ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Σ. ΤΟΥΜΠΗΣ

ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2024-2025

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Περίληψη:

   (α΄) Υπάρχει μια ομάδα ασκήσεων για κάθε ένα κεφάλαιο του βιβλίου, και η καταληκτική ημερομηνία παράδοσής της θα είναι περίπου 5-10 μέρες μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου.

   (β΄) Η καταληκτική ημέρα παράδοσης κάθε ομάδας ανακοινώνεται στο μάθημα και αναρτάται στην ατζέντα του eClass τουλάχιστον μια εβδομάδα νωρίτερα.

   (γ΄) Οι λύσεις μιας ομάδας ασκήσεων αναρτώνται στο eClass λίγες μέρες μετά την ημερομηνία παράδοσης της επόμενης ομάδας ασκήσεων.

   (δ΄) Οι βαθμολογίες αναρτώνται στο eClass, και αυξάνουν, υπό προϋποθέσεις, την τελική βαθμολογία.

   (ε΄) Αρκετές από τις ασκήσεις είναι αρκετά δύσκολες. Η τελική εξέταση θα είναι πιο βατή από αυτές.

   (ϛ΄) Διαβάζετε προσεκτικά τις λύσεις, όταν αυτές αναρτώνται.

2. Επίδραση στον τελικό βαθμό:

   (α΄) Οι ασκήσεις προσφέρουν bonus 2 (στις 10) μονάδων, **εφόσον ο βαθμός στην τελική εξέταση είναι προβιβάσιμος**, δηλαδή 5 και άνω.

   (β΄) Δεν χρειάζεται να παραδώσετε όλες τις ομάδες ασκήσεων για να πάρετε το bonus. Μπορείτε να παραδώσετε τις μισές για να πάρετε μια μονάδα (εφόσον βέβαια είναι σωστές), κ.ο.κ. Ομοίως, δεν απαιτείται να παραδώσετε όλες τις ασκήσεις μιας ομάδας.

   (γ΄) **Δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, για να πάρετε το bonus, εργασίες παρελθόντων ετών.**

3. Παράδοση (γενικές οδηγίες):

   (α΄) Μπορείτε να παραδώσετε τις ομάδες σας μόνο ηλεκτρονικά, μέσω του εργαλείου των Εργασιών του eclass.

   (β΄) Μπορείτε να παραδώσετε τις ομάδες ακόμα και αν η εγγραφή σας στο ΟΠΑ δεν έχει γίνει ακόμα, στέλνοντάς τες με μήνυμα email στον διδάσκοντα (αφορά φοιτητές εκ μεταγραφής και συναφείς περιπτώσεις.)

   (γ΄) Απαγορεύεται η τμηματική παράδοση μιας ομάδας (για παράδειγμα, η μισή μια μέρα και η μισή κάποια άλλη μέρα).

   (δ΄) Πριν την παράδοση, γράψτε, ευανάγνωστα, οπωσδήποτε το όνομά σας, τον αριθμό της ομάδας ασκήσεων, και, αν έχετε, τον αριθμό μητρώου σας, πάνω δεξιά στην πρώτη σελίδα. (Οι φοιτητές των κατατακτηρίων και ορισμένοι προερχόμενοι από μεταγραφές δεν έχουν αριθμούς μητρώου. Για αυτούς αρκεί να υπάρχει το όνομά τους.)

   (ε΄) Μπορείτε να γράφετε με μολύβι ή/και με στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός κόκκινου.

   (ϛ΄) Μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα σας οποτεδήποτε πριν την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης.

4. Ηλεκτρονική παράδοση:

   (α΄) Η ηλεκτρονική παράδοση γίνεται αποκλειστικά μέσω του ειδικού εργαλείου του eClass, και ΟΧΙ με αποστολή email στο διδάσκοντα, με εξαίρεση άτομα που δεν έχουν ολοκληρώσει την εγγραφή τους.

(β΄) Δεκτά είναι μόνο σκαναρισμένα (έστω και με κινητό τηλέφωνο) ή δακτυλογραφημένα έγγραφα (με χρήση MS WORD κτλ.), και όχι, για παράδειγμα, φωτογραφίες κακής ποιότητας.

