &= 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} u = (x-x_0) \cos \theta + (y-y_0) \sin \theta, \\ v = -(x-x_0) \sin \theta + (y-y_0) \cos \theta \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + u \cos \theta - v \sin \theta, \\ y = y_0 + u \sin \theta + v \cos \theta \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0+u \\ y_0+v \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \frac{A-C}{B} \\ \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} &= x_0 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_0 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_0 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = x_0 y_1 - x_1 y_0.\end{aligned}$$

Λύσεις Εξετάσεων Φεβρουαρίου Ακ. Έτους 2022-2023

1. (Ορια)

(α') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + \cos x}{\pi^x + x^2}.$$

(β') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + \sin x}{11^x + x^2}.$$

(γ') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x}{x^2},$$

όπου η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $f'(0) = 3$. ΔΕΝ δίνεται ότι η $f'(x)$ είναι συνεχής.

(δ') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x}{x^2},$$

όπου η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $f'(0) = \pi$. ΔΕΝ δίνεται ότι η $f'(x)$ είναι συνεχής.

(ε') (1.5 μονάδα) Δίνεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 1}{2x + 4} - (ax + b) \right] = 3,$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές των παραμέτρων a, b .

(ζ') (1.5 μονάδα) Δίνεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 4}{x + 5} - (ax + b) \right] = 2,$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές των παραμέτρων a, b .

(η') (1 μονάδα) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (2 + \sin(t^2)) dt}{x^2}.$$

Λύση:

(α') Παρατηρούμε πως

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + \cos x}{\pi^x + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^x + \frac{\cos x}{\pi^x}}{1 + \frac{x^2}{\pi^x}} = \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0.$$

Στα άνω χρησιμοποιήσαμε το ότι με διπλή χρήση του Κανόνα του L'Hôpital έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\pi^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{(\log \pi) \pi^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(\log \pi)^2 \pi^x} = 0.$$

Επίσης, χρησιμοποιήσαμε το ότι επειδή $\frac{2}{\pi} < 1$ το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^x = 0$. Τέλος, χρησιμοποιήσαμε το ότι η $\frac{\cos x}{\pi^x}$ τείνει επίσης στο 0, ως γινόμενο μηδενικής συνάρτησης επί φραγμένη συνάρτηση.

(β') Παρατηρούμε πως

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + \sin x}{11^x + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{11}\right)^x + \frac{\sin x}{11^x}}{1 + \frac{x^2}{11^x}} = \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0.$$

Στα άνω χρησιμοποιήσαμε το ότι με διπλή χρήση του Κανόνα του L'Hôpital έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{11^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{(\log 11) 11^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(\log 11)^2 11^x} = 0.$$

Επίσης, χρησιμοποιήσαμε το ότι επειδή $\frac{2}{11} < 1$ το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{11}\right)^x = 0$. Τέλος, χρησιμοποιήσαμε το ότι η $\frac{\sin x}{11^x}$ τείνει επίσης στο 0, ως γινόμενο μηδενικής συνάρτησης επί φραγμένη συνάρτησης.

(γ') Παρατηρούμε πως

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = f'(0) \times 1 = 3.$$

Αν μας δινόταν ότι η $f'(x)$ είναι συνεχής, θα μπορούσαμε να γράψουμε, με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \sin x + f(x) \cos x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{2} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \\ &= \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{2} f'(0) = f'(0) = 3, \end{aligned}$$

αλλά με βάση τα δεδομένα η λύση αυτή είναι λάθος.

(δ') Παρατηρούμε πως

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = f'(0) \times 1 = \pi.$$

Αν μας δινόταν ότι η $f'(x)$ είναι συνεχής, θα μπορούσαμε να γράψουμε, με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \sin x + f(x) \cos x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{2} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \\ &= \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{2} f'(0) = f'(0) = \pi, \end{aligned}$$

αλλά με βάση τα δεδομένα η λύση αυτή είναι λάθος.

(ε') Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 1}{2x + 4} - (ax + b) \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - (ax + b)(2x + 4)}{2x + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - 2ax^2 - 2bx - 4ax - 4b}{2x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - 2a) + (-2b - 4a)x + (1 - 4b)}{2x + 4}. \end{aligned}$$

Σε περίπτωση που $1 - 2a \neq 0$, το όριο θα πρέπει να ισούται με $\pm\infty$, διότι το πολυώνυμο του αριθμητή είναι μεγαλύτερης τάξης από το πολυώνυμο του παρονομαστή. Επομένως, έχουμε $1 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. Ακολουθώντας, παρατηρούμε πως αν $-2b - 4a = 0$, τότε το όριο θα πρέπει να είναι μηδέν. Επομένως, θα πρέπει $-2b - 4 \neq 0$, οπότε το όριο θα ισούται με το πηλίκο των μεγιστοβάθμιων όρων, επομένως

$$\frac{-2b - 4a}{2} = 3 \Leftrightarrow \frac{-2b - 2}{2} = 3 \Leftrightarrow b = -4,$$

και τελικά έχουμε $a = \frac{1}{2}, b = -4$.

