ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020-2021

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Διάρκεια εξέτασης: 100 ΛΕΠΤΑ.
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
5. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
6. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
7. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όριο)** *(1.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}(2+\sin x)\,dx}{h}.$$
2. **(Αόριστο ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα
$$\int \arctan x\,dx.$$
3. **(Ιδιότητα Κυρτών Συναρτήσεων)** *(1 μονάδα)* Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κυρτότητας συνάρτησης, ότι αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή, τότε είναι κυρτή και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(ax+b)$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$. Μην υποθέσετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
4. **(Συνέχεια Lipschitz)** Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$
   (α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίστε την παράγωγο της f παντού στο $\mathbb{R}$ και να δείξετε ότι η παράγωγος είναι συνεχής παντού στο $\mathbb{R}$.
   (β΄) *(1 μονάδα)* Είναι η f Lipschitz συνεχής σε όλα τα φραγμένα διαστήματα της μορφής $[-M,M]$, όπου $M>0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
5. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα καταχρηστικά ολοκληρώματα
   (α΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^x}{x^2}\,dx.$
   (β΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x^2}\,dx.$
6. **(Διαφορική Εξίσωση)**
   (α΄) *(1.5 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ
$$y'(x)+(\cos x)y(x)=e^{-\sin x}\log x,$$
   στο διάστημα $x>0$.
   (β΄) *(1 μονάδα)* Ποιο είναι το όριο των ειδικών λύσεων της άνω ΔΕ καθώς $x\to\infty$;

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad$ $\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad$ $\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad$ $\forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$

$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow f(x)>M.$ $\qquad$ $\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\ \triangleq\ f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\\x_2-x_0&y_2-y_0&z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c}u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\ \sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix}x_0&y_0&z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_0&y_0\\x_1&y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020-2021
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΑΝ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων Φεβρουαρίου Ακ. Έτους 2020-2021

ΟΜΑΔΑ 1

1. **(Όριο)** *(1.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}(2+\sin x)\,dx}{h}.$$

Λύση: Παρατηρήστε πως η ολοκληρωτέα συνάρτηση τείνει στο άπειρο. Επομένως, και το ίδιο το ολοκλήρωμα τείνει στο άπειρο, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital, και έχουμε

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}(2+\sin x)\,dx}{h} = \lim_{h\to\infty} \frac{\sqrt{h}(2+\sin h)}{1} \geq \lim_{h\to\infty} \sqrt{h} = \infty.$$

Άρα, και το ζητούμενο όριο είναι άπειρο.

2. **(Αόριστο ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \arctan x \, dx.$$

Λύση:

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,dx &= \int (x)' \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(\log(x^2+1)\right)'\,dx \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C.\end{aligned}$$

3. **(Ιδιότητα Κυρτών Συναρτήσεων)** *(1 μονάδα)* Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κυρτότητας συνάρτησης, ότι αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή, τότε είναι κυρτή και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(ax+b)$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$. Μην υποθέσετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Λύση:. Έστω $\theta\in[0,1]$ και $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned}g(\theta x_1+(1-\theta)x_2) &= f(a\theta x_1 + a(1-\theta)x_2 + \theta b + (1-\theta)b) = f(\theta(ax_1+b)+(1-\theta)(ax_2+b)) \\ &\leq \theta f(ax_1+b) + (1-\theta)f(ax_2+b) = \theta g(x_1) + (1-\theta)g(x_2).\end{aligned}$$

Η ανισότητα προέκυψε από τον ορισμό της κυρτότητας για την f. Άρα, εξ ορισμού η g είναι κυρτή.

4. **(Συνέχεια Lipschitz)** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

(α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίστε την παράγωγο της f παντού στο $\mathbb{R}$ και να δείξετε ότι η παράγωγος είναι συνεχής παντού στο $\mathbb{R}$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Είναι η f Lipschitz συνεχής σε όλα τα φραγμένα διαστήματα της μορφής $[-M,M]$, όπου $M>0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση:

(α΄) Η παράγωγος της f για $x > 0$ μπορεί να υπολογιστεί με χρήση των συνηθισμένων θεωρημάτων:

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 \left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Ανάλογα εξετάζουμε την περίπτωση $x < 0$, οπότε $|x| < -x$. Η περίπτωση $x = 0$ πρέπει να αντιμετωπιστεί με τον ορισμό της παραγώγου:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Το όριο προκύπτει άμεσα με χρήση του Κριτηρίου της Παρεμβολής. Επομένως, η παράγωγος υπάρχει παντού. Παρατηρήστε, επίσης, ότι αυτή είναι συνεχής, παντού εκτός του $x = 0$, από γνωστά θεωρήματα, αλλά και στο $x = 0$, καθώς

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sqrt{x}}{2}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0 + 0.$$

Τα όρια είναι και τα δύο 0 όπως προκύπτει από το Κριτήριο της Παρεμβολής. Επομένως, η $f'(x)$ είναι παντού συνεχής.

(β΄) Αφού η παράγωγος είναι συνεχής, από το Θεώρημα των Ακροτάτων θα είναι φραγμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-M, M]$. Επομένως, από γνωστό θεώρημα, θα είναι και Lipschitz συνεχής σε αυτό το διάστημα.

5. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα καταχρηστικά ολοκληρώματα

(α΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{e^x}{x^2}\,dx.$

(β΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\int_0^{1}\frac{e^x}{x^2}\,dx.$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως η ολοκληρωτέα συνάρτηση τείνει στο άπειρο, όπως εύκολα προκύπτει με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital. Επομένως, το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα είναι άπειρο. Πιο αναλυτικά, έστω πως μετά το $K \in \mathbb{R}$ η ολοκληρωτέα γίνεται μεγαλύτερη της μονάδας. Η ύπαρξη του K εξασφαλίζεται από το ότι η ολοκληρωτέα τείνει στο ∞. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{e^x}{x^2}\,dx &= \lim_{h\to\infty}\int_1^{h}\frac{e^x}{x^2}\,dx = \lim_{h\to\infty}\left(\int_1^{K}\frac{e^x}{x^2}\,dx + \int_K^{h}\frac{e^x}{x^2}\,dx\right)\\ &\geq \int_1^{K}\frac{e^x}{x^2}\,dx + \lim_{h\to\infty}\int_K^{h}\,dx = \int_1^{K}\frac{e^x}{x^2}\,dx + \lim_{h\to\infty}(h-k) = \infty.\end{aligned}$$

Άρα, και το αρχικό ολοκλήρωμα θα είναι ∞.

