ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΚΑΘ: ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2015.

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όρια)** *[1 μονάδα]* Έστω συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$, όχι συνεχείς στο 1, για τις οποίες ισχύουν τα ακόλουθα:
$$\lim_{x\to 1}(2f(x)+g(x))=3, \quad \lim_{x\to 1}(f(x)-2g(x))=5.$$
Να προσδιορίσετε το όριο $\lim_{x\to 1}\left(\frac{f^2(x)}{g(x)}+f(x)\right)$.

2. **(Παράγωγοι)** *[1 μονάδα]* Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$$\int_1^{2x} f(t)\,dt=\cos x+x^2+C,$$
για κάποιο $C\in\mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε την $f(x)$ και το C.

3. **(Ολοκληρώματα)**

   (α΄) *[1 μονάδα]* Να προσδιορίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int(\sin t)^{-1}\,dt$ στο $(0,\pi)$. *(Υπόδειξη: δοκιμάστε την αντικατάσταση $u=(1+\cos t)/\sin t$).*

(β′) *[1 μονάδα]* Να προσδιορίσετε την τιμή του καταχρηστικού ολοκληρώματος $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{-1}\, dt$.

4. **(ΔΕ)** Δίνεται η ακόλουθη ΔΕ, που ισχύει στο διάστημα $(0, \infty)$:

$$y'(x) + (\log x) y(x) = e^{-x \log x}.$$

(α′) *[1 μονάδα]* Να προσδιορίσετε τη γενική της λύση.

(β′) *[1 μονάδα]* Ακολούθως, να προσδιορίσετε το όριο των λύσεών της καθώς $x \to \infty$.

5. **(Σειρές)** *[2 μονάδες]* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνουν ή όχι οι ακόλουθες σειρές:

$$\sum \frac{n + \cos n}{n^2 + n \log n + 10 \sin n}, \qquad \sum \frac{1}{n \log(10^6 n)}.$$

(Υπόδειξη: εφαρμόστε το κριτήριο της σύγκρισης στο όριο και το κριτήριο του ολοκληρώματος.)

6. **(Έλλειψη)** Έστω έλλειψη με κορυφές τα σημεία $(0, -1)$, $(1, 2)$, $(4, 3)$, και $(3, 0)$.

(α′) *[1 μονάδα]* Σχεδιάστε την έλλειψη, και προσδιορίστε τις παραμέτρους a, b, καθώς και τις εξισώσεις των ευθειών στις οποίες βρίσκονται οι άξονες συμμετρίας της έλλειψης.

(β′) *[1 μονάδα]* Προσδιορίστε την εξίσωσή της έλλειψης. Η εξίσωση πρέπει να προσδιορίζει μια σχέση μεταξύ των συντεταγμένων x και y που ικανοποιούν τα σημεία (x, y) που ανήκουν στην έλλειψη.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0: c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}: x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0: 0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}: x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{l}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{l}u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{l}x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\ y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix}x_0 & y_0 & z_0\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_0 & y_0\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2014-2015
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Φεβρουαρίου Περιόδου 2014-2015

1. **(Όρια)** Έστω συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$, όχι συνεχείς στο 1, για τις οποίες ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\lim_{x\to 1}(2f(x)+g(x))=3, \quad \lim_{x\to 1}(f(x)-2g(x))=5.$$

Να προσδιορίσετε το όριο $\lim_{x\to 1}\left(\frac{f^2(x)}{g(x)}+f(x)\right)$.

Λύση: Πολλαπλασιάζοντας την δεύτερη από τις δοσμένες με (-2) και προσθέτοντάς τη στην πρώτη, έχουμε

$$\lim_{x\to 1}5g(x)=-7 \Rightarrow \lim_{x\to 1}g(x)=-\frac{7}{5}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την άνω με 2 και προσθέτοντάς τη στη δεύτερη των δοσμένων, προκύπτει τελικά

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\frac{11}{5}.$$

Έχοντας τα όρια, εύκολα προκύπτει πως

$$\lim_{x\to 1}(f^2(x)/g(x)+f(x))=\frac{\left(\frac{11}{5}\right)^2}{\left(-\frac{7}{5}\right)}+\left(\frac{11}{5}\right)=-\frac{44}{35}\simeq -1.26.$$

2. **(Παράγωγοι)** Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\int_1^{2x} f(t)\,dt=\cos x+x^2+C,$$

για κάποιο $C\in\mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε την $f(x)$ και το C.

