ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2019-2020
ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όρια)** *(3 μονάδες)* Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

   (α′) *(1 μονάδα)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{10+5e^{\frac{1}{x^3}}}$.

   (β′) *(1 μονάδα)* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(\log n)^7}{\sqrt{n}}$. Μην χρησιμοποιήσετε, στον υπολογισμό, άλλα γνωστά σας όρια που αφορούν την λογαριθμική συνάρτηση.

   (γ′) *(1 μονάδα)* $\lim_{h\to 0^+} \sup_{\{0<x<h\}} \sin\dfrac{1}{x}$. Παρατηρήστε οτι η συνάρτηση $g(h) = \sup_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x}$ της οποίας το όριο θέλουμε να υπολογίσουμε λαμβάνει, στη θέση h, το supremum όλων των τιμών που λαμβάνει η συνάρτηση $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ στο διάστημα $(0,h)$.

2. **(Αόριστο Ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$.

3. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^3 \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$$

4. **(Διαφορική Εξίσωση)** *(2 μονάδες)*

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

   $$(\tan y(x))y'(x) = x \sin x.$$

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Να βρείτε την ειδική λύση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* Να δείξετε ότι δεν υπάρχει καμία ειδική λύση που να ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

5. **(Πολυώνυμο Taylor)** *(1.5 μονάδα)*

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο Taylor 4ου βαθμού της συνάρτησης $f(x) = xe^x$ στη θέση $x_0 = 1$.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Να γράψετε ένα τύπο για το πολυώνυμο Taylor n-οστου βαθμού της συνάρτησης $f(x) = xe^x$ στη θέση $x_0 = 1$.

6. **(Σειρές)** *(1.5 μονάδα)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:

   $$\sum \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \sum \frac{n^3 + n^2 + 1}{n!}.$$

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\ \triangleq\ f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\\x_2-x_0&y_2-y_0&z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c}u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\text{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix}x_0&y_0&z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_0&y_0\\x_1&y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2019-2020
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων Φεβρουαρίου Ακ. Έτους 2019-2020

1. **(Όρια)** *(3 μονάδες)* Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

(α΄) *(1 μονάδα)* $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{10+5e^{\frac{1}{x^3}}}$.

(β΄) *(1 μονάδα)* $\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^7}{\sqrt{n}}$. Μην χρησιμοποιήσετε, στον υπολογισμό, άλλα γνωστά σας όρια που αφορούν την λογαριθμική συνάρτηση.

(γ΄) *(1 μονάδα)* $\lim_{h\to 0^+} \sup_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x}$. Παρατηρήστε οτι η συνάρτηση $g(h) = \sup_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x}$ της οποίας το όριο θέλουμε να υπολογίσουμε λαμβάνει, στη θέση h, το supremum όλων των τιμών που λαμβάνει η συνάρτηση $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ στο διάστημα $(0, h)$.

Λύση:

(α΄) Θα υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια. Καταρχάς,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{10+5e^{\frac{1}{x^3}}} = 0,$$

διότι $\tan 0 = 0$ και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = \infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^3}} = \infty.$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x}{10+5e^{\frac{1}{x^3}}} = \left(\lim_{x\to 0^-} \tan x\right)\left(\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{10+5e^{\frac{1}{x^3}}}\right) = 0 \times \frac{1}{10+0} = 0.$$

Επομένως, το δοσμένο όριο υπάρχει, και ισούται με 0.

(β΄) Θα εφαρμόσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^7}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7(\log n)^6 \frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\times 7(\log n)^6}{\sqrt{n}}$$
$$= \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{2^6 7! \log n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^6 7! \frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^7 7!}{\sqrt{n}} = 0.$$

Έναλλακτικά, παρατηρήστε πως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^7}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log n}{n^{\frac{1}{14}}}\right)^7 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{1}{14}}}\right)^7 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{14}n^{-\frac{13}{14}}}\right)^7 = \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{14}{n^{\frac{1}{14}}}\right)\right)^7 = 0^7 = 0.$$

(γ΄) Παρατηρούμε πως

$$\lim_{h\to 0^+} \sup_{0<x<h} \sin\frac{1}{x} = 1,$$

διότι για κάθε h υπάρχει κάποιο $x \in (0, h)$ τέτοιο ώστε $\sin\frac{1}{x} = 1$, επομένως η συνάρτηση

$$g(h) = \sup_{0<x<h} \sin\frac{1}{x} = 1$$

για κάθε $h > 0$.