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$\int_0^1\frac{e^x}{x^2}\,dx = \lim_{h\to 0^+}\int_h^1\frac{e^x}{x^2}\,dx \geq \lim_{h\to 0^+}\int_h^1\frac{dx}{x^2} = \lim_{h\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)_h^1 = \infty.$$

Άρα, και το αρχικό ολοκλήρωμα θα είναι ∞.

6. **(Διαφορική Εξίσωση)**

(α΄) *(1.5 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + (\cos x)y(x) = e^{-\sin x}\log x,$$

στο διάστημα $x > 0$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Ποιο είναι το όριο των ειδικών λύσεων της άνω ΔΕ καθώς $x \to \infty$;

Λύση:

(α΄) Η ΔΕ είναι γραμμική 1ης τάξης, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned}&y'(x) + (\cos x)y(x) = e^{-\sin x}\log x \Leftrightarrow e^{\sin x}y'(x) + e^{\sin x}(\cos x)y(x) = \log x\\ &\Leftrightarrow \left(e^{\sin x}y(x)\right)' = \log x = (x\log x - x)' \Leftrightarrow y(x) = \frac{x(\log x - 1) + C}{e^{\sin x}}.\end{aligned}$$

(β΄) Παρατηρούμε πώς στις άνω λύσεις, ο αριθμητής τείνει στο ∞, καθώς $x \to \infty$, ενώ ο παρονομαστής λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[e^{-1}, e]$. Επομένως, όλες οι λύσεις τείνουν στο ∞.

ΟΜΑΔΑ 2

1. **Όριο)** *(1.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}(4+2\sin x)\,dx}{h}.$$

Λύση: Παρατηρήστε πως η ολοκληρωτέα συνάρτηση τείνει στο άπειρο. Επομένως, και το ίδιο το ολοκλήρωμα τείνει στο άπειρο, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital, και έχουμε

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}(4+2\sin x)\,dx}{h} = \lim_{h\to\infty} \frac{\sqrt{h}(4+2\sin h)}{1} \geq \lim_{h\to\infty} 2\sqrt{h} = \infty.$$

Άρα, και το ζητούμενο όριο είναι άπειρο.

2. **(Αόριστο ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \arctan x\,dx.$$

Λύση:

$$\int \arctan x\,dx = \int (x)' \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \big(\log(x^2+1)\big)'\,dx$$
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C.$$

3. **(Ιδιότητα Κυρτών Συναρτήσεων)** *(1 μονάδα)* Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κυρτότητας συνάρτησης, ότι αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή, τότε είναι κυρτή και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(ax+b)$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$. Μην υποθέσετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Λύση:. Έστω $\theta\in[0,1]$ και $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. Παρατηρήστε πως

$$g(\theta x_1+(1-\theta)x_2) = f(a\theta x_1 + a(1-\theta)x_2 + \theta b + (1-\theta)b) = f(\theta(ax_1+b)+(1-\theta)(ax_2+b))$$
$$\leq \theta f(ax_1+b) + (1-\theta)f(ax_2+b) = \theta g(x_1) + (1-\theta)g(x_2).$$

Η ανισότητα προέκυψε από τον ορισμό της κυρτότητας για την f. Άρα, εξ ορισμού η g είναι κυρτή.

4. **(Συνέχεια Lipschitz)** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

(α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίστε την παράγωγο της f παντού στο $\mathbb{R}$ και να δείξετε ότι η παράγωγος είναι συνεχής παντού στο $\mathbb{R}$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Είναι η f Lipschitz συνεχής σε όλα τα φραγμένα διαστήματα της μορφής $[-M,M]$, όπου $M>0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση:

(α΄) Η παράγωγος της f για $x>0$ μπορεί να υπολογιστεί με χρήση των συνηθισμένων θεωρημάτων:

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{\sqrt{x}} - x^2\left(\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = 2x\cos\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Ανάλογα εξετάζουμε την περίπτωση $x<0$, οπότε $|x|<-x$. Η περίπτωση $x=0$ πρέπει να αντιμετωπιστεί με τον ορισμό της παραγώγου:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Το όριο προκύπτει άμεσα με χρήση του Κριτηρίου της Παρεμβολής. Επομένως, η παράγωγος υπάρχει παντού. Παρατηρήστε, επίσης, ότι αυτή είναι συνεχής, παντού εκτός του $x = 0$, από γνωστά θεωρήματα, αλλά και στο $x = 0$, καθώς

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0 + 0.$$

Τα όρια είναι και τα δύο 0 όπως προκύπτει από το Κριτήριο της Παρεμβολής. Επομένως, η $f'(x)$ είναι παντού συνεχής.

(β΄) Αφού η παράγωγος είναι συνεχής, από το Θεώρημα των Ακροτάτων θα είναι φραγμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-M, M]$. Επομένως, από γνωστό θεώρημα, θα είναι και Lipschitz συνεχής σε αυτό το διάστημα.

5. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα καταχρηστικά ολοκληρώματα

(α΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^x}{x^3}\,dx.$

(β΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x^3}\,dx.$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως η ολοκληρωτέα συνάρτηση τείνει στο άπειρο, όπως εύκολα προκύπτει με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital. Επομένως, το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα είναι άπειρο. Πιο αναλυτικά, έστω πως μετά το $K \in \mathbb{R}$ η ολοκληρωτέα γίνεται μεγαλύτερη της μονάδας. Η ύπαρξη του K εξασφαλίζεται από το ότι η ολοκληρωτέα τείνει στο ∞. Θα έχουμε:

$$\int_1^\infty \frac{e^x}{x^3}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{e^x}{x^3}\,dx = \lim_{h\to\infty}\left(\int_1^K \frac{e^x}{x^3}\,dx + \int_K^h \frac{e^x}{x^3}\,dx\right)$$
$$\geq \int_1^K \frac{e^x}{x^3}\,dx + \lim_{h\to\infty}\int_K^h dx = \int_1^K \frac{e^x}{x^3}\,dx + \lim_{h\to\infty}(h-k) = \infty.$$

Άρα, και το αρχικό ολοκλήρωμα θα είναι ∞.

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x^3}\,dx = \lim_{h\to 0^+}\int_h^1 \frac{e^x}{x^3}\,dx \geq \lim_{h\to 0^+}\int_h^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{h\to 0^+}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)_h^1 = \infty.$$

Άρα, και το αρχικό ολοκλήρωμα θα είναι ∞.

6. **(Διαφορική Εξίσωση)**

(α΄) *(1.5 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + (\cos x)y(x) = e^{-\sin x}\log x,$$

στο διάστημα $x > 0$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Ποιο είναι το όριο των ειδικών λύσεων της άνω ΔΕ καθώς $x \to \infty$;

Λύση:

(α΄) Η ΔΕ είναι γραμμική 1ης τάξης, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$y'(x) + (\cos x)y(x) = e^{-\sin x}\log x \Leftrightarrow e^{\sin x}y'(x) + e^{\sin x}(\cos x)y(x) = \log x$$
$$\Leftrightarrow \left(e^{\sin x}y(x)\right)' = \log x = (x\log x - x)' \Leftrightarrow y(x) = \frac{x(\log x - 1) + C}{e^{\sin x}}.$$

(β΄) Παρατηρούμε πώς στις άνω λύσεις, ο αριθμητής τείνει στο ∞, καθώς $x \to \infty$, ενώ ο παρονομαστής λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[e^{-1}, e]$. Επομένως, όλες οι λύσεις τείνουν στο ∞.

ΟΜΑΔΑ 3

1. **(Όριο)** *(1.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}(2+\cos x)\,dx}{h}.$$

Λύση: Παρατηρήστε πως η ολοκληρωτέα συνάρτηση τείνει στο άπειρο. Επομένως, και το ίδιο το ολοκλήρωμα τείνει στο άπειρο, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital, και έχουμε

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}(2+\cos x)\,dx}{h} = \lim_{h\to\infty} \frac{\sqrt{h}(2+\cos h)}{1} \geq \lim_{h\to\infty} \sqrt{h} = \infty.$$

Άρα, και το ζητούμενο όριο είναι άπειρο.

2. **(Αόριστο ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \arctan x\,dx.$$

Λύση:

$$\int \arctan x\,dx = \int (x)' \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(\log(x^2+1)\right)'\,dx$$
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C.$$

3. **(Ιδιότητα Κυρτών Συναρτήσεων)** *(1 μονάδα)* Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κυρτότητας συνάρτησης, ότι αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή, τότε είναι κυρτή και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(ax+b)$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$. Μην υποθέσετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Λύση:. Έστω $\theta\in[0,1]$ και $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. Παρατηρήστε πως

$$g(\theta x_1+(1-\theta)x_2) = f(a\theta x_1 + a(1-\theta)x_2 + \theta b + (1-\theta)b) = f(\theta(ax_1+b)+(1-\theta)(ax_2+b))$$
$$\leq \theta f(ax_1+b) + (1-\theta)f(ax_2+b) = \theta g(x_1) + (1-\theta)g(x_2).$$

Η ανισότητα προέκυψε από τον ορισμό της κυρτότητας για την f. Άρα, εξ ορισμού η g είναι κυρτή.

4. **(Συνέχεια Lipschitz)** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

(α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίστε την παράγωγο της f παντού στο $\mathbb{R}$ και να δείξετε ότι η παράγωγος είναι συνεχής παντού στο $\mathbb{R}$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Είναι η f Lipschitz συνεχής σε όλα τα φραγμένα διαστήματα της μορφής $[-M,M]$, όπου $M>0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση:

(α΄) Η παράγωγος της f για $x>0$ μπορεί να υπολογιστεί με χρήση των συνηθισμένων θεωρημάτων:

$$f'(x) = 4x^3\sin\frac{1}{\sqrt{x}} + x^4\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = 4x^3\sin\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x^2\sqrt{x}}{2}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Ανάλογα εξετάζουμε την περίπτωση $x<0$, οπότε $|x|<-x$. Η περίπτωση $x=0$ πρέπει να αντιμετωπιστεί με τον ορισμό της παραγώγου:

$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to0} x^3\sin\frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Το όριο προκύπτει άμεσα με χρήση του Κριτηρίου της Παρεμβολής. Επομένως, η παράγωγος υπάρχει παντού. Παρατηρήστε, επίσης, ότι αυτή είναι συνεχής, παντού εκτός του $x = 0$, από γνωστά θεωρήματα, αλλά και στο $x = 0$, καθώς

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(4x^3 \sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2\sqrt{x}}{2}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0 + 0.$$

Τα όρια είναι και τα δύο 0 όπως προκύπτει από το Κριτήριο της Παρεμβολής. Επομένως, η $f'(x)$ είναι παντού συνεχής.

(β΄) Αφού η παράγωγος είναι συνεχής, από το Θεώρημα των Ακροτάτων θα είναι φραγμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-M, M]$. Επομένως, από γνωστό θεώρημα, θα είναι και Lipschitz συνεχής σε αυτό το διάστημα.

5. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα καταχρηστικά ολοκληρώματα

(α΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^x}{x^3}\,dx.$

(β΄) *(1 μονάδα)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x^3}\,dx.$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως η ολοκληρωτέα συνάρτηση τείνει στο άπειρο, όπως εύκολα προκύπτει με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital. Επομένως, το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα είναι άπειρο. Πιο αναλυτικά, έστω πως μετά το $K \in \mathbb{R}$ η ολοκληρωτέα γίνεται μεγαλύτερη της μονάδας. Η ύπαρξη του K εξασφαλίζεται από το ότι η ολοκληρωτέα τείνει στο ∞. Θα έχουμε:

$$\int_1^\infty \frac{e^x}{x^3}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{e^x}{x^3}\,dx = \lim_{h\to\infty}\left(\int_1^K \frac{e^x}{x^3}\,dx + \int_K^h \frac{e^x}{x^3}\,dx\right)$$
$$\geq \int_1^K \frac{e^x}{x^3}\,dx + \lim_{h\to\infty}\int_K^h dx = \int_1^K \frac{e^x}{x^3}\,dx + \lim_{h\to\infty}(h-k) = \infty.$$

Άρα, και το αρχικό ολοκλήρωμα θα είναι ∞.

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x^3}\,dx = \lim_{h\to 0+}\int_h^1 \frac{e^x}{x^3}\,dx \geq \lim_{h\to 0+}\int_h^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{h\to 0+}\left(-\frac{1}{x}\right)_h^1 = \infty.$$

Άρα, και το αρχικό ολοκλήρωμα θα είναι ∞.

6. **(Διαφορική Εξίσωση)**

(α΄) *(1.5 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + (\cos x)y(x) = e^{-\sin x}\log x,$$

στο διάστημα $x > 0$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Ποιο είναι το όριο των ειδικών λύσεων της άνω ΔΕ καθώς $x \to \infty$;

Λύση:

(α΄) Η ΔΕ είναι γραμμική 1ης τάξης, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$y'(x) + (\cos x)y(x) = e^{-\sin x}\log x \Leftrightarrow e^{\sin x}y'(x) + e^{\sin x}(\cos x)y(x) = \log x$$
$$\Leftrightarrow \left(e^{\sin x}y(x)\right)' = \log x = (x\log x - x)' \Leftrightarrow y(x) = \frac{x(\log x - 1) + C}{e^{\sin x}}.$$

(β΄) Παρατηρούμε πώς στις άνω λύσεις, ο αριθμητής τείνει στο ∞, καθώς $x \to \infty$, ενώ ο παρονομαστής λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[e^{-1}, e]$. Επομένως, όλες οι λύσεις τείνουν στο ∞.

ΟΜΑΔΑ 4

1. **(Όριο)** *(1.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}(4-2\cos x)\,dx}{h}.$$

Άρα, και το ζητούμενο όριο είναι άπειρο.

Λύση: Παρατηρήστε πως η ολοκληρωτέα συνάρτηση τείνει στο άπειρο. Επομένως, και το ίδιο το ολοκλήρωμα τείνει στο άπειρο, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital, και έχουμε

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}(4-2\cos x)\,dx}{h} = \lim_{h\to\infty} \frac{\sqrt{h}(4-2\cos h)}{1} \geq \lim_{h\to\infty} \sqrt{h} = \infty.$$

2. **(Αόριστο ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \arctan x\,dx.$$

Λύση:

$$\int \arctan x\,dx = \int (x)' \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(\log(x^2+1)\right)'\,dx$$
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C.$$

3. **(Ιδιότητα Κυρτών Συναρτήσεων)** *(1 μονάδα)* Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κυρτότητας συνάρτησης, ότι αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή, τότε είναι κυρτή και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(ax+b)$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$. Μην υποθέσετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Λύση:. Έστω $\theta\in[0,1]$ και $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. Παρατηρήστε πως

$$g(\theta x_1+(1-\theta)x_2) = f(a\theta x_1 + a(1-\theta)x_2 + \theta b + (1-\theta)b) = f(\theta(ax_1+b)+(1-\theta)(ax_2+b))$$
$$\leq \theta f(ax_1+b) + (1-\theta)f(ax_2+b) = \theta g(x_1) + (1-\theta)g(x_2).$$

Η ανισότητα προέκυψε από τον ορισμό της κυρτότητας για την f. Άρα, εξ ορισμού η g είναι κυρτή.

4. **(Συνέχεια Lipschitz)** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

(α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίστε την παράγωγο της f παντού στο $\mathbb{R}$ και να δείξετε ότι η παράγωγος είναι συνεχής παντού στο $\mathbb{R}$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Είναι η f Lipschitz συνεχής σε όλα τα φραγμένα διαστήματα της μορφής $[-M,M]$, όπου $M>0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση:

(α΄) Η παράγωγος της f για $x\neq 0$ μπορεί να υπολογιστεί με χρήση των συνηθισμένων θεωρημάτων:

$$f'(x) = 4x^3\sin\frac{1}{x} + x^4\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-x^{-2}\right) = 4x^3\sin\frac{1}{x} - x^2\cos\frac{1}{x}.$$

Η περίπτωση $x=0$ πρέπει να αντιμετωπιστεί με τον ορισμό της παραγώγου:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^3\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Το όριο προκύπτει άμεσα με χρήση του Κριτηρίου της Παρεμβολής. Επομένως, η παράγωγος υπάρχει παντού. Παρατηρήστε, επίσης, ότι αυτή είναι συνεχής, παντού εκτός του $x=0$, από γνωστά θεωρήματα, αλλά και στο $x=0$, καθώς

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(4x^3\sin\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to 0}\left(-x^2\cos\frac{1}{x}\right) = 0+0.$$

Τα όρια είναι και τα δύο 0 όπως προκύπτει από το Κριτήριο της Παρεμβολής. Επομένως, η $f'(x)$ είναι παντού συνεχής.