(γ΄) Αποφύγετε πάντως την δακτυλογράφηση των εργασιών. Μπορείτε να αξιοποιήσετε τον πεπερασμένο χρόνο σας πολύ καλύτερα.

(δ΄) Παραδίδετε για κάθε εργασία **ένα μόνο ασυμπίεστο αρχείο PDF ή doc μεγέθους το πολύ 3MB** με ονομασία τον αριθμό μητρώου σας και τίποτα άλλο (π.χ. 3030666.pdf). Ιδιαιτέρως, ΜΗΝ παραδίδετε αρχεία zip που περιέχουν πολλές φωτογραφίες.

(ε΄) Μην αφήνετε σχόλια στο eClass μέσω του σχετικού εργαλείου, εκτός αν είναι απόλυτη ανάγκη.

(ϛ΄) Προσοχή: ενδέχεται η δυνατότητα ηλεκτρονικής υποβολής των ασκήσεων μέσω του αντίστοιχου εργαλείου του eClass να ενεργοποιηθεί λίγες μόνο μέρες πριν την καταληκτική προθεσμία παράδοσης, και αρκετά μετά την ανακοίνωση αυτής της προθεσμίας.

(ζ΄) Καταληκτική ώρα παράδοσης: **Παραδίδετε ηλεκτρονικά την ομάδα μέχρι τις 11:55μμ της ανακοινωμένης ημέρας παράδοσης.**

(η΄) **ΔΕΝ ΘΑ ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΘΟΥΝ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΠΟΥ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΥΝ ΣΟΒΑΡΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΩ ΟΔΗΓΙΕΣ.**

5. Καθυστέρηση στην παράδοση:

   (α΄) Μπορείτε να καθυστερήσετε την παράδοση των ομάδων ασκήσεων, χωρίς επίπτωση, βάσει του ακόλουθου κανόνα: Μπορείτε να καθυστερήσετε το πολύ ΤΡΕΙΣ ομάδες ασκήσεων, και να τις παραδώσετε όταν θα παραδίδατε και την επόμενη κάθε μιας από αυτές, αν οι ημερομηνίες παράδοσής τους διαφέρουν, ή την πρώτη που ακολουθεί με διαφορετική ημερομηνία παράδοσης, αν η ημερομηνία παράδοσής τους είναι κοινή. Επομένως, αν η ομάδα i έχει ημερομηνία παράδοσης την X_i και η ομάδα $i+1$ έχει ημερομηνία παράδοσης την X_{i+1}, τότε μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα i στην ημερομηνία X_{i+1}, εφόσον $X_{i+1} > X_i$, αλλιώς στο πρώτο $X_k > X_i$. ΟΜΩΣ, δεν μπορείτε να παραδώσετε μια ομάδα σε κάποια ημερομηνία $X_l > X_k > X_i$.

   (β΄) Μην ζητήσετε παράταση εκ των προτέρων: απλώς ο διορθωτής θα δει ότι παραδώσατε καθυστερημένα την ομάδα. Οι ομάδες ασκήσεων που παραδίδονται εκπρόθεσμα παραδίδονται όπως και οι άλλες.

6. Βαθμολόγηση:

   (α΄) Η βαθμολόγηση θα είναι πρόχειρη, λόγω έλλειψης ανθρώπινων πόρων.

   (β΄) Αν οι πράξεις που απαιτούνται για να προκύψει ένα αριθμητικό αποτέλεσμα είναι αρκετές, μπορείτε να δώσετε το εν λόγω αποτέλεσμα ως έκφραση που περιέχει παραγοντικά, συνδυασμούς, γινόμενα με πολλούς παράγοντες, αθροίσματα με πολλούς όρους, κτλ., χωρίς καμία βαθμολογική απώλεια.

7. Ανακοίνωση βαθμολογίας: Οι εργασίες θα διορθώνονται με καθυστέρηση τουλάχιστον ενός μήνα από την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης. Η βαθμολογία θα αναρτάται περιοδικά στα έγγραφα του eClass. Αν έχετε ενστάσεις σχετικά με τη διόρθωση, στείλτε ένα αναλυτικό mail στον διδάσκοντα.