2. **(Αόριστο Ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$.

   Λύση: Θέτουμε $t = 1+\sqrt{x}$, επομένως $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = \int 2\sqrt{t}(t-1)\,dt = 2\int \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right)dt = 2\int \left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)' dt = \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{4}{5}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

   Πράγματι,

$$\left(\frac{4}{5}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{2\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}} - \frac{2\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{x}}$$
$$= \sqrt{1+\sqrt{x}}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{1+\sqrt{x}}.$$

3. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^3 \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$$

   Λύση: Κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχουμε

$$\int_0^3 \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \lim_{h\to 3^-}\int_0^h \frac{(x+5)}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$$

   Σχετικά με το ολοκλήρωμα, θέτουμε $x = 3\sin\theta$, επομένως $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$, $x = h \Rightarrow \theta = \arcsin\frac{h}{3}$, και $dx = 3\cos\theta d\theta$, επομένως

$$\int_0^h \frac{(x+5)}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int_0^{\arcsin\frac{h}{3}} \frac{3\sin\theta+5}{3|\cos\theta|}3\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\arcsin\frac{h}{3}} (3\sin\theta+5)\,d\theta = \left[-3\cos\theta+5\theta\right]_0^{\arcsin\frac{h}{3}}.$$

   Στα άνω, χρησιμοποιήσαμε το ότι σε όλο το διάστημα ολοκλήρωσης $\theta \in [0,\pi/2)$, επομένως $\cos\theta > 0$. Το καταχρηστικό ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_0^3 \frac{x+5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \lim_{h\to 3^-}\left[-3\cos\theta+5\theta\right]_0^{\arcsin\frac{h}{3}} = -3\cos\frac{\pi}{2} + 5\frac{\pi}{2} + 3\cos 0 - 0 = \frac{5\pi}{2} + 3.$$

4. **(Διαφορική Εξίσωση)** *(2 μονάδες)*

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(\tan y(x))y'(x) = x\sin x.$$

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* Να βρείτε την ειδική λύση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* Να δείξετε ότι δεν υπάρχει καμία ειδική λύση που να ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$.

   Λύση:

   (α΄) Παρατηρούμε πως

$$(\tan y(x))y'(x) = x\sin x \Leftrightarrow \tan y(x)dy = x\sin x dx \Leftrightarrow \int \tan y(x)\,dy = \int x\sin x\,dx$$
$$\Leftrightarrow -\log(|\cos y(x)|) + C = -\int x(\cos x)'\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x$$
$$\Leftrightarrow \log(|\cos y(x)|) = x\cos x - \sin x + C \Leftrightarrow \cos y(x) = \pm e^{x\cos x - \sin x + C}$$
$$\Leftrightarrow \cos y(x) = Ce^{x\cos x - \sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(β΄) Με αντικατάσταση στη γενική λύση, έχουμε:

$$\cos 0 = Ce^{0\cos 0 - \sin 0} \Leftrightarrow C = 1.$$

(γ΄) Παρατηρούμε πως η συνάρτηση $x\cos x$ λαμβάνει αυθαίρετα μεγάλες τιμές στο $\mathbb{R}$. Επομένως, όποια τιμή και να επιλέξουμε για το C, υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες

$$|Ce^{x\cos x - \sin x}| > 1,$$

επομένως δεν θα έχει λύση ως προς $y(x)$ η εξίσωση $\cos y(x) = \left[Ce^{x\cos x - \sin x}\right]$, αφού $|\cos\theta| \leq 1$.

5. **(Πολυώνυμο Taylor)** *(1.5 μονάδα)*

(α΄) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο Taylor 4ου βαθμού της συνάρτησης $f(x) = xe^x$ στη θέση $x_0 = 1$.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* Να γράψετε ένα τύπο για το πολυώνυμο Taylor n-οστου βαθμού της συνάρτησης $f(x) = xe^x$ στη θέση $x_0 = 1$.

