ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2018.

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Ιδιότητα ορίων)** *(1 μονάδα)* Έστω συνάρτηση $f(x)$ με όριο $\lim_{x\to\infty} f(x) = 10$. Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, ότι υπάρχει κάποιος $X_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε το $f(x) > \pi$ για κάθε $x > X_0$.
2. **(Όρια)** Να προσδιορίσετε τα παρακάτω όρια, εφόσον υπάρχουν:

(α′) *(0.6 μονάδα)* $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^{x}$.

(β′) *(0.7 μονάδα)* $\lim_{x\to\infty}|\cos x|^{x}$.

(γ′) *(0.7 μονάδα)* $\lim_{x\to\infty}x^{\left(\frac{1}{2x^2}\right)}$.

3. **(Ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int(\cos x)\log(2+\sin x)\,dx.$$

Κατόπιν, να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα παραγωγίζοντάς το.

4. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)** *(1.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$$

5. **(Κώνος)** *(1.5 μονάδα)* Ποιος είναι ο όγκος κώνου με ακτίνα βάσης R και ύψος h; Να αποδείξετε την απάντησή σας.

6. **(Διαφορική Εξίσωση)** *(1 μονάδα)* Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x)+(x\sin x)y(x)=(\cos x)e^{(x\cos x)}.$$

7. **(Σειρές)**

(α′) *(0.5 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά

$$\sum\frac{2^{\cos n}}{n}.$$

(β′) *(0.5 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά

$$\sum\frac{e^{n^2}}{(n!)^2}.$$

(γ′) *(0.5 μονάδες)* Έστω $a_n\geq 0$. Αν συγκλίνει η $\sum a_n$, θα συγκλίνει σίγουρα και η $\sum\sin(a_n)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(δ′) *(0.5 μονάδες)* Έστω $a_n\geq 0$. Αν συγκλίνει η $\sum\sin(a_n)$, θα συγκλίνει σίγουρα και η $\sum a_n$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$

$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow f(x)>M.$ $\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\ 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\ \triangleq\ f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c} u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c} x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\ y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\text{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2017-2018
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξέτασης Φεβρουαρίου Ακ. Έτους 2017-2018

1. **(Ιδιότητα ορίων)** *(1 μονάδα)* Έστω συνάρτηση $f(x)$ με όριο $\lim_{x\to\infty} f(x) = 10$. Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, ότι υπάρχει κάποιος $X_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε το $f(x) > \pi$ για κάθε $x > X_0$.

   Λύση: Θέτουμε $\epsilon = 10 - \pi$. Από τον ορισμό του ορίου, θα υπάρχει κάποιο X_0 τέτοιο ώστε για κάθε $x > X_0$ να έχουμε
   $$|f(x) - 10| < \epsilon = 10 - \pi \Rightarrow -10 + \pi < f(x) - 10 < 10 - \pi \Rightarrow f(x) > \pi.$$

2. **(Όρια)** Να προσδιορίσετε τα παρακάτω όρια, εφόσον υπάρχουν:

   (α΄) *(0.6 μονάδα)* $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x$.

   (β΄) *(0.7 μονάδα)* $\lim_{x\to\infty} |\cos x|^x$.

   (γ΄) *(0.7 μονάδα)* $\lim_{x\to\infty} x^{\left(\frac{1}{2x^2}\right)}$.

   Λύση:

   (α΄) Παρατηρούμε πως
   $$0 \le \frac{|\cos x|}{2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le \left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x \le \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$
   και επειδή $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$, από το Κριτήριο της Παρεμβολής τελικά η συνάρτηση τείνει στο 0 καθώς $x \to \infty$.

   (β΄) Σε αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε πως για όλα τα $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, με $k \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση λαμβάνει την τιμή 0, ενώ για όλα τα $x = 2k\pi$, με $k \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση λαμβάνει την τιμή 1. Επομένως, το όριο δεν υπάρχει.

   (γ΄) Παρατηρούμε πως
   $$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{1}{2x^2}\log x\right).$$
   Όμως, με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital,
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{4x} = 0,$$
   άρα, τελικά, $\lim_{x\to\infty} x^{\left(\frac{1}{2x^2}\right)} = \exp(0) = 1$.