(β΄) Αφού η παράγωγος είναι συνεχής, από το Θεώρημα των Ακροτάτων θα είναι φραγμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-M, M]$. Επομένως, από γνωστό θεώρημα, θα είναι και Lipschitz συνεχής σε αυτό το διάστημα.

5. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα καταχρηστικά ολοκληρώματα

(α΄) *(1 μονάδα)* $\int_1^\infty \frac{e^x}{x^2}\,dx.$

(β΄) *(1 μονάδα)* $\int_0^1 \frac{e^x}{x^2}\,dx.$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως η ολοκληρωτέα συνάρτηση τείνει στο άπειρο, όπως εύκολα προκύπτει με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital. Επομένως, το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα είναι άπειρο. Πιο αναλυτικά, έστω πως μετά το $K \in \mathbb{R}$ η ολοκληρωτέα γίνεται μεγαλύτερη της μονάδας. Η ύπαρξη του K εξασφαλίζεται από το ότι η ολοκληρωτέα τείνει στο ∞. Θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{e^x}{x^2}\,dx = \lim_{h\to\infty}\int_1^h \frac{e^x}{x^2}\,dx &= \lim_{h\to\infty}\left(\int_1^K \frac{e^x}{x^2}\,dx + \int_K^h \frac{e^x}{x^2}\,dx\right)\\ &\geq \int_1^K \frac{e^x}{x^2}\,dx + \lim_{h\to\infty}\int_K^h dx = \int_1^K \frac{e^x}{x^2}\,dx + \lim_{h\to\infty}(h-k) = \infty.\end{aligned}$$

Άρα, και το αρχικό ολοκλήρωμα θα είναι ∞.

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x^2}\,dx = \lim_{h\to 0^+}\int_h^1 \frac{e^x}{x^2}\,dx \geq \lim_{h\to 0^+}\int_h^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{h\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)_h^1 = \infty.$$

Άρα, και το αρχικό ολοκλήρωμα θα είναι ∞.

6. **(Διαφορική Εξίσωση)**

(α΄) *(1.5 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + (\cos x)y(x) = e^{-\sin x}\log x,$$

στο διάστημα $x > 0$.

(β΄) *(1 μονάδα)* Ποιο είναι το όριο των ειδικών λύσεων της άνω ΔΕ καθώς $x \to \infty$;

Λύση:

(α΄) Η ΔΕ είναι γραμμική 1ης τάξης, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned}y'(x) + (\cos x)y(x) = e^{-\sin x}\log x &\Leftrightarrow e^{\sin x}y'(x) + e^{\sin x}(\cos x)y(x) = \log x\\ &\Leftrightarrow \left(e^{\sin x}y(x)\right)' = \log x = (x\log x - x)' \Leftrightarrow y(x) = \frac{x(\log x - 1) + C}{e^{\sin x}}.\end{aligned}$$

(β΄) Παρατηρούμε πώς στις άνω λύσεις, ο αριθμητής τείνει στο ∞, καθώς $x \to \infty$, ενώ ο παρονομαστής λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[e^{-1}, e]$. Επομένως, όλες οι λύσεις τείνουν στο ∞.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020-2021

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Διάρκεια εξέτασης: 100 ΛΕΠΤΑ.
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
5. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
6. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
7. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όρια)**

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το όριο

   $$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}},$$

   όπου το *ακέραιο μέρος* $\lfloor x\rfloor$ του x είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος από τον x.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Να βρείτε τιμές που μπορούν να πάρουν οι πραγματικές παραμέτροι a, b ώστε να ισχύει

   $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin(x+b)}{x-\frac{\pi}{2}}=10.$$

   (Υπάρχουν πολλές σωστές απαντήσεις και αρκεί να βρείτε μια.)

2. **(Αόριστο ολοκλήρωμα)** *(1.5 μονάδα)* Υπολογίστε το ακόλουθο αόριστο ολοκλήρωμα:

   $$\int(\sin x)^3(\cos x)^7\,dx.$$

   Κατόπιν, κάνετε επαλήθευση του αποτελέσματος παραγωγίζοντας.

3. **(Ορισμένα ολοκληρώματα)**

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να αποδείξετε ότι

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)^{124}}{(\cos x)^{124}+(\sin x)^{124}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x)^{124}}{(\cos x)^{124}+(\sin x)^{124}}\,dx,$$

   κάνοντας μια απλή αντικατάσταση της μεταβλητής ολοκλήρωσης. Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τα άνω ολοκληρώματα.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου σκέλος (ακόμα και αν δεν το έχετε αποδείξει), να δείξετε ότι

   $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)^{124}}{(\cos x)^{124}+(\sin x)^{124}}\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

4. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα)**

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

   $$\int \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{A}{x} \right) \, dx,$$

   όπου το A είναι μια άγνωστη πραγματική παράμετρος. Επομένως, η απάντηση θα εμφανίζει την παράμετρο A.

   (β΄) *(1.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

   $$\int_1^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{A}{x} \right) \, dx,$$

   λαμβάνοντας διαφορετικές περιπτώσεις για την τιμή της παραμέτρου A.

5. **(Διαφορική εξίσωση)** Δίνεται η ακόλουθη διαφορική εξίσωση (ΔΕ):

   $$z'(x) + (\sin x) z(x) = (\sin x) z^2(x),$$

   όπου $x \in \mathbb{R}$.