Λύση:

(α΄) Έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) &= xe^x \Rightarrow f(1) = e, \\
f'(x) &= e^x + xe^x \Rightarrow f'(1) = 2e, \\
f''(x) &= e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x \Rightarrow f''(1) = 3e, \\
f'''(x) &= 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x \Rightarrow f'''(1) = 4e, \\
f^{(4)}(x) &= 3e^x + e^x + xe^x = 4e^x + xe^x \Rightarrow f^{(4)} = 5e,
\end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)(x-1)}{4!}(x-1)^4 \\
&= e\left[1 + 2(x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{4}{3!}(x-1)^3 + \frac{5}{4!}(x-1)^4\right].
\end{aligned}$$

(β΄) Παρατηρούμε ότι στη γενική περίπτωση

$$f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x \Rightarrow f^{(n)}(1) = (n+1)e,$$

επομένως

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e(k+1)}{k!}(x-1)^k.$$

6. **(Σειρές)** *(1.5 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνουν οι σειρές

(α΄) *(1 μονάδα)* $\sum \frac{1}{n}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

(β΄) *(0.5 μονάδα)* $\sum \frac{n^3 + n^2 + 1}{n!}$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{1}{n} = \cos 0 = 1,$$

επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο της σύγκρισης στο όριο η δοσμένη σειρά αποκλίνει, αφού αποκλίνει η αρμονική σειρά $\sum \frac{1}{n}$.

(β΄) Παρατηρούμε πως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3 + (n+1)^2 + 1}{(n+1)!}}{\frac{n^3 + n^2 + 1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \times \frac{\frac{(n+1)^3}{n^3} + \frac{(n+1)^2}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} = 0 \times 1 = 0,$$

επομένως, σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου, η σειρά συγκλίνει.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019-2020
ΑΝ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 100 ΛΕΠΤΑ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Μικρό όμικρον)** Στην Πληροφορική συχνά χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό: αν $f(n)$ και $g(n)$ είναι δύο θετικές ακολουθίες, τότε γράφουμε $f(n) = o(g(n))$ αν ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, δηλαδή αν για μεγάλες τιμές του n, η ακολουθία $f(n)$ είναι πολύ μικρότερη της ακολουθίας $g(n)$. Παρατηρήστε ότι το $o(\cdot)$ ΔΕΝ εκφράζει κάποια άγνωστη συνάρτηση, αλλά είναι ένας απλός συμβολισμός, με τον οποίο μπορούμε να γράψουμε συνοπτικά μια σχέση μεταξύ δύο ακολουθιών.

   Για κάθε μια από τις ακόλουθες προτάσεις, είτε αποδείξτε ότι είναι σωστή, είτε δώστε ένα αντιπαράδειγμα που να δείχνει ότι είναι λάθος:

   (α΄) *(1 μονάδα)* Αν $f(n)$ είναι ένα πολυώνυμο του n και $g(n) = e^n$, τότε $f(n) = o(g(n))$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Αν $f_1(n) = o(g(n))$ και $f_2(n) = o(g(n))$, τότε και $f_1(n)f_2(n) = o(g(n))$.

   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* Αν $f(n) = o(g(n))$ και $g(n) = o(h(n))$, τότε και $f(n) = o(h(n))$.

   (δ΄) *(0.5 μονάδα)* Αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, τότε $a_n = o(1)$.

2. **(Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

   (α΄) *(1 μονάδα)* $\int t^2 \cos t \, dt$.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} t^2 \cos t \, dt$.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} t^2 \tan t \, dt$. (Υπόδειξη: δεν μπορεί να υπολογιστεί παράγουσα για την ολοκληρωτέα συνάρτηση.)

3. **(Καρπούζια)** Το Διεθνές Ινστιτούτο Βαρέων Φρούτων Αμαλιάδος έχει ορίσει ως πρότυπο σχήμα ενός πλήρως γινομένου αυγουστιάτικου καρπουζιού το στερεό που προκύπτει από την περιστροφή της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{300\left(1 - \frac{(x-20)^4}{20^4}\right)}, \quad 0 \le x \le 40,$$

περί τον άξονα των x.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Δώστε ένα τύπο για τον όγκο του άνω καρπουζιού ως ολοκλήρωμα.

(β΄) *(1 μονάδα)* Υπολογίστε το άνω ολοκλήρωμα.