3. **(Ολοκλήρωμα)** *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα
   $$\int (\cos x)\log(2 + \sin x)\,dx.$$
   Κατόπιν, να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα παραγωγίζοντάς το.

   Λύση: Θέτουμε $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx$, επομένως
   $$\begin{aligned}\int (\cos x)\log(2 + \sin x)\,dx &= \int \log(2+u)\,du = \int (u)'\log(2+u)\,du = u\log(2+u) - \int \frac{u}{2+u}\,du \\ &= u\log(2+u) - \int \frac{2+u}{2+u}\,du + 2\int \frac{du}{2+u} = u\log(2+u) - u + 2\log(2+u) + C \\ &= (2+u)\log(2+u) - u + C = (2+\sin x)\log(2+\sin x) - \sin x + C.\end{aligned}$$
   Πράγματι,
   $$((2+\sin x)\log(2+\sin x) - \sin x + C)' = (\cos x)\log(2+\sin x) + \frac{(2+\sin x)\cos x}{(2+\sin x)} - \cos x = (\cos x)\log(2+\sin x).$$

4. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)** *(1.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx.$$

Λύση: Παρατηρούμε πως το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό γιατί η ολοκληρωτέα συνάρτηση απειρίζεται στο 0. Επομένως, το δοσμένο ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό μικτού τύπου, και πρέπει να υπολογίσουμε δύο καταχρηστικά ολοκληρώματα δεύτερου τύπου:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx.$$

Σχετικά με το πρώτο καταχρηστικό ολοκλήρωμα,

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx = \lim_{h\to 0^+} \int_{h}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx = \lim_{h\to 0^+} \int_{h}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{\sin x}\right]' dx = \lim_{h\to 0^+} \left[\frac{1}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sin h} - 1 = \infty.$$

Σχετικά με το δεύτερο καταχρηστικό ολοκλήρωμα, μπορεί να υπολογιστεί ανάλογα, ή εναλλακτικά να παρατηρήσουμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι άρτια, άρα πρέπει, λαμβάνοντας υπόψη και τα όρια ολοκλήρωσης, το δεύτερο ολοκλήρωμα να ισούται με το πρώτο. Εν τέλει, το δοσμένο ολοκλήρωμα ισούται με ∞.

5. **(Κώνος)** *(1.5 μονάδα)* Ποιος είναι ο όγκος κώνου με ακτίνα βάσης R και ύψος h; Να αποδείξετε την απάντησή σας.

Λύση: Μπορούμε να λύσουμε την άσκηση με δύο τρόπους.

Με τον πρώτο τρόπο, παρατηρούμε πως ο κώνος C μπορεί να προκύψει αν περιστρέψουμε τη συνάρτηση $f(x) = h\left(1 - \frac{x}{R}\right)$ περί τον άξονα των y. Επομένως, ο όγκος ισούται με

$$\begin{aligned} V(C) &= 2\pi \int_0^R x f(x)\, dx = 2\pi h \int_0^R \left(x - \frac{x^2}{R}\right) dx = 2\pi h \int_0^R \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx - \frac{2\pi h}{R} \int_0^R \left(\frac{x^3}{3}\right)' dx \\ &= 2\pi h \frac{R^2}{2} - \frac{2\pi h R^3}{3R} = \frac{1}{3}\pi h R^2. \end{aligned}$$

Με τον δεύτερο τρόπο, παρατηρούμε ο κώνος C μπορεί επίσης να προκύψει αν περιστρέψουμε τη συνάρτηση $f(x) = R\left(1 - \frac{x}{h}\right)$ περί τον άξονα των x. Επομένως, ο όγκος ισούται με

$$\begin{aligned} V(C) &= \pi \int_0^h R^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 dx = \pi R^2 \int_0^h \left[-\frac{h}{3}\left(1 - \frac{x}{h}\right)^3\right]' dx \\ &= \frac{\pi R^2 h}{3} \left[\left(1 - \frac{x}{h}\right)^3\right]_h^0 = \frac{1}{3}\pi h R^2. \end{aligned}$$

6. **(Διαφορική Εξίσωση)** *(1 μονάδα)* Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + (x\sin x) y(x) = (\cos x) e^{(x\cos x)}.$$