Λύση: Σχετικά με την τιμή του C, παρατηρούμε ότι το αριστερό σκέλος είναι μηδενικό για $x=\frac{1}{2}$. Άρα και το δεξί σκέλος πρέπει να είναι μηδενικό για $x=\frac{1}{2}$, επομένως

$$\cos\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{1}{4}-\cos\frac{1}{2}.$$

Σχετικά με τη συνάρτηση $f(x)$, το αριστερό σκέλος της δοσμένης εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως η σύνθεση $F(g(x))$ της συνάρτησης $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ και της συνάρτησης $g(x)=2x$. Αφού η f είναι συνεχής, η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και η $F(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη. Παραγωγίζοντας και τα δύο σκέλη της δοσμένης εξίσωσης, και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας στο αριστερό σκέλος, έχουμε

$$f(2x)(2x)'=-\sin x+2x\Rightarrow f(2x)=x-\frac{1}{2}\sin x\Rightarrow f(x)=\frac{x}{2}-\frac{\sin(x/2)}{2}.$$

3. **(Ολοκληρώματα)**

(α΄) Να προσδιορίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int\frac{dt}{\sin t}$ στο διάστημα $(0,\pi)$. *(Υπόδειξη: δοκιμάστε την αντικατάσταση $u=\frac{1+\cos t}{\sin t}$).*

(β΄) Να προσδιορίσετε την τιμή του καταχρηστικού ολοκληρώματος $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t}$.

Λύση:

(α΄) Ακολουθώντας την υπόδειξη, θέτουμε $u=\frac{1+\cos t}{\sin t}$, οπότε έχουμε

$$\frac{du}{dt}=\frac{-\sin^2 t-\cos t-\cos^2 t}{\sin^2 t}=-\frac{1+\cos t}{\sin^2 t}\Rightarrow\frac{du}{dt}=-\frac{u}{\sin t}\Rightarrow\frac{dt}{\sin t}=-\frac{du}{u}.$$

Επομένως,

$$\int \frac{dt}{\sin t} = -\int \frac{du}{u} = -\log u = -\log\left(\frac{1+\cos t}{\sin t}\right).$$

Πράγματι, με μια απλή παραγώγιση επιβεβαιώνουμε πως

$$\left(-\log\left(\frac{1+\cos t}{\sin t}\right)\right)' = -\left(\frac{\sin t}{1+\cos t}\right)\cdot\left(\frac{-\sin^2 t-\cos t-\cos^2 t}{\sin^2 t}\right) = \frac{1}{\sin t}.$$

(β') Καταρχήν παρατηρούμε πως το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό λόγω του μηδενισμού του παρονομαστή για $x=0$. Επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία των καταχρηστικών ολοκληρωμάτων, έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} &= \lim_{x\to 0^+}\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} = \lim_{x\to 0^+}\left[-\log\left(\frac{1+\cos t}{\sin t}\right)\right]_x^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\log\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right) - \log\left(\frac{1+\cos(\pi/2)}{\sin(\pi/2)}\right) = \infty - 0 = \infty.\end{aligned}$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του καταχρηστικού ολοκληρώματος. Στην δεύτερη, το πρώτο σκέλος. Το όριο της τέταρτης ισότητας προκύπτει από το ότι ο παρονομαστής $\sin x$ τείνει στο 0 από θετικές τιμές, ενώ ο αριθμητής τείνει στο 2.

4. **(ΔΕ)** Δίνεται η ακόλουθη ΔΕ, που ισχύει στο διάστημα $(0,\infty)$:

$$y'(x) + (\log x)y(x) = e^{-x\log x}.$$

(α') Να προσδιορίσετε τη γενική της λύση.

(β') Ακολούθως, να προσδιορίσετε το όριο των λύσεών της καθώς $x\to\infty$.

Λύση: Παρατηρούμε πως η ΔΕ είναι γραμμική πρώτης τάξης, επομένως πρέπει σαν πρώτο βήμα να βρούμε την παράγουσα του $\log x$. Παρατηρούμε πως

$$\int \log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x + C,$$

επομένως, κατά τα γνωστά για τις γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης,

$$\begin{aligned} y'(x)+(\log x)y(x) = e^{-x\log x} &\Leftrightarrow e^{x\log x - x}y'(x) + e^{x\log x-x}(\log x)y(x) = e^{-x} \Leftrightarrow \left(e^{x\log x-x}y(x)\right)' = -(e^{-x})' \\ &\Leftrightarrow y(x)e^{x\log x-x} = -e^{-x}+C \Leftrightarrow y(x) = \frac{C-e^{-x}}{e^{-x}e^{x\log x}} = \frac{Ce^x-1}{e^{x\log x}}.\end{aligned}$$

Σχετικά με το όριο στο ∞, παρατηρούμε πως

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{C-e^{-x}}{e^{x(\log x-1)}} = 0.$$

Πράγματι, ο αριθμητής τείνει στο C, ενώ για τον παρονομαστή έχουμε ότι ο εκθέτης $x(\log x-1)$ τείνει στο ∞, άρα και όλος ο παρονομαστής τείνει στο ∞.

5. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν συγκλίνουν ή όχι οι ακόλουθες σειρές:

$$\sum \frac{n+\cos n}{n^2+n\log n+10\sin n}, \qquad \sum \frac{1}{n\log(10^6 n)}.$$

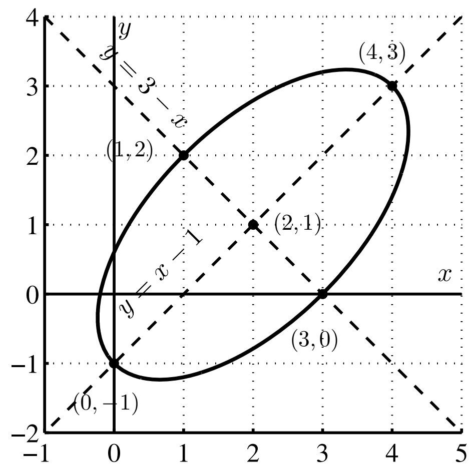
(Υπόδειξη: εφαρμόστε το κριτήριο της σύγκρισης στο όριο και το κριτήριο του ολοκληρώματος.)

Λύση:

(α') Παρατηρούμε πως για μεγάλες τιμές του n, μόνο οι πρώτοι όροι του αριθμητή και του παρονομαστή του κλάσματος είναι σημαντικοί, επομένως περιμένουμε τη σειρά να συμπεριφέρεται ως την σειρά με όρους τους $n/n^2 = 1/n$, δηλαδή την αρμονική, και να αποκλίνει. Πιο αυστηρά, θα εφαρμόσουμε το κριτήριο της σύγκρισης στο όριο, με $a_n = \frac{n+\cos n}{n^2+n\log n+10\sin n}$ και $b_n = \frac{1}{n}$. Έχουμε:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2+n\cos n}{n^2+n\log n+10\sin n} = \frac{1+\frac{\cos n}{n}}{1+\frac{\log n}{n}+\frac{10\sin n}{n^2}} \to 1,$$

επομένως από το κριτήριο σύγκρισης στο όριο, πράγματι η σειρά αποκλίνει.



Σχήμα 1: Η έλλειψη της Άσκησης 6.

(β΄) Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του ολοκληρώματος. Επομένως, θα υπολογίσουμε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_1^\infty \frac{dx}{x\log(10^6 x)}$. Παρατηρούμε καταρχάς πως:

$$\left[\log(\log(10^6 x))\right]' = \frac{1}{\log(10^6 x)} \cdot \frac{10^6}{10^6 x} = \frac{1}{x\log(10^6 x)}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x\log(10^6 x)} &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \left[\log(\log(10^6 x))\right]' \, dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[\log(\log(10^6 x)\right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \log(\log(10^6 t)) - \log(\log(10^6)) = \infty.\end{aligned}$$

6. **(Έλλειψη)** Έστω έλλειψη με κορυφές τα σημεία $(0,-1)$, $(1,2)$, $(4,3)$, και $(3,0)$.

(α΄) Σχεδιάστε την έλλειψη, και προσδιορίστε τις παραμέτρους a, b, καθώς και τις εξισώσεις των ευθειών στις οποίες βρίσκονται οι άξονες συμμετρίας της έλλειψης.

(β΄) Προσδιορίστε την εξίσωσή της έλλειψης. Η εξίσωση πρέπει να προσδιορίζει μια σχέση μεταξύ των συντεταγμένων x και y που ικανοποιούν τα σημεία (x, y) που ανήκουν στην έλλειψη.

Λύση:

(α΄) Η έλλειψη έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1. Παρατηρήστε πως έχει κέντρο το σημείο $(2,1)$, ενώ το μήκος του μεγάλου άξονα είναι $2a = \sqrt{(4-0)^2 + (3-(-1))^2} = 4\sqrt{2}$, επομένως $a = 2\sqrt{2}$. Παρομοίως, το μήκος του μικρού άξονα είναι $2b = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$, επομένως $b = \sqrt{2}$. Οι εξισώσεις των ευθειών από τις οποίες διέρχονται οι άξονες προκύπτουν εύκολα, και δίνονται στο σχήμα.

(β΄) Έστω ένα νέο σύστημα συντεταγμένων uv με κέντρο το σημείο $(x_0, y_0) = (2,1)$ και περιστραμμένο κατά γωνία $\theta = \pi/4$ σε σχέση με το σύστημα xy. Στο νέο αυτό σύστημα συντεταγμένων, η εξίσωση της έλλειψης είναι η

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{8} + \frac{v^2}{2} = 1.$$

Όμως, τα δύο συστήματα συντεταγμένων συνδέονται μέσω του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned} u &= (x-x_0)\cos\theta + (y-y_0)\sin\theta = (x-2)\sqrt{2}/2 + (y-1)\sqrt{2}/2, \\ v &= -(x-x_0)\sin\theta + (y-y_0)\cos\theta = -(x-2)\sqrt{2}/2 + (y-1)\sqrt{2}/2, \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας αυτές τις εξισώσεις στην εξίσωση της έλλειψης στο σύστημα uv προκύπτει ότι

$$u^2 + 4v^2 = 8 \Leftrightarrow \left[(x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (y-1)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2 + 4\left[-(x-2)\frac{\sqrt{2}}{2} + (y-1)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 - 4x + y^2 + 1 - 2y + 2xy + 4 - 2x - 4y + 4(x^2 + 4 - 4x + y^2 + 1 - 2y - 2xy - 4 + 4y + 2x) = 16$$

$$\Leftrightarrow (1+4)x^2 + (1+4)y^2 + (2-8)xy + (-4-2-8)x + (-2-4+8)y + (9+4) = 16$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 14x + 2y - 3 = 0.$$

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΚΑΘ: ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2015.