(ζ') Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 4}{x + 5} - (ax + b) \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4 - (ax + b)(x + 5)}{x + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4 - ax^2 - bx - 5ax - 5b}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - a) + (-b - 5a)x + (4 - 5b)}{x + 5}. \end{aligned}$$

Σε περίπτωση που $1 - a \neq 0$, το όριο θα πρέπει να ισούται με $\pm\infty$, διότι το πολυώνυμο του αριθμητή είναι μεγαλύτερης τάξης από το πολυώνυμο του παρονομαστή. Επομένως, έχουμε $1 - a = 0 \Leftrightarrow a = 1$. Ακολουθώντας, παρατηρούμε πως αν $-b - 5a = 0$, τότε το όριο θα πρέπει να είναι μηδέν. Επομένως, θα πρέπει $-b - 5a \neq 0$, οπότε το όριο θα ισούται με το πηλίκο των μεγιστοβάθμιων όρων, επομένως

$$\frac{-b - 5a}{1} = 2 \Leftrightarrow b = -7,$$

και τελικά έχουμε $a = 1, b = -7$.

(ζ') Παρατηρούμε πως

$$\int_0^x (2 + \sin(t^2)) dt \geq \int_0^x 1 dt = x,$$

επομένως ο αριθμητής του δοσμένου ορίου τείνει στο άπειρο, όπως και ο παρονομαστής. Μπορούμε επομένως να εφαρμόσουμε το Κριτήριο του L'Hôpital, επομένως

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x (2 + \sin(t^2)) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin(x^2)}{2x} = 0,$$

καθώς η συνάρτηση του αριθμητή είναι φραγμένη.

2. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)** (1.5 μονάδα) Να υπολογίσετε το ακόλουθο καταχρηστικό ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx.$$

Λύση: Αρχικά παρατηρούμε πως

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx = \int (\arctan x)' e^{\arctan x} dx = \int (e^{\arctan x})' dx = e^{\arctan x} + C,$$

επομένως

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx &= \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^h \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx + \lim_{h \rightarrow -\infty} \int_h^0 \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} [e^{\arctan x}]_0^h + \lim_{h \rightarrow -\infty} [e^{\arctan x}]_h^0 \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - e^0 + e^0 - e^{-\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

3. **(Διαφορικές Εξισώσεις)** Να βρείτε τις γενικές λύσεις των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων

(α') (1 μονάδα)

$$y'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}(y(x)-1) = 0.$$

(β') (1 μονάδα)

$$y'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}(y(x)-3) = 0.$$

(γ') (1 μονάδα)

$$y'(x) = x^2 e^{x-y(x)}.$$

Λύση:

(α') Παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική πρώτης τάξης και πως:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{x^2+2} + C.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} y'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}(y(x)-1) = 0 &\Leftrightarrow y'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}y(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \\ &\Leftrightarrow e^{\sqrt{x^2+2}}y'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}e^{\sqrt{x^2+2}}y(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}e^{\sqrt{x^2+2}} \\ &\Leftrightarrow (y(x)e^{\sqrt{x^2+2}})' = (e^{\sqrt{x^2+2}})' \Leftrightarrow y(x) = 1 + Ce^{-\sqrt{x^2+2}}. \end{aligned}$$

(β') Παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική πρώτης τάξης και πως:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} = \sqrt{x^2+5} + C.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} y'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}(y(x)-3) = 0 &\Leftrightarrow y'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}y(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}} \\ &\Leftrightarrow e^{\sqrt{x^2+5}}y'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}e^{\sqrt{x^2+5}}y(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}e^{\sqrt{x^2+5}} \\ &\Leftrightarrow (y(x)e^{\sqrt{x^2+5}})' = (3e^{\sqrt{x^2+5}})' \Leftrightarrow y(x) = 3 + Ce^{-\sqrt{x^2+5}}. \end{aligned}$$

(γ') Παρατηρούμε πως η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$y'(x) = x^2 e^{x-y(x)} \Leftrightarrow e^{y(x)} dy = x^2 e^x dx \Leftrightarrow \int e^y dy = \int x^2 e^x dx.$$