Λύση: Η ΔΕ είναι γραμμική πρώτης τάξης, επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της $x\sin x$:

$$\int x\sin x\, dx = \int x(-\cos x)'\, dx = -x\cos x + \int \cos\, dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Πράγματι,

$$(-x\cos x + \sin x + C)' = -\cos x + x\sin x + \cos x = x\sin x.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} e^{\sin x - x\cos x} y'(x) + e^{\sin x - x\cos x}(x\sin x) y(x) = (\cos x) e^{\sin x} = \left(e^{\sin x}\right)' \Leftrightarrow \left(y(x) e^{\sin x - x\cos x}\right)' = \left(e^{\sin x}\right)' \\ \Leftrightarrow y(x) e^{\sin x - x\cos x} = e^{\sin x} + C \Leftrightarrow y(x) = e^{x\cos x} + C e^{x\cos x - \sin x}. \end{aligned}$$

Πράγματι, παρατηρήστε πως με αντικατάσταση της λύσης στην αρχική ΔΕ βρίσκουμε πράγματι

$$\begin{aligned} y'(x) + (x\sin x) y(x) = e^{x\cos x}(\cos x - x\sin x) + C e^{x\cos x - \sin x}(\cos x - x\sin x - \cos x) \\ + x(\sin x) e^{x\cos x} + x(\sin x) C e^{x\cos x - \sin x} = (\cos x) e^{x\cos x}. \end{aligned}$$

7. **(Σειρές)**

(α΄) *(0.5 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά $\sum \frac{2^{\cos n}}{n}$.

(β΄) *(0.5 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή όχι η σειρά $\sum \frac{e^{n^2}}{(n!)^2}$.

(γ΄) *(0.5 μονάδες)* Έστω $a_n \geq 0$. Αν συγκλίνει η $\sum a_n$, θα συγκλίνει σίγουρα και η $\sum \sin(a_n)$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(δ΄) *(0.5 μονάδες)* Έστω $a_n \geq 0$. Αν συγκλίνει η $\sum \sin(a_n)$, θα συγκλίνει σίγουρα και η $\sum a_n$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως $\frac{2^{\cos n}}{n} \geq \frac{1}{2n}$. Όμως, η σειρά $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει. Επομένως, από το Κριτήριο της Σύγκρισης, θα αποκλίνει και η δοσμένη σειρά.

(β΄) Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο του Λόγου:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{(n+1)^2}(n!)^2}{((n+1)!)^2 e^{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n^2+2n+1}(n!)^2}{(n!)^2(n+1)^2 e^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n+1}}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2e^{2n+1}}{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} 2e^{2n+1} = \infty,\end{aligned}$$

επομένως η σειρά αποκλίνει. (Στην 4η και την 5η ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον Κανόνα του L'Hôpital.)

(γ΄) Γνωρίζουμε πως για $x \geq 0$ έχουμε $0 \leq \sin x \leq x$, επομένως $0 \leq \sin(a_n) \leq a_n$. Επομένως, από το Κριτήριο της Σύγκρισης, εφόσον συγκλίνει η $\sum a_n$ θα συγκλίνει και η $\sum \sin(a_n)$.

(δ΄) Η σειρά $\sum a_n$ μπορεί και να μην συγκλίνει. Αυτό συμβαίνει όταν, για παράδειγμα, η $a_n = \pi$, δηλαδή είναι μια σταθερή ακολουθία. Σε αυτή την περίπτωση, $\sum \sin(a_n) = 0$, αλλά $\sum a_n = \infty$.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2018.

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: . . . .

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. **Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα, και όχι σε αυτό το δίφυλλο. Ό,τι γράψετε εδώ δεν θα διορθωθεί.**
3. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
4. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
5. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Ορισμός Ορίου)** *(1 μονάδα)* Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $T > 0$. Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου στο άπειρο, ότι η f δεν μπορεί να έχει όριο το ∞ καθώς $x \to \infty$.
2. **(Υπολογισμός Ορίων)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:
   (α΄) *(0.6 μονάδες)* $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \left(1 + e^{-h^2}\right) dh.$
   (β΄) *(0.7 μονάδες)* $\lim_{x\to 0^+} x \log^2 x.$
   (γ΄) *(0.7 μονάδες)* $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}.$
3. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:
   (α΄) *(0.7 μονάδα)* $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx.$
   (β΄) *(0.8 μονάδα)* $\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x)}\, dx.$

4. **(Όγκος στερεού εκ περιστροφής)** *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \sin x$, με $0 \leq x \leq \pi$, γύρω από την ευθεία $y = -1$.

5. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)** *(1.5 μονάδα)* Υπολογίστε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi |\tan x|\, dx.$$

6. **(Διαφορική Εξίσωση)** *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + (2\log x + 5)y(x) = e^{-2x\log x}.$$

7. **(Σειρές)**

   (α΄) *(0.6 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η ακόλουθη σειρά:

   $$\sum \frac{e^n + n}{n^2 e^n + n^{10}}.$$

   (β΄) *(0.7 μονάδες)* Έστω $a_n > 0$. Αν συγκλίνει η $\sum a_n$, τότε τι από τα τρια συμβαίνει, και γιατί;

      i. Η $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ αποκλίνει.
      ii. Η $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει.
      iii. Η $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει, ανάλογα με την μορφή της a_n.

   (γ΄) *(0.7 μονάδες)* Έστω $a_n > 0$. Αν συγκλίνει η $\sum a_n$, τότε τι από τα τρια συμβαίνει, και γιατί;

      i. Η $\sum \sqrt{a_n}$ αποκλίνει.
      ii. Η $\sum \sqrt{a_n}$ συγκλίνει.
      iii. Η $\sum \sqrt{a_n}$ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει, ανάλογα με την μορφή της a_n.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\ \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad$ $\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad$ $\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$

$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$ $\qquad$ $\forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$

$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow f(x)>M.$ $\qquad$ $\forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\ 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\ \int_a^b A(t)\,dt,\ \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$

$$P_{n,a}(x)\ \triangleq\ f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\\x_2-x_0&y_2-y_0&z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$
$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c}u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\mathrm{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix}x_0&y_0&z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_0&y_0\\x_1&y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2017-2018
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘ. ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ

Λύσεις Εξετάσεων Σεπτεμβρίου Ακ. Έτους 2017-2018

1. **(Ορισμός Ορίου)** *(1 μονάδα)* Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $T > 0$. Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου στο άπειρο, ότι η f δεν μπορεί να έχει όριο το ∞ καθώς $x \to \infty$.

   Λύση: Έχουμε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ όταν για κάθε $M > 0$ υπάρχει κάποιο $X \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x > X$ να έχουμε και $f(x) > M$. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει αν η f είναι περιοδική.

   Πράγματι, έστω οποιοδήποτε x_0. Θέτουμε M οποιονδήποτε αριθμό μεγαλύτερο του $f(x_0)$, για παράδειγμα $M = 2|f(x_0)| + 1$. Έστω πως υπάρχει το όριο ως άνω. Τότε θα υπάρχει κάποιο X τέτοιο ώστε $x > X$ να συνεπάγεται $f(x) > M > f(x_0)$. Όμως θα υπάρχει και N φυσικός ώστε $x = x_0 + NT > X$, και $f(x) = f(x_0 + NT) = f(x_0)$, επομένως έχουμε άτοπο.

2. **(Υπολογισμός Ορίων)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

   (α΄) *(0.6 μονάδες)* $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \left(1 + e^{-h^2}\right) dh$.

   (β΄) *(0.6 μονάδες)* $\lim_{x\to 0^+} x \log^2 x$.

   (γ΄) *(0.7 μονάδες)* $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

   Λύση:

   (α΄) Παρατηρήστε οτι το ολοκλήρωμα τείνει στο άπειρο καθώς $x \to \infty$. Πράγματι:

   $$\int_0^x \left(1 + e^{-h^2}\right) dh > \int_0^x dh = x,$$

   που τείνει στο άπειρο καθώς $x \to \infty$.
   Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Κανόνα του L'Hôpital, βάσει του οποίου, σε συνδυασμό με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού,

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \left(1 + e^{-h^2}\right) dh = \frac{1 + e^{-x^2}}{1} = 1.$$