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, αν υπάρχουν. Αν δεν υπάρχουν, εξηγήστε γιατί.
   (α΄) *[0.5 μονάδα]* $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\right)$.
   (β΄) *[1 μονάδα]* $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{|x-2|}-\frac{1}{x-2}\right)$.
2. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)**
   (α΄) *[0.5 μονάδα]* Να αποδείξετε ότι
   $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-k^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-k^2}\right| + C,$$
   όπου k είναι δοσμένη θετική σταθερά.
   (β΄) *[0.5 μονάδα]* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα
   $$\int \frac{x^{10}}{\sqrt{x^{22}-1}}\,dx.$$

(γ′) *[1 μονάδα]* Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\cos x}.$$

(Υπόδειξη: Για το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορείτε να χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $y = \sin x$.)

3. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)** *[1.5 μονάδα]* Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/2} e^{\tan x} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx.$$

4. **(Παραγοντική Ολοκλήρωση)** *[1.5 μονάδα]* Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y'(x) = \frac{\log x}{(\sin y(x)) \log(\cos y(x))}.$$

Να βρείτε μια (μη διαφορική) εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση $y(x)$.

5. **(Μήκος καμπύλης)** *[1.5 μονάδα]* Να προσδιορίσετε το μήκος της καμπύλης που δημιουργεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$y(x) = \int_0^x \tan\theta \, d\theta$$

μεταξύ του $x = 0$ και του $x = \frac{\pi}{6}$. *(Υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το τρίτο σκέλος της Άσκησης 2.)*

6. **(Σειρές)** Για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, να αποδείξετε ότι ισχύει ή να βρείτε αντιπαράδειγμα.

(α′) *[1 μονάδα]* Αν συγκλίνει η σειρά $\sum a_n$, όπου οι όροι a_n είναι θετικοί, τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum \sin(a_n)$.

(β′) *[1 μονάδα]* Αν $\lim_{n\to\infty} n a_n = k$, όπου k θετικός πραγματικός αριθμός και οι a_n θετικοί, τότε η σειρά a_n αποκλίνει.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\\x_2-x_0&y_2-y_0&z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{c}u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{c}x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\mathrm{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix}x_0&y_0&z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_0&y_0\\x_1&y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2014-2015
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Ιουλίου Περιόδου 2014-2015

1. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, αν υπάρχουν. Αν δεν υπάρχουν, εξηγήστε γιατί.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}\right), \qquad \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{|x-2|}-\frac{1}{x-2}\right).$$

Λύση:

(α΄) Παρατηρείστε πως έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $0/0$, η οποία μπορεί να αφαιρεθεί ως εξής:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{2}{3}.$$

Θα μπορούσαμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε και τον Κανόνα L'Hôpital.

(β΄) Παρατηρούμε πως διαφέρουν τα πλευρικά όρια της δοσμένης έκφρασης. Πράγματι, ενώ έχουμε

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{|x-2|}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2^+}0=0,$$

για το δεύτερο πλευρικό όριο έχουμε

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{|x-2|}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2^-}\left(-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2^-}\left(-\frac{2}{x-2}\right)=\infty.$$

Επομένως, το όριο δεν υπάρχει.

2. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)**

(α΄) Να αποδείξετε ότι

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-k^2}}=\log\left|x+\sqrt{x^2-k^2}\right|+C,$$

όπου k είναι δοσμένη θετική σταθερά.

(β΄) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int\frac{x^{10}}{\sqrt{x^{22}-1}}\,dx.$$

(γ΄) Να προσδιορίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int\frac{dx}{\cos x}.$$

(Υπόδειξη: Για το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορείτε να χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $y=\sin x$.)

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα ορίζεται για δύο διακριτά διαστήματα, το $(-\infty,-k)$ και το (k,∞). Θα πάρουμε περιπτώσεις, ξεκινώντας από την περίπτωση που $x\in(k,\infty)$. Προφανώς έχουμε

$$\left|x+\sqrt{x^2-k^2}\right|=x+\sqrt{x^2-k^2},$$

επομένως

$$\left(\log\left|x+\sqrt{x^2-k^2}\right|\right)' = \left(\log\left(x+\sqrt{x^2-k^2}\right)\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-k^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-k^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-k^2}}\left(\frac{\sqrt{x^2-k^2}+x}{\sqrt{x^2-k^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-k^2}}.$$

Στην περίπτωση που $x \in (-\infty, -k)$, τότε με στοιχειώδη άλγεβρα έχουμε ότι η ποσότητα εντός του απόλυτου είναι πάντα αρνητική, επομένως

$$\left|x+\sqrt{x^2-k^2}\right| = -x-\sqrt{x^2-k^2},$$

επομένως

$$\left(\log\left|x+\sqrt{x^2-k^2}\right|\right)' = \left(\log\left(-x-\sqrt{x^2-k^2}\right)\right)' = \frac{1}{-x-\sqrt{x^2-k^2}}\left(-1-\frac{x}{\sqrt{x^2-k^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-k^2}}\left(\frac{\sqrt{x^2-k^2}+x}{\sqrt{x^2-k^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-k^2}},$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

(β′) Θέτουμε $u = x^{11}$, επομένως $du = 11x^{10}dx$, και έχουμε

$$\int \frac{x^{10}}{\sqrt{x^{22}-1}}\,dx = \frac{1}{11}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{11}\log\left|u+\sqrt{u^2-1}\right| + C = \frac{1}{11}\log\left|x^{11}+\sqrt{x^{22}-1}\right| + C.$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο σκέλος.