   (α΄) *(2 μονάδες)* Υπολογίστε τις ειδικές λύσεις που προκύπτουν αν γίνει η αντικατάσταση $y(x) = \frac{1}{z(x)}$. Αν εισάγετε μια παράμετρο C, προσδιορίστε το σύνολο των τιμών που μπορεί αυτή να λάβει.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Προσδιορίστε μια ειδική λύση της άνω ΔΕ που δεν μπορεί να προκύψει από την αντικατάσταση του προηγούμενου σκέλους.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad\forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$

$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow f(x)>M.$ $\qquad\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\ 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\quad\triangleq\quad f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\\x_2-x_0&y_2-y_0&z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c}u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\mathrm{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix}x_0&y_0&z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_0&y_0\\x_1&y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020-2021
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΑΝ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ Ακ. Έτους 2020-2021

ΟΜΑΔΑ 1

1. **(Όρια)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}},$$

όπου το *ακέραιο μέρος* $\lfloor x\rfloor$ του x είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος από τον x.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Να βρείτε τιμές που μπορούν να πάρουν οι πραγματικές παραμέτροι a, b ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin(x+b)}{x-\frac{\pi}{2}}=10.$$

(Υπάρχουν πολλές σωστές απαντήσεις και αρκεί να βρείτε μια.)

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$0\le x-\lfloor x\rfloor<1\Rightarrow 0\le\frac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x}},$$

και με χρήση του Κριτηρίου της Παρεμβολής προκύπτει πως

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}}=0.$$

(β΄) Μια επιλογή είναι η $a=10$, $b=-\frac{\pi}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση, πράγματι

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{10\sin(x-\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}=10,$$

χρησιμοποιώντας το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

2. **(Αόριστο ολοκλήρωμα)** *(1.5 μονάδα)* Υπολογίστε το ακόλουθο αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int\sin^3 x\cos^7 x\,dx.$$

Κατόπιν, κάνετε επαλήθευση του αποτελέσματος παραγωγίζοντας.

Λύση:

$$\begin{aligned}\int\sin^3 x\cos^7 x\,dx&=\int(1-\cos^2 x)\cos^7 x\sin x\,dx=-\int(1-y^2)y^7\,dy=\int(y^9-y^7)\,dy\\&=\frac{y^{10}}{10}-\frac{y^8}{8}+C=\frac{\cos^{10}x}{10}-\frac{\cos^8 x}{8}+C.\end{aligned}$$

Η τρίτη ισότητα προέκυψε θέτοντας $y=\cos x$, επομένως $dy=-\sin x\,dx$.

Παραγωγίζοντας, πράγματι βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos^{10}x}{10}-\frac{\cos^8 x}{8}\right)'&=\cos^9 x(-\sin x)-\cos^7 x(-\sin x)=\sin x(\cos^7 x-\cos^9 x)\\&=\sin x(1-\cos^2 x)\cos^7 x=\sin^3 x\cos^7 x.\end{aligned}$$

3. **(Αόριστο ολοκλήρωμα)** *(1.5 μονάδα)* Υπολογίστε το ακόλουθο αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \cos^3 x \sin^7 x \, dx.$$

Κατόπιν, κάνετε επαλήθευση του αποτελέσματος παραγωγίζοντας.

Λύση:

$$\int \cos^3 x \sin^7 x \, dx = \int (1-\sin^2 x) \sin^7 x \cos x \, dx = \int (1-y^2) y^7 \, dy = \int (-y^9 + y^7) \, dy$$
$$= -\frac{y^{10}}{10} + \frac{y^8}{8} + C = -\frac{\sin^{10} x}{10} + \frac{\sin^8 x}{8} + C.$$

Η τρίτη ισότητα προέκυψε θέτοντας $y = \sin x$, επομένως $dy = \cos x \, dx$.

Παραγωγίζοντας, πράγματι βρίσκουμε

$$\left(-\frac{\sin^{10} x}{10} + \frac{\sin^8 x}{8}\right)' = -\sin^9 x(\cos x) + \sin^7 x(\cos x) = \cos x(\sin^7 x - \sin^9 x)$$
$$= \cos x (1-\sin^2 x) \sin^7 x = \cos^3 x \sin^7 x.$$

4. **(Ορισμένα ολοκληρώματα)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{124}}{(\cos x)^{124} + (\sin x)^{124}} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{124}}{(\cos x)^{124} + (\sin x)^{124}} \, dx,$$

κάνοντας μια απλή αντικατάσταση της μεταβλητής ολοκλήρωσης. Δεν χρειάζεται να υπολογίστε τα άνω ολοκληρώματα.

(β΄) *(1 μονάδα)* Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου σκέλος (ακόμα και αν δεν το έχετε αποδείξει), να δείξετε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{124}}{(\cos x)^{124} + (\sin x)^{124}} \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Λύση:

(α΄) Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{\pi}{2} - x$, επομένως $dy = -dx$, $x = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$, και $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0$. Επομένως,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{124}}{(\cos x)^{124} + (\sin x)^{124}} \, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^{124}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos^{124}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^{124}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{124}}{(\sin x)^{124} + (\cos x)^{124}} \, dx,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

(β΄) Προσθέτοντας τα δύο ολοκληρώματα,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{124} x}{\cos^{124} x + \sin^{124} x} \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{124} x}{\cos^{124} x + \sin^{124} x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{124} x + \sin^{124} x}{\cos^{124} x + \sin^{124} x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

και αφού, επιπλέον, από το πρώτο σκέλος, τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα, προκύπτει το ζητούμενο.

5. **(Ορισμένα ολοκληρώματα)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{88}}{(\cos x)^{88} + (\sin x)^{88}} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{88}}{(\cos x)^{88} + (\sin x)^{88}} \, dx,$$

κάνοντας μια απλή αντικατάσταση της μεταβλητής ολοκλήρωσης. Δεν χρειάζεται να υπολογίστε τα άνω ολοκληρώματα.

(β΄) *(1 μονάδα)* Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου σκέλος (ακόμα και αν δεν το έχετε αποδείξει), να δείξετε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{88}}{(\cos x)^{88} + (\sin x)^{88}}\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Λύση:

(α΄) Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{\pi}{2} - x$, επομένως $dy = -dx$, $x = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$, και $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{88}}{(\cos x)^{88} + (\sin x)^{88}}\, dx &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^{88}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos^{88}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^{88}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^{88}}{(\sin x)^{88} + (\cos x)^{88}}\, dx,\end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

(β΄) Προσθέτοντας τα δύο ολοκληρώματα,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{88} x}{\cos^{88} x + \sin^{88} x}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{88} x}{\cos^{88} x + \sin^{88} x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{88} x + \sin^{88} x}{\cos^{88} x + \sin^{88} x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

και αφού, επιπλέον, από το πρώτο σκέλος, τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα, προκύπτει το ζητούμενο.

6. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα)**

(α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{A}{x}\right) dx,$$

όπου το A είναι μια άγνωστη πραγματική παράμετρος. Επομένως, η απάντηση θα εμφανίζει την παράμετρο A.

(β΄) *(1.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{A}{x}\right) dx,$$

λαμβάνοντας διαφορετικές περιπτώσεις για την τιμή της παραμέτρου A.

Λύση:

(α΄) Έχουμε

$$\int \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{A}{x}\right) dx = \int \left(\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) - A\log x\right)' dx = \log\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^A} + C.$$

(β΄) Με βάση το προηγούμενο σκέλος, έχουμε

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{A}{x}\right) dx = \lim_{x\to\infty} \log\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^A} - \log\sqrt{2},$$

και παίρνουμε περιπτώσεις:

i. Αν $A = 1$, τότε

$$\lim_{x\to\infty} \log\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^A} = \lim_{x\to\infty} \log\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \log 1 = 0.$$

ii. Αν $A > 1$, παρατηρούμε πως όταν $x > 1$

$$0 < \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^A} < \frac{\sqrt{2}x}{x^A} = \sqrt{2}x^{1-A},$$

που, με χρήση του Κριτηρίου της Παρεμβολής, για $x \to \infty$ τείνει στο 0 από τις θετικές τιμές, άρα το αρχικό όριο τείνει στο $-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty$.

iii. Αντίθετα, όταν $A < 1$, έχουμε

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^A} > \frac{x}{x^A} = x^{1-A},$$

που τείνει στο ∞ όταν $x \to \infty$, άρα και το άνω όριο τείνει στο άπειρο.

Συνοψίζοντας,

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{A}{x} \right) dx = \begin{cases} \infty, & A < 1, \\ -\log\sqrt{2}, & A = 1, \\ -\infty, & A > 1. \end{cases}$$

Ουσιαστικά, το δοσμένο καταχρηστικό ολοκληρώματα είναι η διαφορά δύο άπειρων καταχρηστικών ολοκληρωμάτων, και επιλέγοντας τον παράγοντα A που εμφανίζεται στο δεύτερο μπορούμε να φροντίσουμε ώστε οι ολοκληρωτέες ποσότητες να αναιρούνται σχεδόν πλήρως. Αυτό γίνεται για $A = 1$. Για όλες τις άλλες τιμές, υπερισχύει το ένα από τα δύο καταχρηστικά ολοκληρώματα.

7. **(Διαφορική εξίσωση)** Δίνεται η ακόλουθη διαφορική εξίσωση (ΔΕ):

$$z'(x) + (\sin x)z(x) = (\sin x)z^2(x),$$

όπου $x \in \mathbb{R}$.

(α΄) *(2 μονάδες)* Υπολογίστε τις ειδικές λύσεις που προκύπτουν αν γίνει η αντικατάσταση $y(x) = \frac{1}{z(x)}$. Αν εισάγετε μια παράμετρο C, προσδιορίστε το σύνολο των τιμών που μπορεί αυτή να λάβει.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Προσδιορίστε μια ειδική λύση της άνω ΔΕ που δεν μπορεί να προκύψει από την αντικατάσταση του προηγούμενου σκέλους.

Λύση:

(α΄) Θέτοντας $y(x) = \frac{1}{z(x)}$, παρατηρούμε πως $y'(x) = -\frac{1}{z^2(x)}z'(x)$. Επομένως,

$$z'(x) + (\sin x)z(x) = (\sin x)z^2(x) \Leftrightarrow \frac{z'(x)}{z^2(x)} + \frac{\sin x}{z(x)} = \sin x \Leftrightarrow -y'(x) + (\sin x)y(x) = \sin x$$
$$\Leftrightarrow e^{\cos x}y'(x) - e^{\cos x}(\sin x)y(x) = (-\sin x)e^{\cos x} \Leftrightarrow (y(x)e^{\cos x})' = (e^{\cos x})' \Leftrightarrow y(x)e^{\cos x} = e^{\cos x} + C$$
$$\Leftrightarrow y(x) = 1 + Ce^{-\cos x} \Leftrightarrow z(x) = \frac{1}{1+Ce^{-\cos x}}.$$

Παρατηρούμε πως πρέπει ο παρονομαστής $1+Ce^{-\cos x}$ να μην μηδενίζεται πουθενά. Επομένως, $C \notin [-e, -e^{-1}]$.

(β΄) Μια λύση που η άνω μέθοδος δεν εντόπισε είναι η $z(x) = 0$, αφού για αυτήν δεν μπορεί να γίνει η αντικατάσταση $y(x) = \frac{1}{z(x)}$.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ 2020-2021

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Διάρκεια εξέτασης: 120 ΛΕΠΤΑ.
2. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
3. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
4. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
5. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
6. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
7. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όρια)** *(2 μονάδα)* Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, χρησιμοποιώντας ενδεχομένως άλλα γνωστά όρια, αλλά χωρίς να χρησιμοποιήσετε παραγωγίσεις:
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{x^2+2x+5}}{\sqrt{x}}\right), \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\tan x}{\sin x\cos x}\right).$$

2. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** *(2 μονάδα)* Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα
$$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \int (\sin 2t)(\cos t)\,dt.$$

3. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** *(2 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τα ακόλουθα καταχρηστικά ολοκληρώματα:
$$\int_0^\infty \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{x^3+2}}, \quad \int_2^\infty \frac{1}{\log x}\,dx.$$

4. **(Διαφορική Εξίσωση)** *(2 μονάδα)* Να υπολογίσετε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης
$$(\tan x)y'(x)+y(x)=\sin^2 x$$
στο διάστημα $(0,\pi/2)$. Ακολούθως, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να λάβει το όριο των ειδικών λύσεων καθώς $x\to 0^+$.