Όμως,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x(e^x)' dx = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C,$$

επομένως

$$\int e^y dy = \int x^2 e^x dx \Leftrightarrow e^{y(x)} = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C \Leftrightarrow y(x) = \log((x^2 - 2x + 2)e^x + C).$$

4. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

(α') (1 μονάδα) $\sum \frac{n^2}{e^n + \pi}.$

(β') (1 μονάδα) $\sum \frac{n^2}{10^n + 5}.$

(γ') (1 μονάδα) $\sum \frac{\cos(1/n^2)}{n^2 + (\log n)^2}.$

Λύση:

(α') Θέτουμε $a_n = \frac{n^2}{e^n + \pi}$ και παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{e^{n+1} + \pi}}{\frac{n^2}{e^n + \pi}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(e^n + \pi)(n+1)^2}{(e^{n+1} + \pi)n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{1 + \frac{\pi}{e^n}}{e + \frac{\pi}{e^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\pi}{e^n}}{e + \frac{\pi}{e^n}} = 1 \cdot \frac{1}{e} < 1, \end{aligned}$$

επομένως, από το Κριτήριο του Λόγου, η σειρά συγκλίνει.

(β') Θέτουμε $a_n = \frac{n^2}{10^n + 5}$ και παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{10^{n+1} + 5}}{\frac{n^2}{10^n + 5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(10^n + 5)(n+1)^2}{(10^{n+1} + 5)n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{1 + \frac{5}{10^n}}{10 + \frac{5}{10^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{10^n}}{10 + \frac{5}{10^n}} = 1 \cdot \frac{1}{10} < 1, \end{aligned}$$

επομένως, από το Κριτήριο του Λόγου, η σειρά συγκλίνει.

(γ') Έστω $a_n = \frac{\cos(1/n^2)}{n^2 + (\log n)^2}$ και $b_n = \frac{1}{n^2}$. Παρατηρούμε πως:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\cos(1/n^2)}{n^2 + (\log n)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cos(1/n^2)}{n^2 + (\log n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(1/n^2)}{1 + (\log n)^2/n^2} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

επομένως, με χρήση του Κριτηρίου της Σύγκρισης στο όριο, και επειδή η σειρά $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, προκύπτει ότι και η δοσμένη σειρά συγκλίνει.

Οδηγίες

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
2. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
3. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
4. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
5. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
6. Στις τελικές απαντήσεις αρκεί να δοθούν μαθηματικές εκφράσεις, δεν χρειάζεται να κάνετε πράξεις. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αιτιολογημένες προσεγγίσεις.
7. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Ορισμός Ορίου)** (1 μονάδα) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{17}{(x+4)^2} = \infty$ χρησιμοποιώντας τον **ορισμό** του αντίστοιχου ορίου.
2. **(Ορια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια
(α') (1 μονάδα) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right)$.
(β') (1 μονάδα) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{t} e^t dt}{x e^{x^2}}$.
(Υπόδειξη: μπορείτε, και για τα δύο όρια, να χρησιμοποιήσετε τον Κανόνα του L'Hôpital.)
3. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)** (2 μονάδα) Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$. Παρατηρήστε πως το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό και επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση τείνει στο ∞ στο αριστερό άκρο ολοκλήρωσης, αλλά και γιατί το άλλο άκρο ολοκλήρωσης είναι το ∞ .
4. **(Διαφορική Εξίσωση)**
(α') (1 μονάδες) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\cos x} dx$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. (Υπόδειξη: μπορείτε να πολλαπλασιάσετε αριθμητή και παρονομαστή με το $\cos x$.)
(β') (1 μονάδες) Να προσδιορίσετε, στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, τη γενική λύση της ΔΕ
$$y'(x) + \frac{2}{\cos x} y(x) = 1 - \sin x.$$
5. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:
(α') (1 μονάδα) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$.
(β') (1 μονάδα) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ όπου
$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n/2}, & \text{n άρτιος,} \\ \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}, & \text{n περιττός.} \end{cases}$$

(Υπόδειξη: γράψτε τους πρώτους 5-6 όρους της σειράς. Τι παρατηρείτε;)
(γ') (1 μονάδα) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \cos n}{e^n}$.