(γ′) Θέτουμε $y = \sin x \Rightarrow dy = \cos x dx$. Επομένως,

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dy = \int \frac{1}{1-\sin^2 x}\,dy = \int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \int \left[\frac{1}{2(1-y)} + \frac{1}{2(1+y)}\right]\,dy$$
$$= -\frac{1}{2}\log(1-y) + \frac{1}{2}\log(1+y) + C = \log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + C.$$

3. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)** Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/2} e^{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}\,dx$.

   Λύση: Παρατηρούμε καταρχήν πως το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό λόγω του απειρισμού της ολοκληρωτέας συνάρτησης στο $\pi/2$. Επιπλέον,

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

   Επομένως,

$$\int_0^{\pi/2} e^{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \lim_{y\to\pi/2}\int_0^y e^{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \lim_{y\to\pi/2}\int_0^y \left(e^{\tan x}\right)'\,dx$$
$$= \lim_{y\to\pi/2}\left(e^{\tan y}-1\right) = \lim_{y\to\pi/2} e^{\tan y} - 1 = \infty.$$

4. **(Παραγοντική Ολοκλήρωση)** Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y'(x) = \frac{\log x}{(\sin y(x))\log(\cos y(x))}.$$

   Να βρείτε μια (μη διαφορική) εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση $y(x)$.

   Λύση: Κατά τα γνωστά από τη θεωρία διαφορικών εξισώσεων χωριζομένων μεταβλητών, έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{\sin y \log(\cos y)} \Leftrightarrow \int (\sin y)\log(\cos y)dy = \int \log x\,dx.$$

Σχετικά με το πρώτο ολοκλήρωμα,

$$\int \sin y \log(\cos y)\, dy = \int (-\cos y)' \log(\cos y)\, dy = (-\cos y)\log(\cos y) + \int \frac{\cos y}{\cos y}(-\sin y)\, dy$$
$$= \log(\cos y)(-\cos y) + \cos y + C = \cos y\,[1 - \log(\cos y)] + C.$$

Σχετικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα,

$$\int \log x\, dx = \int (x)' \log x\, dx = x\log x - \int \frac{x}{x}\, dx = x\log x - x + C.$$

Επομένως,

$$\cos y(x)\,[1 - \log(\cos y(x))] = x\log x - x + C.$$

5. **(Μήκος καμπύλης)** Να προσδιορίσετε το μήκος της καμπύλης που δημιουργεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$y(x) = \int_0^x \tan\theta\, d\theta$$

μεταξύ του $x = 0$ και του $x = \frac{\pi}{6}$. *(Υπόδειξη: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το τρίτο σκέλος της Άσκησης 2.)*

Λύση: Μια δυνατή παραμετροποίηση είναι η

$$x(t) = t, \qquad y(t) = \int_0^t \tan\theta\, d\theta,$$

επομένως, κατά τα γνωστά από τη θεωρία, έχουμε

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + (\tan t)^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos t} = \log\sqrt{\frac{1+\sin\pi/6}{1-\sin\pi/6}} = \log\sqrt{3} = \frac{1}{2}\log 3.$$

Στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το τρίτο σκέλος της Άσκησης 2.

6. **(Σειρές)** Για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, να αποδείξετε ότι ισχύει ή να βρείτε αντιπαράδειγμα.

(α′) Αν συγκλίνει η σειρά $\sum a_n$, όπου οι όροι a_n είναι θετικοί, τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum \sin(a_n)$.

(β′) Αν $\lim_{n\to\infty} na_n = k$, όπου k θετικός πραγματικός αριθμός και οι a_n θετικοί, τότε η σειρά a_n αποκλίνει.

Λύση:

(α′) Για $x > 0$ ισχύει ότι $\sin x \leq x$. Επομένως, από το κριτήριο της σύγκρισης, έχουμε ότι αφού η $\sum a_n$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η μικρότερή της $\sum \sin(a_n)$.

(β′) Παρατηρήστε πως

$$\lim_{n\to\infty} na_n = k \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = k,$$

επομένως, από το κριτήριο της σύγκρισης στο όριο προκύπτει πως η σειρά $\sum a_n$ αποκλίνει, αφού αποκλίνει η αρμονική σειρά $\sum \frac{1}{n}$.