   (β΄) Χρησιμοποιούμε τον Κανόνα του L'Hôpital, ως εξής:

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\log^2 x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2(\log x)\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -2\frac{\log x}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -2\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0.\end{aligned}$$

   (γ΄) Παρατηρούμε πως

   $$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left((\log x)(\sin x)\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} (\log x)(\sin x)\right).$$

   Σχετικά με το παραπάνω όριο, έχουμε απροσδιοριστιά $\infty \times 0$, και χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του L'Hôpital προκύπτει

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} (\log x)(\sin x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{-\frac{1}{x\log^2 x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} (\cos x)(x\log^2 x) = \lim_{x\to 0^+} (\cos x) \lim_{x\to 0^+} x\log^2 x = 0,\end{aligned}$$

   άρα τελικά το ζητούμενο όριο ισούται με 1. Στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο σκέλος.

3. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:
   (α΄) *(0.7 μονάδα)* $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx.$
   (β΄) *(0.8 μονάδα)* $\displaystyle\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x)}\, dx.$

   Λύση:

   (α΄) Θέτουμε $t = \sin x + \cos x$, επομένως $dt = (\cos x - \sin x)dx$, και έχουμε:
$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + C = -\log|\sin x + \cos x| + C.$$
   (β΄) Θέτουμε $t = e^x$, επομένως $dt = e^x\, dx$, άρα και
$$\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x)}\, dx = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C = \tan e^x + C.$$

4. **(Όγκος στερεού εκ περιστροφής)** *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \sin x$, με $0 \leq x \leq \pi$, γύρω από την ευθεία $y = -1$.

   Λύση: Επειδή η περιστροφή είναι γύρω από την ευθεία $y = -1$, το στερεό που δημιουργείται είναι το ίδιο που θα δημιουργούταν αν περιστρέφαμε γύρω από τον άξονα των x την συνάρτηση $f(x) + 1$. Επομένως,
$$\begin{aligned} V(S) &= \int_0^\pi \pi(1+\sin x)^2\, dx = \int_0^\pi \pi\, dx + \int_0^\pi 2\pi \sin x\, dx + \int_0^\pi \pi \sin^2 x\, dx \\ &= \pi^2 + 2\pi \int_0^\pi (-\cos x)'\, dx + \pi \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \pi^2 + 2\pi(1+1) + \frac{\pi}{2}\int_0^\pi dx - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos 2x\, dx \\ &= \frac{3}{2}\pi^2 + 4\pi - \pi \int_0^\pi \left(\frac{\sin 2x}{4}\right)' dx = \frac{3}{2}\pi^2 + 4\pi. \end{aligned}$$

5. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)** *(1.5 μονάδα)* Υπολογίστε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα
$$\int_0^\pi |\tan x|\, dx.$$
   Λύση: Παρατηρούμε πως το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό διότι η συνάρτηση της εφαπτόμενης απειρίζεται στην θέση $x = \pi/2$. Επομένως, πρέπει να σπάσουμε το ολοκλήρωμα σε δύο καταχρηστικά ολοκληρώματα δεύτερου τύπου:
$$\begin{aligned} \int_0^\pi |\tan x|\, dx &= \int_0^{\pi/2} |\tan x|\, dx + \int_{\pi/2}^\pi |\tan x|\, dx \\ &= \lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \int_0^h |\tan x|\, dx + \lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \int_h^\pi |\tan x|\, dx \\ &= \lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \int_0^h \tan x\, dx + \lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \int_h^\pi (-\tan x)\, dx. \end{aligned}$$
   Σχετικά με το πρώτο καταχρηστικό ολοκλήρωμα, έχουμε
$$\lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \int_0^h \tan x\, dx = \lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \int_0^h -(\log|\cos x|)'\, dx = \lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} -(\log|\cos h|) + \log|\cos 0| = \infty.$$
   Παρόμοια,
$$\lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \int_h^\pi (-\tan x)\, dx = \lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \int_h^\pi (\log|\cos x|)'\, dx = \log|\cos \pi| - \lim_{h\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (\log|\cos h|) = \infty.$$
   Άρα, τελικά, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα ισούται με ∞.