Τυπολόγιο

$$\begin{aligned}\cos(y-x) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y, \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad \cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \quad \cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)], \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ \sin x \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)], \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon, & \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \\ \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : c - \delta < x < c \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon, & \forall \epsilon > 0 \exists X \in \mathbb{R} : x > X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \\ \forall \epsilon > 0 \exists X \in \mathbb{R} : x < X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon, & \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow f(x) > M. \\ \forall M \in \mathbb{R} \exists X \in \mathbb{R} : x > X \Rightarrow f(x) > M, & \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq C|x - x_0|, \quad |f(y) - f(x)| \leq C|y - x| \\ (\arcsin y)' &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2} \\ f(\theta x_0 + (1-\theta)x_1) &< \theta f(x_0) + (1-\theta)f(x_1) \\ L(f, P) &\triangleq \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}), \quad U(f, P) \triangleq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}), \quad \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right\} \\ \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta) d\theta, \quad \pi \int_a^b f^2, \quad 2\pi \int_a^b x f(x) dx, &\int_a^b A(t) dt, \quad \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + (g'(x))^2} dx \\ y' + P(x)y &= Q(x), \quad y(x) = [S(x) + C] \exp[-R(x)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{n,a}(x) &\triangleq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ y(x) &= \left\{ y_0 + \int_{x_0}^x Q(u) \exp\left[\int_{x_0}^u P(t) dt\right] du \right\} \exp\left[-\int_{x_0}^x P(t) dt\right] \\ E_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt, \quad |E_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \\ s_n &= \sum_{k=1}^n f(k), \quad t_n = \int_1^n f(x) dx \\ S &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k, \quad s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k, \quad 0 < (-1)^n (S - s_n) < a_{n+1} \\ A_{\parallel} &= \left[\frac{A \cdot B}{\|B\|^2} \right] B, \quad A_{\perp} = A - A_{\parallel}, \quad (x - x_0, y - y_0)(A, B) = 0 \Leftrightarrow Ax + By = Ax_0 + By_0 \\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} &= 0, \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0, \\ A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) &= 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0 \\ y^2 = 4px, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)} &= 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} u = (x-x_0) \cos \theta + (y-y_0) \sin \theta, \\ v = -(x-x_0) \sin \theta + (y-y_0) \cos \theta \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + u \cos \theta - v \sin \theta, \\ y = y_0 + u \sin \theta + v \cos \theta \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0+u \\ y_0+v \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \frac{A-C}{B} \\ \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} &= x_0 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_0 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_0 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = x_0 y_1 - x_1 y_0.\end{aligned}$$

Λύσεις Εξετάσεων Σεπτεμβρίου Ακ. Έτους 2023-2024

1. **(Ορισμός Ορίου)** (1 μονάδα) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{17}{(x+4)^2} = \infty$ χρησιμοποιώντας τον **ορισμό** του αντίστοιχου ορίου.

Λύση: Έστω $M > 0$. Παρατηρούμε πως

$$f(x) > M \Leftrightarrow \frac{17}{(x+4)^2} > M \Leftrightarrow (x+4)^2 < \frac{17}{M} \Leftrightarrow |x+4| < \sqrt{\frac{17}{M}}.$$

Επομένως, θέτουμε $\delta = \sqrt{\frac{17}{M}} > 0$ και παρατηρούμε πως

$$|x - (-4)| < \delta \Rightarrow |x+4| < \sqrt{\frac{17}{M}} \Rightarrow f(x) > M.$$

Αν, πάλι, $M < 0$, τότε για οποιοδήποτε $\delta > 0$, π.χ. για $\delta = 1$, ισχύει ότι $|x - (-4)| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. Επομένως το όριο ισούται με ∞ , σύμφωνα με τον σχετικό ορισμό.

2. **(Ορια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια

(α') (1 μονάδα) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right).$

(β') (1 μονάδα) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{t} e^t dt}{x e^{x^2}}.$

(Υπόδειξη: μπορείτε, και για τα δύο όρια, να χρησιμοποιήσετε τον Κανόνα του L'Hôpital.)

Λύση:

(α') Θα εφαρμόσουμε δύο φορές τον Κανόνα του L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)e^x - (e^x - 1)}{(\sin x)(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)e^x + (\sin x)e^x - e^x}{e^x \sin x + \cos x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \sin x - 1}{\sin x + \cos x - (\cos x)e^{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x + (\sin x)e^{-x} + (\cos x)e^{-x}} = \frac{-0 + 1}{1 - 0 + 0 + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(β') Το ολοκλήρωμα του αριθμητή δεν μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή. Όμως, καθώς έχουμε απροσδιοριστία ∞/∞ (μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι ο αριθμητής τείνει στο 0) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital σε συνδυασμό με τον κανόνα της αλυσίδας. Πράγματι, αν θέσουμε

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t} e^t dt,$$

τότε έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{t} e^t dt}{x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x^2)}{x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F'(x^2) 2x}{(x e^{x^2})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{x^2} 2x}{2x^2 e^{x^2} + e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2x^2}} = 1.$$

3. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)** (2 μονάδα) Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \frac{\exp(\frac{1}{x})}{x^2} dx$. Παρατηρήστε πως το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό και επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση τείνει στο ∞ στο αριστερό άκρο ολοκλήρωσης, αλλά και γιατί το άλλο άκρο ολοκλήρωσης είναι το ∞ .

