ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022-2023
ΑΝ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όρια)** *(2 μονάδες)* Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x - e^{-x})}{\log(\cos x)}, \quad \lim_{x\to\infty} \arctan\left(\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}\right).$$
2. **(Αόριστα ολοκληρώματα)** *(2 μονάδες)*
   (α΄) Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα
$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx, \quad \int x^2(\log x)^2\, dx.$$
   Για το πρώτο ολοκλήρωμα, μπορείτε να δοκιμάσετε την αντικατάσταση $x = \cos\theta$ και για το δεύτερο ολοκλήρωμα μπορείτε να δοκιμάσετε διπλή παραγοντική ολοκλήρωση.
3. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα)**
   (α΄) *(0.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα
$$\int \log|x-1|\, dx.$$
   (β΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την τιμή του καταχρηστικού ολοκληρώματος
$$\int_0^1 \log|x-1|\, dx.$$

4. **(Διαφορικές εξισώσεις)**

   (α΄) *(1 μονάδα)* Δίνεται η διαφορική εξίσωση

   $$y'(x) + (1 + \tan x)y(x) = 10\cos x$$

   στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να βρείτε τη γενική της λύση.

   (β΄) *(1.5 μονάδα)* Δίνεται η διαφορική εξίσωση

   $$y'(x) = e^{y(x)}.$$

   Να βρείτε τη γενική της λύση, και να δείξετε ότι όλες οι ειδικές λύσεις τείνουν στο ∞ όταν το x τείνει πλευρικά σε κάποια πεπερασμένη τιμή.

5. **(Σειρές)** *(2 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή όχι:

$$\sum \frac{n^4 + e^n}{(2n)!}, \quad \sum \frac{\sqrt{n+10} - \sqrt{n}}{n^2 + \log n}.$$

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\ \triangleq\ f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_{\parallel}=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_{\perp}=A-A_{\parallel},\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c} u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0+u\\ y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, ΕΞΕΤΑΣΗ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2023
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΑΝ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων Φεβρουαρίου Ακ. Έτους 2022-2023

1. **(Όρια)** *(2 μονάδες)* Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x-e^{-x})}{\log(\cos x)}, \quad \lim_{x\to\infty}\arctan\left(\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}\right).$$

Λύση:

(α΄) Με διπλή χρήση του Κανόνα του L'Hôpital έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x-e^{-x})}{\log(\cos x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})+x(e^x+e^{-x})}{-\frac{\sin x}{\cos x}} = -(\lim_{x\to 0}(\cos x))\times\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})+x(e^x+e^{-x})}{\sin x}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+e^x+e^{-x}+x(e^x-e^{-x})}{\cos x} = -\frac{1+1+1+1+0\times(1-1)}{1} = -4.\end{aligned}$$

(β΄) Έχουμε να χειριστούμε μια απροσδιοριστία $\infty-\infty$. Παρατηρούμε πως

$$\lim_{x\to\infty}\arctan\left(\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\arctan\left(\frac{(\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\arctan\left(\frac{x+x^2-x}{\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\arctan\left(\frac{x^2}{\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x}}\right) = \arctan\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x}}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

2. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** *(2 μονάδες)*

(α΄) Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx, \quad \int x^2(\log x)^2\,dx.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, μπορείτε να δοκιμάσετε την αντικατάσταση $x=\cos\theta$ και για το δεύτερο ολοκλήρωμα μπορείτε να δοκιμάσετε διπλή παραγοντική ολοκλήρωση.

Λύση:

(α΄) Παρατηρήστε πως $x\in(-1,1)$. Θέτουμε $x=\cos\theta\Rightarrow dx=-\sin\theta d\theta$, με $\theta\in(0,\pi)$, επομένως $\sin\theta>0$ και

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx &= -\int\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\sin\theta\,d\theta = -\int\frac{1+\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\sin\theta\,d\theta\\ &= -\int(1+\cos\theta)\,d\theta = -\theta-\sin\theta+C = -\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.\end{aligned}$$

Πράγματι, με παραγώγιση έχουμε:

$$\left(-\arccos x-\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Ισχύει, επίσης, ότι

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -2\arctan\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}}\right)-\sqrt{1-x^2}+C,$$