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Ποιες είναι οι μικρότερες δυνατές διαστάσεις ενός ορθογωνίου κιβωτίου στο οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε το άνω καρπούζι; Αγνοήστε το πάχος των τοιχωμάτων του κιβωτίου.

4. **(Κορωνοϊός)** Έστω πως η διάδοση του κορωνοϊού σε μια χώρα περιγράφεται με την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$y'(x) = y^2(x)(1 - y(x)),$$

όπου x ο χρόνος και $y(x) \in [0,1]$ είναι το ποσοστό του πληθυσμού που έχει μολυνθεί.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Βρείτε συντελεστές A, B, C, για τους οποίους, για κάθε x, ισχύει

$$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}.$$

(β΄) *(1.5 μονάδα)* Βρείτε μια εξίσωση για τη γενική λύση της άνω ΔΕ. Δεν χρειάζεται να λύσετε την εξίσωση που θα βρείτε ως προς τη γενική λύση. Αναφέρετε τις παραδοχές που κάνατε.

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Υπάρχουν λύσεις της άνω ΔΕ που δεν περιλαμβάνονται στην άνω γενική λύση, λόγω των παραδοχών που έχετε κάνει;

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^n m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^n M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^n f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\ \ 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\ \ \triangleq\ \ f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^x Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^u P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^x P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^n f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^\infty(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c} u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\text{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019-2020
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΑΝΑΠΛ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων Σεπτεμβρίου Ακ. Έτους 2019-2020

1. **(Μικρό όμικρον)** Στην Πληροφορική συχνά χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό: αν $f(n)$ και $g(n)$ είναι δύο θετικές ακολουθίες, τότε γράφουμε $f(n) = o(g(n))$ αν ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, δηλαδή αν για μεγάλες τιμές του n, η ακολουθία $f(n)$ είναι πολύ μικρότερη της ακολουθίας $g(n)$. Παρατηρήστε ότι το $o(\cdot)$ ΔΕΝ εκφράζει κάποια άγνωστη συνάρτηση, αλλά είναι ένας απλός συμβολισμός, με τον οποίο μπορούμε να γράψουμε συνοπτικά μια σχέση μεταξύ δύο ακολουθιών.

   Για κάθε μια από τις ακόλουθες προτάσεις, είτε αποδείξτε ότι είναι σωστή, είτε δώστε ένα αντιπαράδειγμα που να δείχνει ότι είναι λάθος:

   (α΄) *(1 μονάδα)* Αν $f(n)$ είναι ένα πολυώνυμο του n και $g(n) = e^n$, τότε $f(n) = o(g(n))$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Αν $f_1(n) = o(g(n))$ και $f_2(n) = o(g(n))$, τότε και $f_1(n)f_2(n) = o(g(n))$.

   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* Αν $f(n) = o(g(n))$ και $g(n) = o(h(n))$, τότε και $f(n) = o(h(n))$.

   (δ΄) *(0.5 μονάδα)* Αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, τότε $a_n = o(1)$.

   Λύση:

   (α΄) Η ιδιότητα ισχύει. Πράγματι, έστω το πολυώνυμο $f(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i$. Τότε,

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{k} a_i n^i}{a_k n^k} = 1,$$

   καθώς το όριο ισούται με το πηλίκο των μεγιστοβάθμιων όρων.
   Επιπλέον, με k διαδοχικές εφαρμογές του Κανόνα του L'Hôpital, έχουμε

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k a_k n^{k-1}}{e^n} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{(k!) a_k}{e^n} = 0.$$

   Πολλαπλασιάζοντας τα δύο άνω όρια, προκύπτει το ζητούμενο.

   (β΄) Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει. Πράγματι, έχουμε $n^2 = o(n^3)$ και $n^2 = o(n^3)$, αλλά δεν ισχύει οτι $n^4 = n^2 \times n^2 = o(n^3)$.

   (γ΄) Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0,$$

   και πολλαπλασιάζοντας τα άνω, έχουμε

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)} = 0,$$

   επομένως πράγματι η ιδιότητα ισχύει.