Λύση: Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, γράφουμε

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

και πρέπει να υπολογίσουμε και τα δύο επί μέρους καταχρηστικά ολοκληρώματα. Επίσης, παρατηρούμε πως

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \int \left(-e^{\frac{1}{x}}\right)' dx = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

Επομένως, για το πρώτο καταχρηστικό ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_h^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_h^1 = -e + \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{h}} = \infty.$$

Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_1^h \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^h = -1 + e.$$

Επομένως,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \infty - 1 + e = \infty.$$

4. (Διαφορική Εξίσωση)

(α') (1 μονάδες) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\cos x} dx$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (Υπόδειξη: μπορείτε να πολλαπλασιάσετε αριθμητή και παρονομαστή με το $\cos x$.)

(β') (1 μονάδες) Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + \frac{2}{\cos x} y(x) = 1 - \sin x$$

στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Λύση:

(α') Παρατηρούμε πως

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{du}{1 - u^2},$$

όπου θέσαμε $u = \sin x$, επομένως $du = \cos x dx$. Ακολουθώντας, παρατηρούμε πως

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{A}{1 - u} + \frac{B}{1 + u} \Leftrightarrow 1 = A + Au + B - Bu \Leftrightarrow A = B = \frac{1}{2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{1 - u^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 - u} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{1 + u} = \frac{1}{2} \log |1 + u| - \frac{1}{2} \log |1 - u| \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + C. \end{aligned}$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι $\sin x \in (-1, 1)$ στο δοσμένο ανοικτό διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(β') Η ΔΕ είναι γραμμική πρώτης τάξης. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, θα πολλαπλασιάσουμε με

$$\exp \left[2 \times \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) \right] = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}.$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} y'(x) + \frac{2}{\cos x} y(x) &= 1 - \sin x \Leftrightarrow \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} y'(x) + \frac{2(1 + \sin x)}{\cos x (1 - \sin x)} y(x) = 1 + \sin x \\ &\Leftrightarrow \left(y(x) \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)' = (x - \cos x)' \Leftrightarrow y(x) = \frac{(x - \cos x + C)(1 - \sin x)}{1 + \sin x}. \end{aligned}$$

5. (Σειρές) Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

$$(\alpha') \text{ (1 μονάδα)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}.$$

$$(\beta') \text{ (1 μονάδα)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ όπου}$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n/2}, & n \text{ άρτιος,} \\ \frac{1}{2^{n/2}}, & n \text{ περιττός.} \end{cases}$$

(Υπόδειξη: γράψτε τους πρώτους 5-6 όρους της σειράς. Τι παρατηρείτε;)

$$(\gamma') \text{ (1 μονάδα)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \cos n}{e^n}.$$

Λύση:

(α') Παρατηρούμε πως $\frac{1}{(\log n)^n} \leq \frac{1}{(\log 2)^n}$, Επειδή όμως $\log 2 > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log 2)^n}$ συγκλίνει, ως γεωμετρική. Επομένως, θα συγκλίνει και η δοσμένη, ως μικρότερή της.

(β') Παρατηρούμε πως

$$\sum_{i=1}^n a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

Παρατηρήστε ότι η δοσμένη σειρά περιλαμβάνει όλους τους όρους της αρμονικής σειράς, που είναι γνωστό ότι αποκλίνει. Επομένως, τα μερικά αθροίσματα της δοσμένης σειράς μπορούν να γίνουν αυθαίρετα μεγάλα, όπως ακριβώς και της αρμονικής σειράς, επομένως και η δοσμένη σειρά αποκλίνει.

(γ') Θα εφαρμόσουμε το Κριτήριο του Λόγου:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{e^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^3 + \cos(n+1)}{n^3 + \cos n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \times \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 + \frac{\cos(n+1)}{n^3}}{1 + \frac{\cos n}{n^3}} = \frac{1}{e} \times 1 < 1.$$

Επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία η δοσμένη σειρά συγκλίνει.