που μπορεί να αποδειχθεί κάνοντας την αντικατάσταση $u=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}\int x^2(\log x)^2\,dx &= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)'(\log x)^2\,dx = \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \int \frac{x^3}{3}2\log x\left(\frac{1}{x}\right)\,dx \\ &= \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \int\left(\frac{2x^3}{9}\right)'\log x\,dx = \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2x^3}{9}\log x + \int \frac{2x^3}{9x}\,dx \\ &= \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2x^3}{9}\log x + \int\left(\frac{2x^3}{27}\right)'\,dx = \frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2x^3}{9}\log x + \frac{2x^3}{27} + C.\end{aligned}$$

Πράγματι, με παραγώγιση έχουμε:

$$\left(\frac{x^3}{3}(\log x)^2 - \frac{2x^3}{9}\log x + \frac{2x^3}{27}\right)' = x^2(\log x)^2 + \frac{x^3}{3}2\log x\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{3}x^2\log x - \frac{2x^3}{9x} + \frac{2x^2}{9} = x^2\left(\log x\right)^2.$$

3. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα)**

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \log|x-1|\,dx.$$

(β΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε την τιμή του καταχρηστικού ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \log|x-1|\,dx.$$

Λύση:

(α΄) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση,

$$\begin{aligned}\int \log|x-1|\,dx = \int (x-1)'\log|x-1|\,dx = (x-1)\log|x-1| - \int\,dx &= (x-1)\log|x-1| - (x-1) + C \\ &= (x-1)\left[\log|x-1| - 1\right] + C.\end{aligned}$$

(β΄) Το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό διότι στο δεξί άκρο μηδενίζεται το όρισμα του λογαρίθμου. Κατά τα γνωστά από τη σχετική θεωρία,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log|x-1|\,dx &= \lim_{h\to 1^-}\int_0^h \log|x-1|\,dx = \lim_{h\to 1^-}\left[(x-1)(\log|x-1|-1)\right]_0^h \\ &= \lim_{h\to 1^-}(h-1)\left[\log(1-h)-1\right] - (0-1)(\log 1 - 1) = \lim_{h\to 1^-}(h-1)\log(1-h) - 1 \\ &= \lim_{h\to 1^-}\frac{\log(1-h)}{\frac{1}{h-1}} - 1 = \lim_{h\to 1^-}\frac{-\frac{1}{1-h}}{-\frac{1}{(h-1)^2}} - 1 = \lim_{h\to 1^-}(1-h) - 1 = -1.\end{aligned}$$

4. **(Διαφορικές εξισώσεις)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y'(x) + (1+\tan x)y(x) = 10\cos x$$

στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να βρείτε τη γενική της λύση.

(β΄) *(1.5 μονάδα)* Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y'(x) = e^{y(x)}.$$

Να βρείτε τη γενική της λύση, και να δείξετε ότι όλες οι ειδικές λύσεις τείνουν στο ∞ όταν το x τείνει πλευρικά σε κάποια πεπερασμένη τιμή.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως η ΔΕ είναι γραμμική πρώτης τάξης, και πως

$$\int (1+\tan x)\,dx = x - \log\cos x + C.$$

Επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$y'(x) + (1+\tan x)y(x) = 10\cos x \Leftrightarrow e^{x-\log\cos x}y'(x) + (1+\tan x)y(x)e^{x-\log\cos x} = 10(\cos x)e^{x-\log\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{\cos x}y'(x) + (1+\tan x)\frac{e^x}{\cos x}y(x) = 10e^x \Leftrightarrow \left(\frac{e^x}{\cos x}y(x)\right)' = 10e^x = (10e^x)'$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{10e^x + C}{e^x}(\cos x) \Leftrightarrow y(x) = (10 + Ce^{-x})(\cos x).$$

(β΄) Η διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$y'(x) = e^{y(x)} \Leftrightarrow dye^{-y} = dx \Leftrightarrow \int e^{-y}\,dy = \int dx \Leftrightarrow -e^{-y} = x + C$$

$$\Leftrightarrow -y(x) = \log(C-x) \Leftrightarrow y(x) = -\log(C-x).$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη καθώς $x \to C^-$. Το αποτέλεσμα αναμενόταν, από τη μορφή της ΔΕ. Πράγματι, όσο μεγαλώνει η $y(x)$, τόσο μεγαλώνει η παράγωγός της, και μάλιστα τόσο γρήγορα, ώστε εν τέλει να δημιουργείται μια κατακόρυφη ασύμπτωτη.