   (δ΄) Η ιδιότητα ισχύει, διότι, από το αναγκαίο κριτήριο του Cauchy, αν μια σειρά συγκλίνει, έχουμε

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} = 0 \Rightarrow a_n = o(1).$$

2. **(Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

   (α΄) *(1 μονάδα)* $\int t^2 \cos t \, dt$.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} t^2 \cos t \, dt$.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} t^2 \tan t \, dt$. (Υπόδειξη: δεν μπορεί να υπολογιστεί παράγουσα για την ολοκληρωτέα συνάρτηση.)

   Λύση:

(α΄)

$$\int t^2 \cos t dt = \int t^2 (\sin t)' \, dt = t^2 \sin t - 2 \int t \sin t \, dt = t^2 \sin t + 2 \int t (\cos t)' \, dt$$
$$= t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \int \cos t \, dt = t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t + C.$$

(β΄) Εφαρμόζοντας το προηγούμενο σκέλος:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} t^2 \cos t \, dt = \left[t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{\pi^2}{16} + 2 \times \frac{\pi}{4} - 2\right) = \sqrt{2} \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2\right).$$

(γ΄) Δυστυχώς το συγκεκριμένο αόριστο ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή. Παρατηρούμε όμως πως η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι περιττή, και το διάστημα ολοκλήρωσης συμμετρικό γύρω από το 0. Επομένως, το ολοκλήρωμα είναι 0.

3. **(Καρπούζια)** Το Διεθνές Ινστιτούτο Βαρέων Φρούτων Αμαλιάδος έχει ορίσει ως πρότυπο σχήμα ενός πλήρως γινομένου αυγουστιάτικου καρπουζιού το στερεό που προκύπτει από την περιστροφή της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{300\left(1 - \frac{(x-20)^4}{20^4}\right)}, \quad 0 \le x \le 40,$$

περί τον άξονα των x.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Δώστε ένα τύπο για τον όγκο του άνω καρπουζιού ως ολοκλήρωμα.

(β΄) *(1 μονάδα)* Υπολογίστε το άνω ολοκλήρωμα.

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Ποιες είναι οι μικρότερες δυνατές διαστάσεις ενός ορθογωνίου κιβωτίου στο οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε το άνω καρπούζι; Αγνοήστε το πάχος των τοιχωμάτων του κιβωτίου.

Λύση: Κατά τα γνωστά από τη θεωρία,

$$\begin{aligned} V(S) &= \pi \int_0^{40} f^2(x) \, dx = 300\pi \int_0^{40} \left[1 - \frac{(x-20)^4}{20^4}\right] dx \\ &= 300\pi \int_0^{40} \left[x - \frac{(x-20)^5}{5 \times 20^4}\right]' dx = 300\pi \left[40 - 2 \times \frac{20^5}{5 \times 20^4}\right] = 9600\pi. \end{aligned}$$

Σχετικά με το μικρότερο δυνατόν κιβώτιο, το μήκος θα είναι 40, ενώ οι άλλες διαστάσεις θα είναι ίσες με το διπλάσιο της μέγιστης δυνατής τιμής της συνάρτησης, δηλαδή $2\sqrt{300}$.

4. **(Κορωνοϊός)** Έστω πως η διάδοση του κορωνοϊού σε μια χώρα περιγράφεται με την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$y'(x) = y^2(x)(1 - y(x)),$$

όπου x ο χρόνος και $y(x) \in [0, 1]$ είναι το ποσοστό του πληθυσμού που έχει μολυνθεί.

(α΄) *(0.5 μονάδα)* Βρείτε συντελεστές A, B, C, για τους οποίους, για κάθε x, ισχύει

$$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}.$$

(β΄) *(1.5 μονάδα)* Βρείτε μια εξίσωση για τη γενική λύση της άνω ΔΕ. Δεν χρειάζεται να λύσετε την εξίσωση που θα βρείτε ως προς τη γενική λύση. Αναφέρετε τις παραδοχές που κάνατε.