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΚΑΘ: ΣΤΑΥΡΟΣ ΤΟΥΜΠΗΣ
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2015.

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: ....

Οδηγίες

1. **Συμπληρώστε το όνομά σας άνω, και παραδώστε το παρόν με τις λύσεις**.
2. Διάρκεια εξέτασης: 2 ΩΡΕΣ.
3. Απαγορεύεται η αναχώρηση από την αίθουσα πριν την συμπλήρωση 30λέπτου.
4. Απαγορεύεται η χρήση υπολογιστή χειρός. Απαγορεύεται η χρήση κινητού, και ως υπολογιστή χειρός.
5. Οι λύσεις πρέπει να γραφούν αποκλειστικά στην παρεχόμενη κόλλα.
6. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε μολύβι ή/και στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός από κόκκινο.
7. Οι λύσεις πρέπει να είναι το κατά δυνατόν αναλυτικές. **Πρέπει να φαίνονται όλα τα ενδιάμεσα βήματα στους υπολογισμούς. Τοποθετήστε τα τελικά αποτελέσματα εντός πλαισίου.**
8. Ξεκινήστε από αυτές τις ασκήσεις που ξέρετε και/ή δίνουν πολλές μονάδες.
9. Προχωρήστε κάθε άσκηση όσο μπορείτε! Θα δοθούν μονάδες για ασκήσεις λυμένες εν μέρει.
10. Σύμφωνα με τον κανονισμό εξετάσεων, σε περίπτωση που διαπιστωθεί (κατά τη διάρκεια της εξέτασης είτε της διόρθωσης) αντιγραφή είτε απόπειρα αντιγραφής, θα ενημερωθούν τα αρμόδια όργανα του ιδρύματος.

Θέματα

1. **(Παράγωγος)** *(1.5 μονάδα)* Έστω η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Να υπολογίσετε την παράγωγο της f παντού στο $\mathbb{R}$ (άρα και στο 0).

2. **(Καταχρηστικά ολοκληρώματα)** *(2 μονάδες)* Να υπολογίσετε τα ακόλουθα καταχρηστικά ολοκληρώματα:
$$\int_0^1 \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\, dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x}\sin(e^{-x})\, dx.$$

3. **(Όγκος εκ περιστροφής)**

   (α′) *(0.5 μονάδα)* Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \cos x$ μεταξύ των σημείων $x = -\pi/2$ και $x = \pi/2$ περί τον άξονα των x.

(β′) *(1 μονάδα)* Να επαναλάβετε το προηγούμενο σκέλος στην περίπτωση που η περιστροφή γίνεται περί την ευθεία $y = -1$.

4. **(Διαφορική Εξίσωση)** *(2 μονάδες)* Υπολογίστε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + \frac{1}{\cos^2 x} y(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$. Ακολούθως, να υπολογίσετε το όριο των λύσεών της καθώς $x \to \pi/2$ και καθώς $x \to -\pi/2$. *(Υπόδειξη: ποια είναι η παράγωγος της $\tan x$;)*

5. **(Πολυώνυμο Taylor)** *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο Taylor 4ου βαθμού της συνάρτησης $f(x) = x \cos x$ περί τη θέση $x = 0$.

6. **(Σειρές)**

(α′) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει η σειρά $\sum 1/(n^5 - n^3 + 2)$ χρησιμοποιώντας το Κριτήριο της Σύγκρισης.

(β′) *(1 μονάδα)* Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} 1/((\log n)^{(\log n)})$ χρησιμοποιώντας το Κριτήριο του Ολοκληρώματος.