5. **(Σειρές)** *(2 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή όχι:

$$\sum \frac{n^4 + e^n}{(2n)!}, \quad \sum \frac{\sqrt{n+10} - \sqrt{n}}{n^2 + \log n}.$$

Λύση:

(α΄) Έστω $\sum a_n$ η σειρά. Παρατηρούμε πως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^4 + e^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{n^4+e^n}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \times \frac{(n+1)^4 + e^{n+1}}{n^4 + e^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \times \frac{\frac{(n+1)^4}{e^n} + e}{\frac{n^4}{e^n} + 1} = 0 \times e = 0,$$

επομένως η σειρά συγκλίνει. Στα προηγούμενα, χρησιμοποιήσαμε το γνωστό όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{e^n} = 0,$$

για κάθε k φυσικό, που μπορεί να αποδειχθεί εύκολα χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του L'Hôpital.

(β΄) Έστω $\sum a_n$ η σειρά. Παρατηρούμε πως

$$a_n = \frac{\sqrt{n+10} - \sqrt{n}}{n^2 + \log n} = \frac{10}{(n^2 + \log n)(\sqrt{n+10} + \sqrt{n})},$$

και παρατηρούμε πως αν $b_n = \frac{1}{n^2}$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{(1 + \frac{\log n}{n^2})(\sqrt{n+10} + \sqrt{n})} = 0,$$

επομένως εφόσον συγκλίνει η $\sum b_n$, θα συγκλίνει και η $\sum a_n$.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2022-2023
ΑΝ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις.**
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όρια)** *(2 μονάδες)* Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, αν υπάρχουν:
$$\lim_{x\to 0} xe^{(1/x)}, \quad \lim_{x\to 0} x^2 e^{(1/x^2)}, \quad \lim_{x\to 0} x^4 e^{(1/x^2)}$$
2. **(Ολοκλήρωμα)** *(1.5 μονάδα)* Κάντε δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες προκειμένου να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)e^x \, dx.$$
3. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** *(3 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν τα ακόλουθα καταχρηστικά ολοκλήρωματα απειρίζονται ή όχι, χωρίς κατ' ανάγκη να υπολογίσετε τις ακριβείς τιμές τους.
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx, \quad \int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x^2}\, dx, \quad \int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\, dx$$
4. **(Διαφορικές Εξισώσεις)** *(2 μονάδες)* Δίνεται η διαφορική εξίσωση
$$y'(x) + y(x) = \cos(e^x).$$
   (α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τη γενική της λύση.
   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Να βρείτε ποιες είναι οι δυνατές τιμές για το όριο των ειδικών λύσεων αν $x \to \infty$.
   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* Να βρείτε ποιες είναι οι δυνατές τιμές για το όριο των ειδικών λύσεων αν $x \to -\infty$.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\ 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\ \int_a^b A(t)\,dt,\ \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\ \triangleq\ f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c} u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\ y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\mathrm{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΪΟΥ 2023
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΑΝ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων Μαΐου Ακ. Έτους 2022-2023

1. **(Όρια)** *(2 μονάδες)* Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, αν υπάρχουν:

   (α΄) *(1 μονάδα)* $\lim_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$,

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* $\lim_{x\to 0} x^2e^{\frac{1}{x^2}}$,

   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* $\lim_{x\to 0} x^4e^{\frac{1}{x^2}}$.

   Λύση:

   (α΄) Παρατηρούμε πως:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{h\to\infty}\frac{e^h}{h} = \lim_{h\to\infty}\frac{e^h}{1} = \infty,\\ \lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^-} x \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0\times 0 = 0.\end{aligned}$$

   Στον υπολογισμό των άνω τελικών ορίων, έχουμε χρησιμοποιήσει τον Κανόνα του L'Hôpital. Αφού διαφέρουν τα πλευρικά όρια, το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

   (β΄) Σε αυτή την περίπτωση,

$$\lim_{x\to 0} x^2e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{h\to\infty}\frac{e^h}{h} = \infty,$$

   επομένως αυτό το όριο υπάρχει.

   (γ΄) Ανάλογα,

$$\lim_{x\to 0} x^4e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{h\to\infty}\frac{e^h}{h^2} = \lim_{h\to\infty}\frac{e^h}{2h} = \infty,$$

   με μία διπλή εφαρμογή του Κανόνα του L'Hôpital στο τέλος.