6. **(Διαφορική Εξίσωση)** *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + (2\log x + 5)y(x) = e^{-2x\log x}.$$

Λύση: Αρχικά θα υπολογίσουμε την παράγουσα της $2\log x + 5$. Έχουμε

$$\int 2\log x\,dx = 2\int \log x\,dx = 2\int (x)'\log x\,dx = 2x\log x - 2\int x(\log x)'\,dx = 2x\log x - 2\int dx = 2x\log x - 2x + C.$$

Επίσης,

$$\int 5\,dx = 5x + C,$$

άρα, τελικά,

$$\int (2\log x + 5)\,dx = 2x\log x + 3x + C.$$

Επομένως,

$$y'(x) + (2\log x + 5)y(x) = e^{-2x\log x} \Leftrightarrow e^{2x\log x + 3x}y'(x) + (2\log x + 5)y(x)e^{2x\log x + 3x} = e^{3x}$$
$$\Leftrightarrow \left(e^{2x\log x+3x}y(x)\right)' = \frac{1}{3}(e^{3x})' \Leftrightarrow y(x)e^{2x\log x+3x} = \frac{1}{3}e^{3x} + C \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{3}e^{-2x\log x} + Ce^{-2x\log x - 3x}.$$

7. **(Σειρές)**

(α΄) *(0.6 μονάδες)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η ακόλουθη σειρά:

$$\sum \frac{e^n + n}{n^2 e^n + n^{10}}.$$

(β΄) *(0.7 μονάδες)* Έστω $a_n > 0$. Αν συγκλίνει η $\sum a_n$, τότε τι από τα τρια συμβαίνει, και γιατί;

i. Η $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ αποκλίνει.
ii. Η $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει.
iii. Η $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει, ανάλογα με την μορφή της a_n.

(γ΄) *(0.7 μονάδες)* Έστω $a_n > 0$. Αν συγκλίνει η $\sum a_n$, τότε τι από τα τρια συμβαίνει, και γιατί;

i. Η $\sum \sqrt{a_n}$ αποκλίνει.
ii. Η $\sum \sqrt{a_n}$ συγκλίνει.
iii. Η $\sum \sqrt{a_n}$ μπορεί να συγκλίνει ή να αποκλίνει, ανάλογα με την μορφή της a_n.

Λύση:

(α΄) Έστω $a_n = \frac{e^n+n}{n^2e^n+n^{10}}$ και $b_n = \frac{1}{n^2}$. Παρατηρήστε πως

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^n+n}{n^2e^n+n^{10}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2e^n+n^3}{n^2e^n+n^{10}} = \frac{1+ne^{-n}}{1+n^8e^{-n}} = 1.$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} ne^{-n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^n} = 0,\\ \lim_{n\to\infty} n^8e^{-n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^8}{e^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{8n^7}{e^n} = \cdots = \frac{8!}{e^n} = 0.\end{aligned}$$

Επειδή, όμως, συγκλίνει η $\sum b_n$, από το Κριτήριο της Σύγκρισης στο Όριο προκύπτει οτι θα συγκλίνει και η δοσμένη σειρά.

(β΄) Εφόσον η $\sum a_n$ συγκλίνει, θα έχουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Από το Κριτήριο της Σύγκρισης στο Όριο, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{a_n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_n} = 1,$$

επομένως θα συγκλίνει σίγουρα και η $\frac{a_n}{1+a_n}$.

(γ΄) Σε αυτή την περίπτωση, δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για την σύγκλιση ή απόκλιση της $\sum \sqrt{a_n}$. Πράγματι,

i. Στην περίπτωση που $a_n = \frac{1}{n^2}$, η $\sum a_n$ συγκλίνει, κατά τα γνωστά από τη θεωρία για σειρές της μορφής $\sum \frac{1}{n^p}$ με $p > 1$, αλλά η $\sum \sqrt{a_n}$ είναι η αρμονική σειρά, που αποκλίνει.

ii. Στην περίπτωση που $a_n = \frac{1}{n^4}$, η $\sum a_n$ αλλά και η $\sum \sqrt{a_n}$ συγκλίνουν, κατά τα γνωστά από τη θεωρία για σειρές της μορφής $\sum \frac{1}{n^p}$ με $p > 1$.