5. **(Σειρές)** *(2 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή όχι:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log n}{1+2\log n}\right)^n.$$
Υπόδειξη: πρέπει δηλαδή να προσδιορίσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια ακολουθιών, χωρίς να προσδιορίσετε την τιμή τους.
$$\lim_{K\to\infty}\sum_{n=1}^{K}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \quad \lim_{K\to\infty}\sum_{n=1}^{K}\left(\frac{\log n}{1+2\log n}\right)^n.$$

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\ 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\ \triangleq\ f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_{\|}=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_{\perp}=A-A_{\|},\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\\x_2-x_0&y_2-y_0&z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c}u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix}x_0&y_0&z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_0&y_0\\x_1&y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2020-2021
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Λύσεις

1. **Όρια)** *(2 μονάδα)* Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, χρησιμοποιώντας ενδεχομένως άλλα γνωστά όρια, αλλά χωρίς να χρησιμοποιήσετε παραγωγίσεις:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{x^2+2x+5}}{\sqrt{x}}\right), \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\tan x}{\sin x\cos x}\right).$$

Λύση:

(α΄)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{x^2+2x+5}}{\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{5-x^2-2x-5}{\sqrt{x}(\sqrt{5}+\sqrt{x^2+2x+5})}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{5}+\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{0}{2\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

(β΄)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\tan x}{\sin x\cos x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\frac{1+\frac{\tan x}{x}}{\cos x}\right)\\ &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}}{\cos x}\right) = 1\times\frac{1+1\times 1}{1} = 1.\end{aligned}$$

2. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** *(2 μονάδα)* Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \int(\sin 2t)(\cos t)\,dt.$$

Λύση:

(α΄) Θέτουμε $t=\sin\theta$, οπότε $dt=\cos\theta d\theta$, και με αντικατάσταση έχουμε

$$\int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int\frac{\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int\sin^2\theta\,d\theta = \int\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \int\frac{d\theta}{2}-\int\frac{\cos 2\theta d\theta}{2} = \frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}+C.$$

(β΄)

$$\int\sin 2t\cos t\,dt = \int\left(\frac{\sin 3t}{2}+\frac{\sin t}{2}\right)dt = \int\left(-\frac{\cos 3t}{6}-\frac{\cos t}{2}\right)'dt = -\frac{\cos 3t}{6}-\frac{\cos t}{2}+C.$$

3. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** *(2 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τα ακόλουθα καταχρηστικά ολοκληρώματα:

$$\int_0^\infty\frac{3x^2\,dx}{\sqrt{x^3+2}}, \quad \int_2^\infty\frac{1}{\log x}\,dx.$$

Λύση:

(α΄) Κατά τα γνωστά από τη θεωρία:

$$\int_0^\infty\frac{3x^2\,dx}{\sqrt{x^3+2}} = \int_0^\infty\frac{(x^3+2)'}{\sqrt{x^3+2}}\,dx = \int_0^\infty\left(2\sqrt{x^3+2}\right)'\,dx = \infty.$$

(β΄) Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα δεν μπορεί αν υπολογιστεί σε κλειστή μορφή, παρατηρούμε όμως πως

$$\int_2^\infty \frac{1}{\log x}\,dx > \int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty,$$

άρα και το δοσμένο ολοκλήρωμα ισούται με ∞.

4. **(Διαφορική Εξίσωση)** *(2 μονάδα)* Να υπολογίσετε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(\tan x)y'(x) + y(x) = \sin^2 x$$

στο διάστημα $(0, \pi/2)$. Ακολούθως, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να λάβει το όριο των ειδικών λύσεων καθώς $x \to 0^+$.

Λύση: Παρατηρούμε πως

$$(\tan x)y'(x) + y(x) = \sin^2 x \Leftrightarrow (\sin x)y'(x) + (\cos x)y(x) = (\sin x)^2 \cos x \Leftrightarrow ((\sin x)y(x))' = \left(\frac{\sin^3 x}{3}\right)'$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{\frac{\sin^3 x}{3} + C}{\sin x} \Leftrightarrow y(x) = \frac{\sin^2 x}{3} + \frac{C}{\sin x}.$$

Σχετικά με τα όρια των λύσεων, παρατηρούμε πως

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \begin{cases} \infty, & C > 0, \\ 0, & C = 0, \\ -\infty, & C < 0. \end{cases}$$

5. **(Σειρές)** *(2 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή όχι:

$$\sum_{n=1}^\infty \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \quad \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\log n}{1+2\log n}\right)^n.$$

Υπόδειξη: πρέπει δηλαδή να προσδιορίσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια ακολουθιών, χωρίς να προσδιορίσετε την τιμή τους.

$$\lim_{K\to\infty} \sum_{n=1}^K \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right), \quad \lim_{K\to\infty} \sum_{n=1}^K \left(\frac{\log n}{1+2\log n}\right)^n.$$

Λύση:

(α΄) Έστω η ακολουθία $a(k) = \sum_{n=1}^k \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$. Παρατηρήστε πως

$$a(k) = \begin{cases} 1, & k = 4n+1,\ k = 4n+2, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & k = 4n+3, k = 4n+4, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Αφού η $a(k)$ είναι περιοδική, τελικά η σειρά δεν συγκλίνει.

(β΄) Έστω $a(n) = \left(\frac{\log n}{1+2\log n}\right)^n$. Από το Κριτήριο της Ρίζας, έχουμε

$$(a(n))^{\frac{1}{n}} = \frac{\log n}{1+2\log n} \to \frac{1}{2},$$

καθώς $n \to \infty$, επομένως η σειρά συγκλίνει.