Τυπολόγιο

$$\cos(y-x)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),\quad \cos x-\cos y=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right],\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$
$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x},\quad \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c<x<c+\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0:c-\delta<x<c\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.$$
$$\forall\epsilon>0\exists X\in\mathbb{R}:x<X\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon.\qquad \forall M\in\mathbb{R}\exists\delta>0:0<|x-c|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$$
$$\forall M\in\mathbb{R}\exists X\in\mathbb{R}:x>X\Rightarrow f(x)>M.\qquad \forall\epsilon>0\exists N\in\mathbb{N}:n>N\Rightarrow|a_n-L|<\epsilon.$$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C|x-x_0|,\quad |f(y)-f(x)|\le C|y-x|$$
$$(\arcsin y)'=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arccos y)'=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\quad (\arctan y)'=\frac{1}{1+y^2}$$
$$f(\theta x_0+(1-\theta)x_1)<\theta f(x_0)+(1-\theta)f(x_1)$$
$$L(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1}),\quad U(f,P)\triangleq\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}),\quad \sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$
$$\left\{\begin{array}{l}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}r=\sqrt{x^2+y^2},\\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$$
$$\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)\,d\theta,\quad \pi\int_a^b f^2,\quad 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx,\quad \int_a^b A(t)\,dt,\quad \int_a^b\sqrt{(f'(x))^2+(g'(x))^2}\,dx$$
$$y'+P(x)y=Q(x),\quad y(x)=[S(x)+C]\exp[-R(x)]$$
$$y(x)=\left\{y_0+\int_{x_0}^{x}Q(u)\exp\left[\int_{x_0}^{u}P(t)\,dt\right]du\right\}\exp\left[-\int_{x_0}^{x}P(t)\,dt\right]$$
$$E_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt,\quad |E_n(x)|\le M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}f(k),\quad t_n=\int_1^n f(x)\,dx$$
$$S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad 0<(-1)^n(S-s_n)<a_{n+1}$$
$$A_\parallel=\left[\frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\right]B,\quad A_\perp=A-A_\parallel,\quad (x-x_0,y-y_0)(A,B)=0\Leftrightarrow Ax+By=Ax_0+By_0$$
$$\begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}x-x_0&y-y_0&z-z_0\\x_1-x_0&y_1-y_0&z_1-z_0\\x_2-x_0&y_2-y_0&z_2-z_0\end{vmatrix}=0,$$
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0$$
$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\epsilon^2)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(\epsilon^2-1)}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\left\{\begin{array}{l}u=(x-x_0)\cos\theta+(y-y_0)\sin\theta,\\ v=-(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$\left\{\begin{array}{l}x=x_0+u\cos\theta-v\sin\theta,\\ y=y_0+u\sin\theta+v\cos\theta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+u\\y_0+v\end{pmatrix},\quad \theta=\frac{1}{2}\operatorname{arccot}\frac{A-C}{B}$$
$$\begin{vmatrix}x_0&y_0&z_0\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=x_0\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}-y_0\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}+z_0\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}x_0&y_0\\x_1&y_1\end{vmatrix}=x_0y_1-x_1y_0.$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1, 2014-2015
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Λύσεις Τελικής Εξέτασης Σεπτεμβρίου Περιόδου 2014-2015

1. **(Παράγωγος)** Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε την παράγωγο της f παντού στο $\mathbb{R}$ (άρα και στο 0).

Λύση: Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως γινόμενο συνεχούς συνάρτησης με συνάρτηση που είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Κατά τα γνωστά από τους κανόνες παραγώγισης, έχουμε, για $x \neq 0$,

$$f'(x) = \left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)' = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Το δύσκολο είναι να δείξουμε τη συνέχεια στο 0. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Σχετικά με το άνω όριο, παρατηρούμε πως

$$-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|,$$

για κάθε x, οπότε από το Κριτήριο της Παρεμβολής προκύπτει πως το όριο ισούται με το 0, επομένως

$$f'(0) = 0.$$

2. **(Καταχρηστικά ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα καταχρηστικά ολοκληρώματα:

$$\int_0^1 \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x}\sin(e^{-x})\,dx.$$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό διότι η ολοκληρωταία συνάρτηση απειρίζεται καθώς $x \to 1$. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $u = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Rightarrow du = -\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{\pi}{2}dx$. Επίσης, $x = 0 \Rightarrow u = 1$ και $x = 1 \Rightarrow u = 0$. Επομένως,

$$\int_0^1 \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \left(-\frac{2}{\pi}\right)\int_1^0 \frac{du}{u} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (\log u)'\,du = \frac{2}{\pi}(\log 1 - \log 0) = \frac{2}{\pi}(0-(-\infty)) = \infty.$$

(β΄) Παρατηρούμε πως το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό λόγω του απειρισμού του ενός ορίου. Θέτουμε $u = e^{-x}$ για το οποίο $du = -e^{-x}dx$, και $x = 0 \Rightarrow u = 1$, $x = \infty \Rightarrow u = 0$. Επομένως,

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin(e^{-x})\,dx = -\int_1^0 \sin u\,du = \int_0^1 (-\cos u)'\,du = \cos 0 - \cos 1 = 1 - \cos 1.$$

3. **(Όγκος εκ περιστροφής)**

(α΄) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \cos x$ μεταξύ των σημείων $x = -\pi/2$ και $x = \pi/2$ περί τον άξονα των x.

(β΄) Να επαναλάβετε το προηγούμενο σκέλος στην περίπτωση που η περιστροφή γίνεται περί την ευθεία $y = -1$.

Λύση:

(α′) Κατά τα γνωστά από την θεωρία έχουμε

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi(\cos x)^2\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}\left(\pi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2x\, dx\right) = \pi^2/2.$$

(β′) Παρατηρούμε ότι ο συγκεκριμένος όγκος είναι ίδιος με τον όγκο του στερεού που προκύπτει αν περιστρέψουμε περί τον άξονα των x το γράφημα της συνάρτησης $g(x) = 1 + \cos x$. Επομένως,

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi(1+\cos x)^2\, dx = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx + \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos x\, dx + \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$$
$$= \pi^2 + 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x)'\, dx + \pi^2/2 = \frac{3}{2}\pi^2 + 4\pi.$$

4. **(Διαφορική Εξίσωση)** Υπολογίστε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + \frac{1}{\cos^2 x} y(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$. Ακολούθως, να υπολογίσετε το όριο των λύσεών της καθώς $x \to \pi/2$ και καθώς $x \to -\pi/2$. *(Υπόδειξη: ποια είναι η παράγωγος της* $\tan x$*;)*