2. **(Ολοκλήρωμα)** *(1.5 μονάδα)* Κάντε δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες προκειμένου να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)e^x\,dx.$$

   Λύση: Το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί ανεξάρτητα από το πού θα εμφανίσουμε την παράγωγο κατά την εφαρμογή της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)e^x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)'e^x\,dx = [-(\cos x)e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\pi} (\cos x)e^x\,dx = [(\cos x)e^x]_{\frac{\pi}{2}}^0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)'e^x\,dx\\ = 1 + [(\sin x)e^x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)e^x\,dx,\end{aligned}$$

   και λύνοντας ως προς το ζητούμενο ολοκλήρωμα προκύπτει πως

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)e^x\,dx = \frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}.$$

3. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** *(3 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν τα ακόλουθα καταχρηστικά ολοκληρώματα απειρίζονται ή όχι, χωρίς κατ' ανάγκη να υπολογίσετε τις ακριβείς τιμές τους.

   (α΄) (0.5 μονάδα) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$,

   (β΄) (0.5 μονάδα) $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$, (γ΄) (1 μονάδα) $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x^2}\,dx$,

(δ΄) (1 μονάδα) $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$.

Λύση:

(α΄) Έχουμε

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{dx}{x^2} = \lim_{h\to\infty}\int_1^h \left(-\frac{1}{x}\right)'\,dx = \lim_{h\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^h = \lim_{h\to\infty}\left[1-\frac{1}{h}\right] = 1.$$

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{dx}{x} = \lim_{h\to\infty}\int_1^h (\log x)'\,dx = \lim_{h\to\infty}(\log h - 1) = \infty.$$

(γ΄) Για το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε παράγουσα. Έχουμε, όμως,

$$\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x^2}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{1+e^{-x}}{x^2}\,dx \le \lim_{h\to\infty} 2\int_1^h \frac{1}{x^2}\,dx = 2,$$

επομένως το καταχρηστικό ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο.

(δ΄) Αντιθέτως, τώρα έχουμε

$$\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx \ge \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{1}{x}\,dx = \infty,$$

επομένως το συγκεκριμένο καταχρηστικό ολοκλήρωμα είναι άπειρο.

4. **(Διαφορικές Εξισώσεις)** *(2 μονάδες)* Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y'(x) + y(x) = \cos(e^x).$$

(α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τη γενική της λύση.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Να βρείτε ποιες είναι οι δυνατές τιμές για το όριο των ειδικών λύσεων όταν $x\to\infty$.

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Να βρείτε ποιες είναι οι δυνατές τιμές για το όριο των ειδικών λύσεων όταν $x\to-\infty$.

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$y'(x)+y(x) = \cos(e^x) \Leftrightarrow e^x y'(x)+e^x y(x) = e^x\cos(e^x) \Leftrightarrow (e^x y(x))' = (\sin(e^x))' \Leftrightarrow y(x) = \frac{\sin(e^x)+C}{e^x}.$$

(β΄) Σχετικά με το όριο όταν $x\to\infty$, παρατηρούμε πως απειρίζεται ο παρονομαστής της γενικής λύσης ενώ ο αριθμητής παραμένει φραγμένος, επομένως εν τέλει $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

(γ΄) Σχετικά με το όριο όταν $x\to-\infty$, παρατηρούμε πως $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x\to-\infty}\sin(e^x) = 0$. Επομένως, όταν $C>0$ έχουμε $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \infty$, όταν $C<0$ έχουμε $\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$, και τέλος όταν $C=0$ έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sin(e^x)}{e^x} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1.$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022-2023

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το φύλλο.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
6. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
7. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
8. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όριο)** *(2 μονάδες)* Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-ax\right)$, όπου το $a\in\mathbb{R}$ είναι άγνωστη παράμετρος. Το όριο εξαρτάται από την τιμή του a, επομένως πρέπει να εξετάσετε διαφορετικές περιπτώσεις για την τιμή του a.