(γ΄) *(0.5 μονάδα)* Υπάρχουν λύσεις της άνω ΔΕ που δεν περιλαμβάνονται στην άνω γενική λύση, λόγω των παραδοχών που έχετε κάνει;

Λύση:

(α΄)

$$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x} \Leftrightarrow 1 = Ax(1-x) + B(1-x) + Cx^2$$
$$\Leftrightarrow x^2(C - A) + x(A - B) + (B - 1) = 0 \Leftrightarrow A = B = C = 1.$$

(β΄) Η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών. Υποθέτουμε ότι $y(x) \neq 0, 1$, επομένως έχουμε, κατά τη γνωστή μέθοδο,

$$y'(x) = y^2(x)(1-y(x)) \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2(1-y)} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2(1-y)} = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{dy}{1-y} = x + C$$
$$\Leftrightarrow \log|y| - \frac{1}{y} - \log|1-y| = x + C \Leftrightarrow \log\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + \frac{1}{y} + C.$$

(γ΄) Στο προηγούμενο σκέλος, υποθέσαμε πως $y(x) \neq 0, 1$. Δύο λύσεις που δεν περιλαμβάνονται στην άνω γενική λύση είναι οι $y(x) = 0$ (δεν είναι κανείς μολυσμένος) και $y(x) = 1$ (είναι όλοι μολυσμένοι).

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2019-2020

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
6. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
7. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.

Θέματα

1. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

   (α΄) *(1 μονάδα)* $\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}\log x\,dx}{h^2}$.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* $\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* $\lim_{x\to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

2. **(Ολοκληρώματα)**

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x\log x\,dx$ και κατόπιν να επαληθεύσετε ότι βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα παραγωγίζοντας.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x\log^2 x\,dx$ και κατόπιν να επαληθεύσετε ότι βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα παραγωγίζοντας.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x\log x\,dx$.

3. **(Διαφορική εξίσωση)** *(2 μονάδες)* Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x) + (\tan x)y(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

   Ακολούθως, να επαληθεύσετε ότι έχετε υπολογίσει σωστά την γενική λύση παραγωγίζοντας.

4. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

   (α΄) *(1 μονάδα)* $\sum_n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

   (β΄) *(1 μονάδα)* $\sum \frac{(\log n)^2}{n^3}$.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* $\sum \frac{e^{n^2}}{(3n)!}$.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\quad\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\quad\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\quad\forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$

$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow f(x)>M.$ $\quad\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\ 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\ \triangleq\ f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{l} u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{l} x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\ y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\mathrm{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2019-2020
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Κατατακτηρίων Εξετάσεων Ακ. Έτους 2019-2020

1. **(Όρια)** *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

   (α΄) *(1 μονάδα)* $\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}\log x\,dx}{h^2}$.

   (β΄) *(0.5 μονάδα)* $\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

   (γ΄) *(0.5 μονάδα)* $\lim_{x\to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

   Λύση:

   (α΄) Παρατηρούμε πως και ο αριθμητής και ο παρονομαστής τείνουν στο άπειρο, επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital, και έχουμε

   $$\lim_{h\to\infty} \frac{\int_1^h \sqrt{x}\log x\,dx}{h^2} = \frac{\sqrt{h}\log h}{2h} = \lim_{h\to\infty} \frac{\log h}{2\sqrt{h}} = \lim_{h\to\infty} \frac{\frac{1}{h}}{\frac{2}{2\sqrt{h}}} = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{\sqrt{h}} = 0.$$

   (β΄) Παρατηρούμε πως

   $$\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{2}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = \infty.$$

   (γ΄) Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει απροσδιοριστία, καθώς και οι δύο όροι του γινομένου τείνουν στο 0, επομένως

   $$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

2. **(Ολοκληρώματα)**

   (α΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x\log x\,dx$ και κατόπιν να επαληθεύσετε ότι βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα παραγωγίζοντας.

   (β΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x\log^2 x\,dx$ και κατόπιν να επαληθεύσετε ότι βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα παραγωγίζοντας.

   (γ΄) *(1 μονάδα)* Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x\log x\,dx$

   Λύση:

   (α΄) Παρατηρούμε πως

   $$\int x\log x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2x}\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C.$$

   Πράγματι,

   $$\left(\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right)' = x\log x + \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x} - \frac{x}{2} = x\log x.$$

   (β΄) Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

   $$\int x\log^2 x\,dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log^2 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \int x\log x\,dx$$
   $$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C\right] = \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + C.$$

Πράγματι,

$$\left(\frac{1}{2}x^2\log^2 x-\frac{x^2}{2}\log x+\frac{x^2}{4}\right)'=x\log^2 x+x^2\log x\left(\frac{1}{x}\right)-x\log x-\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}+\frac{x}{2}$$
$$=x\log^2 x+x\log x-x\log x-\frac{x}{2}+\frac{x}{2}=x\log^2 x.$$