Λύση: Παρατηρήστε πως

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Κατά τα γνωστά από τη θεωρία των γραμμικών ΔΕ πρώτης τάξης, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο σκέλη της ΔΕ με το $e^{\tan x}$ και έχουμε

$$e^{\tan x} y'(x) + e^{\tan x} \frac{1}{\cos^2 x} y(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \left(e^{\tan x} y(x)\right)' = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} = \left(e^{\tan x}\right)'$$
$$\Leftrightarrow y(x) e^{\tan x} = e^{\tan x} + C \Leftrightarrow y(x) = 1 + \frac{C}{e^{\tan x}}.$$

Σχετικά με τα όρια των λύσεων, παρατηρήστε πως $\tan x \to \infty$ καθώς $x \to \pi/2$ και $\tan x \to -\infty$ καθώς $x \to -\pi/2$. Επομένως,

$$\lim_{x\to\pi/2} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\pi/2} f(x) = \begin{cases} \infty, & C > 0, \\ 1, & C = 0, \\ -\infty, & C < 0. \end{cases}$$

5. **(Πολυώνυμο Taylor)** Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο Taylor 4ου βαθμού της συνάρτησης $f(x) = x\cos x$ περί τη θέση $x = 0$.

Λύση: Υπολογίζουμε τις παραγώγους μέχρι 4ου βαθμού της δοσμένης συνάρτησης

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - x\sin x, \\ f''(x) &= -\sin x - \sin x - x\cos x = -2\sin x - x\cos x, \\ f'''(x) &= -2\cos x - \cos x + x\sin x = -3\cos x + x\sin x, \\ f^{(4)}(x) &= 3\sin x + \sin x + x\cos x = 4\sin x + x\cos x, \end{aligned}$$

επομένως

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = -3 \quad f^{(4)}(0) = 0,$$

και το πολυώνυμο Taylor τέταρτου βαθμού είναι το

$$f(x) = x - \frac{3}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{2}.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να πολλαπλασιάσουμε το αντίστοιχο πολυώνυμο Taylor με το x, χρησιμοποιώντας γνωστό μας θεώρημα.

6. **(Σειρές)**

(α΄) Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει η σειρά $\sum 1/(n^5 - n^3 + 2)$ χρησιμοποιώντας το Κριτήριο της Σύγκρισης.

(β΄) Να προσδιορίσετε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} 1/((\log n)^{(\log n)})$ χρησιμοποιώντας το Κριτήριο του Ολοκληρώματος.

Λύση:

(α΄) Παρατηρήστε πως από κάποιο n_0 και μετά, έχουμε

$$\frac{1}{n^5 - n^3 + 2} \leq \frac{1}{n^2},$$

και επειδή η $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η δοσμένη σειρά.

(β΄) Καταρχάς, θα επιχειρήσουμε να λύσουμε την άσκηση με το Κριτήριο της Ρίζας. Παρατηρούμε πως

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(\log n)^{\log n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} (\log n)^{\frac{\log n}{n}}}.$$

Όμως,

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{\frac{\log n}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\log(\log n)\frac{\log n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log(\log n)\log n}{n}}$$

Ακολούθως,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\log(\log n)\log n}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\log n} \times \frac{1}{n} \times \log n + \log(\log n) \times \frac{1}{n}}{1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{\log(\log n)}{n}\right) = 0 + \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\log n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\log n} \times \frac{1}{n}}{1} = 0.\end{aligned}$$

Στην πρώτη και στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον Κανόνα L'Hôpital. Άρα τελικά δεν μπορούμε να αποφανθούμε χρησιμοποιώντας το Κριτήριο της Ρίζας, αφού το αντίστοιχο όριο του κριτηρίου τείνει στο $e^0 = 1$.

Θα χρησιμοποιήσουμε, λοιπόν, το Κριτήριο του Ολοκληρώματος, σύμφωνα με την υπόδειξη. Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log x}}\, dx.$$

Αν το άνω ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο, θα είναι πεπερασμένη και η σειρά. Θέτουμε $u = \log x \Leftrightarrow e^u = x$, για το οποίο έχουμε $du = \frac{dx}{x} = \frac{dx}{e^u}$. Επίσης, $x = 2 \Rightarrow u = \log 2$, $x = \infty \Rightarrow u = \infty$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log x}}\, dx &= \int_{\log 2}^{\infty} u^{-u} e^u\, du = \int_{\log 2}^{\infty} e^{u - u\log u}\, du = \int_{\log 2}^{2} e^{u-u\log u}\, du + \int_2^{\infty} e^{u-u\log u}\, du \\ &\leq \int_{\log 2}^{2} e^{u-u\log u}\, du + \int_2^{\infty} e^{u(1-\log 2)}\, du = \int_{\log 2}^{2} e^{u-u\log u}\, du + \left[\frac{e^{u(1-\log 2)}}{1-\log 2}\right]_2^{\infty} < \infty.\end{aligned}$$

Άρα τελικά η σειρά συγκλίνει.