2. **(Ορισμένο Ολοκλήρωμα)**

   (α΄) *(1.5 μονάδα)* Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=xe^x$ και έστω $f^{-1}(y)$ η αντίστροφή της. Να υπολογίσετε το ακόλουθο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση με αντικατάσταση ή/και παραγοντική ολοκλήρωση:
   $$\int_0^e f^{-1}(y)\,dy.$$
   ΜΗΝ επιχειρήσετε να βρείτε τύπο για την αντίστροφη συνάρτηση.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Μπορείτε να εξηγήσετε γραφικά το αποτέλεσμα του προηγούμενου σκέλους;

3. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)**

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

   (β΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

4. **(Διαφορικές Εξισώσεις)**

   (α΄) *(1.5 μονάδα)* Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την εξίσωση
   $$f'(x)+(\log x)f(x)=e^{-x\log x}.$$

   (β΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την εξίσωση
   $$f''(x)=\sin x+2x.$$

5. **(Σειρές)** *(1.5 μονάδα)* Δίνεται η σειρά $\displaystyle\sum\left(\frac{\lambda}{10}\right)^n\frac{1}{n^2}$, όπου η παράμετρος $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$. Για ποιες τιμές της παραμέτρου λ συγκλίνει η σειρά;

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad\forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$

$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow f(x)>M.$ $\qquad\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\ 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\ \triangleq\ f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_{\parallel}=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_{\perp}=A-A_{\parallel},\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\\x_2-x_0&y_2-y_0&z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c}u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix}x_0&y_0&z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_0&y_0\\x_1&y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, ΕΞΕΤΑΣΗ Σεπτεμβρίου 2023
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΑΝ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων Σεπτεμβρίου Ακ. Έτους 2022-2023

1. **(Όριο)** *(2 μονάδες)* Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-ax\right),$$

όπου το $a \in \mathbb{R}$ είναι άγνωστη παράμετρος. Το όριο εξαρτάται από την τιμή του a, επομένως πρέπει να εξετάσετε διαφορετικές περιπτώσεις για την τιμή του a.

Λύση: Παρατηρήστε πως

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-ax\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}-a\right).$$

Επομένως, αν $a>3$ το όριο είναι $-\infty$, διότι η συνάρτηση εντός της παρένθεσης συγκλίνει σε ένα αρνητικό πραγματικό αριθμό. Αντίθετα, αν $a<3$ το όριο είναι ∞, γιατί η συνάρτηση εντός της παρένθεσης συγκλίνει σε ένα θετικό πραγματικό αριθμό. Τέλος, στην περίπτωση που $a=3$, το άνω όριο εμφανίζει απροσδιοριστία, αλλά ειδικά για αυτή την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+7}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+7}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+7}+3x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{7}{\left(\sqrt{9x^2+7}+3x\right)}=0.$$

Συνοψίζοντας,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-ax\right)=\begin{cases}-\infty, & a>3,\\ 0, & a=3,\\ \infty, & a<3.\end{cases}$$

2. **(Ορισμένο Ολοκλήρωμα)**

(α΄) *(1.5 μονάδα)* Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[0,\infty]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=xe^x$ και έστω $f^{-1}(y)$ η αντίστροφή της. Να υπολογίσετε το ακόλουθο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση με αντικατάσταση ή/και παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int_0^e f^{-1}(y)\,dy.$$

ΜΗΝ επιχειρήσετε να βρείτε τύπο για την αντίστροφη συνάρτηση.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Μπορείτε να εξηγήσετε γραφικά το αποτέλεσμα του προηγούμενου σκέλους;

Λύση: Θέτουμε $y=f(x)\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=f'(x)$. Παρατηρούμε πως $f(0)=0$ και $f(1)=e$. Επομένως, $y=0\Rightarrow x=f^{-1}(0)=0$ και $y=e\Rightarrow x=f^{-1}(e)=1$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_0^e f^{-1}(y)\,dy &= \int_0^1 xf'(x)\,dx=[xf(x)]_0^1-\int_0^1 f(x)\,dx=e-\int_0^1 xe^x\,dx\\ &= e-\int_0^1 x(e^x)'\,dx=e-[xe^x]_0^1+\int_0^1 e^x\,dx=e-e+e-1=e-1.\end{aligned}$$

Σχετικά με τη γραφική εξήγηση του αποτελέσματος, παρατηρήστε ότι η εξίσωση

$$\int_0^e f^{-1}(y)\,dy+\int_0^1 xe^x\,dx=e$$

εκφράζει το ότι το ολοκλήρωμα της $f(x)$ στο διάστημα $[0,1]$ και το ολοκλήρωμα της $f^{-1}(y)$ στο $[0,e]$ ισούνται με εμβαδά δύο χωρίων που μαζί σχηματίζουν το ορθογώνιο $[0,1]\times[0,e]\subseteq\mathbb{R}^2$ που έχει εμβαδό e.

3. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx.$$

(β΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx.$$

Λύση:

(α΄)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int \frac{x+1}{\sqrt{x+1}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx \\ &= \int \left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)' - \int (2\sqrt{x+1})'\,dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x+1} + C.\end{aligned}$$

(β΄) Το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό διότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση απειρίζεται στο -1, αλλά και γιατί το άλλο άκρο ολοκλήρωσης είναι το ∞. Επομένως, πρέπει να προσδιορίσουμε το ακόλουθο άθροισμα:

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx.$$

Για τα δύο επιμέρους καταχρηστικά ολοκληρώματα, έχουμε, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο σκέλος,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \lim_{h\to -1}\int_{h}^{0} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \lim_{h\to -1}\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x+1}\right]_{h}^{0} \\ &= \lim_{h\to -1}\left(\frac{2}{3} - 2 - \frac{2}{3}(h+1)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{h+1}\right) = -\frac{4}{3},\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \lim_{h\to\infty}\int_{0}^{h} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \lim_{h\to\infty}\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x+1}\right]_{0}^{h} \\ &= \lim_{h\to\infty}\left(\frac{2}{3}(h+1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{h+1} - \frac{2}{3} + 2\right) = \lim_{h\to\infty}\sqrt{h+1}\left(\frac{2}{3}(h+1) - 2\right) + \frac{4}{3} = \infty.\end{aligned}$$

Επομένως δεν προκύπτει απροσδιοριστία όταν προσθέσουμε τα δύο καταχρηστικά ολοκληρώματα, και εν τέλει το άθροισμά τους είναι ∞.

4. **(Διαφορικές Εξισώσεις)**

(α΄) *(1.5 μονάδα)* Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση

$$f'(x) + (\log x) f(x) = e^{-x\log x}.$$

(β΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση

$$f''(x) = \sin x + 2x.$$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως $\int \log x\,dx = x\log x - x$, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, έχουμε

$$\begin{aligned}f'(x) + (\log x) f(x) = e^{-x\log x} &\Leftrightarrow e^{x\log x - x} f'(x) + (\log x) e^{x\log x - x} f(x) = e^{-x\log x + x\log x - x} = e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \left(e^{x\log x - x} f(x)\right)' = \left(-e^{-x}\right)' \Leftrightarrow e^{x\log x - x} f(x) = -e^{-x} + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{Ce^{x} - 1}{x^{x}}.\end{aligned}$$

(β΄) Παρατηρούμε πως $\int (\sin x + 2x)\, dx = -\cos x + x^2 + C$, επομένως

$$f''(x) = (-\cos x + x^2)' \Rightarrow f'(x) = -\cos x + x^2 + k_1,$$

όπου $k_1 \in \mathbb{R}$. Επειδή όμως

$$\int \left(-\cos x + x^2 + k_1\right)\, dx = -\sin x + \frac{x^3}{3} + k_1 x + C,$$

έχουμε

$$f'(x) = \left(-\sin x + \frac{x^3}{3} + k_1 x\right)' \Rightarrow f(x) = -\sin x + \frac{x^3}{3} + k_1 x + k_2,$$

όπου $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

5. **(Σειρές)** *(1.5 μονάδα)* Δίνεται η σειρά

$$\sum \left(\frac{\lambda}{10}\right)^n \frac{1}{n^2},$$

όπου η παράμετρος $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Για ποιες τιμές της παραμέτρου λ συγκλίνει η σειρά;

Λύση: Εφαρμόζοντας το Κριτήριο του Λόγου, παρατηρούμε πως:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda n^2}{10(n+1)^2} = \frac{\lambda}{10}.$$

Επομένως, από το Κριτήριο του Λόγου προκύπτει πως για $\lambda < 10$ η σειρά συγκλίνει, ενώ για $\lambda > 10$ η σειρά αποκλίνει. Ειδικά για την περίπτωση $\lambda = 10$ το Κριτήριο του Λόγου δεν μπορεί να εφαρμοστεί, αλλά σε αυτή την περίπτωση η σειρά γίνεται η $\sum \frac{1}{n^2}$, η οποία είναι γνωστό από τη θεωρία πως συγκλίνει.