(γ΄) Το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό λόγω απειρισμού στο ∞. Σχετικά με το $x=0$, στην πραγματικότητα αυτό το άκρο ολοκλήρωσης δεν δημιουργεί πρόβλημα, διότι η συνάρτηση παραμένει φραγμένη (όπως μπορούμε να δούμε με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital). Μπορούμε όμως και πάλι να γράψουμε το ολοκλήρωμα ως καταχρηστικό, επομένως

$$\int_0^\infty x\log x\,dx=\int_0^1 x\log x\,dx+\int_1^\infty x\log x\,dx.$$

Σχετικά με το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 x\log x\,dx=\lim_{h\to 0}\int_h^1 x\log x\,dx=\lim_{h\to 0}\left[\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\right]_h^1=\lim_{h\to 0}\left[-\frac{1}{4}-\frac{h^2}{2}\log h+\frac{h^2}{4}\right]$$
$$=-\frac{1}{4}-\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{2}\log h=-\frac{1}{4}-\lim_{h\to 0^+}\frac{\log h}{\frac{2}{h^2}}=-\frac{1}{4}-\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{h}}{-\frac{4}{h^3}}=-\frac{1}{4}.$$

Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$\int_1^\infty x\log x\,dx=\lim_{h\to\infty}\left[\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\right]_1^h=\lim_{h\to\infty}h^2\left[\frac{\log h}{2}-\frac{1}{4}\right]+\frac{1}{4}=\infty.$$

3. **(Διαφορική εξίσωση)** *(2 μονάδες)* Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'(x)+(\tan x)y(x)=\frac{1}{\cos x},\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Ακολούθως, να επαληθεύσετε ότι έχετε υπολογίσει σωστά την γενική λύση παραγωγίζοντας.

Λύση: Καταρχάς παρατηρούμε πως

$$\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=\int\frac{(-\cos x)'}{\cos x}\,dx=-\int(\log\cos x)'\,dx=-\log(\cos x)+C.$$

Επομένως, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ΔΕ με το $\exp(-\log(\cos x))=\frac{1}{\cos x}$, και έχουμε

$$\frac{y'(x)}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}y(x)=\frac{1}{\cos^2 x}\Leftrightarrow\left(\frac{y(x)}{\cos x}\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}=(\tan x)'\Leftrightarrow\frac{y(x)}{\cos x}=\tan x+C\Leftrightarrow y(x)=\sin x+C\cos x.$$

Πράγματι, για την άνω λύση έχουμε

$$y'(x)+(\tan x)y(x)=\cos x-C\sin x+\frac{\sin x}{\cos x}(\sin x+C\cos x)=\cos x-C\sin x+\frac{\sin^2 x}{\cos x}+C\sin x$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}.$$

4. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν:

(α΄) *(1 μονάδα)* $\sum_n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

(β΄) *(1 μονάδα)* $\sum\frac{(\log n)^2}{n^3}$.

(γ΄) *(1 μονάδα)* $\sum\frac{e^{n^2}}{(3n)!}$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h}{h} = 1,$$
και με δεδομένο ότι η αρμονική σειρά $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει, από το Κριτήριο της Σύγκρισης στο όριο θα αποκλίνει και η δοσμένη.

(β΄) Παρατηρούμε πως
$$\lim_{h\to\infty}\frac{(\log n)^2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\log n\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\log n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1} = 0.$$
Επομένως,
$$\frac{(\log n)^2}{n^3} \leq \frac{1}{n^2},$$
για αρκούντως μεγάλα n, και αφού η σειρά $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, θα συγκλίνει και η δοσμένη.

(γ΄) Παρατηρούμε πως
$$\frac{\frac{e^{(n+1)^2}}{(3n+3)!}}{\frac{e^{n^2}}{(3n)!}} = \frac{e^{2n+1}}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)},$$
το οποίο τείνει στο άπειρο, όπως προκύπτει με εφαρμογή του Κανόνα του L'Hôpital. Επομένως, από το Κριτήριο Σύγκρισης στο Όριο, η σειρά αποκλίνει.