8. Συνεργασία:

   (α΄) Μπορείτε να συνεργαστείτε όσο θέλετε, και να ανταλλάξετε προφορικά ιδέες, ακόμα και λύσεις.

   (β΄) Αρκεί ο καθένας να γράψει μόνος του την λύση του, και να καταλαβαίνει τι γράφει.

   (γ΄) Εργασίες εμφανώς αντιγραμμένες θα μηδενίζονται, και **όλο το bonus του συγγραφέα τους θα τίθεται αμετάκλητα στο μηδέν.** Επομένως, άλλες εργασίες που έχει ήδη παραδώσει ή θα παραδώσει στο μέλλον δεν θα έχουν επίδραση στο τελικό του βαθμό.

   (δ΄) Απαγορεύεται να δείτε λύσεις ασκήσεων παλαιοτέρων ετών ή λύσεις των ίδιων ασκήσεων από το διαδίκτυο.

9. Σημαντικά σχόλια:

   (α΄) Προσπαθήστε να είστε κατά το δυνατόν σαφείς στις λύσεις σας. Δεν βοηθά μόνο τους διορθωτές, αλλά και εσάς να οργανώνετε τη σκέψη σας καλύτερα.

   (β΄) Ενημερώστε άμεσα τον διδάσκοντα σε περίπτωση εύρεσης λάθους είτε στις εκφωνήσεις είτε στις λύσεις.

   (γ΄) Ενημερώστε τον διδάσκοντα αν η παράδοση μιας ομάδας ασκήσεων συμπίπτει με την παράδοση ασκήσεων άλλων μαθημάτων του **ίδιου** εξαμήνου. (*Ενδεχομένως* να υπάρξει αλλαγή, αν η ύλη το επιτρέπει.)

   (δ΄) Για την εύρυθμη λειτουργία του μαθήματος, προσπαθήστε να τηρήσετε κατά το δυνατόν όλες τις άνω οδηγίες.

   (ε΄) **Βλέπετε το mail που σας έχει δώσει το ΟΠΑ (xx@aueb.gr).** Το έχετε για να επικοινωνούν μαζί σας οι διδάσκοντες, εκτός των άλλων και όταν υπάρχει πρόβλημα με την παράδοση κάποιας εργασίας.

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Ένα σύνολο που δεν είναι πεδίο)** Έστω το σύνολο των αριθμών $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τους οποίους ορίζουμε την πρόσθεση modulo 6 και τον πολλαπλασιασμό modulo 6. Δηλαδή, για να υπολογίσουμε την πρόσθεση (πολλαπλασιασμό) modulo 6 δύο στοιχείων προσθέτουμε (πολλαπλασιάζουμε) τα στοιχεία μεταξύ τους και κατόπιν λαμβάνουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 6. Είναι αυτό το σύνολο, εφοδιασμένο με αυτές τις πράξεις, πεδίο; Γιατί;

2. **(Πρόσθεση αρχείων)** Δίνονται δύο σκληροί δίσκοι, έστω A και B, με χωρητικότητα 1 TB ο καθένας, εντελώς γεμάτοι με δεδομένα που δεν μπορούν να συμπιεστούν. Σας δίνεται και ένας τρίτος, έστω C, κενός, της ίδιας χωρητικότητας. Πως μπορείτε να τον χρησιμοποιήσετε ώστε να μην χάσετε καθόλου δεδομένα των A,B, σε περίπτωση που χαθεί ένας (οποιοσδήποτε) από τους τρεις; Χρησιμοποιήστε πρόσθεση modulo 2 μεταξύ αντίστοιχων bits των δίσκων A και B.

3. **(Εύρεση supremum και infimum)** Προσδιορίστε τα supremum, infimum, maximum και minimum των ακόλουθων συνόλων:
$$[0,1), \quad (0,1], \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{1-\frac{1}{2},\, 1-\frac{1}{3},\, 1-\frac{1}{4}, \dots\right\}, \quad A = \{x : (x-\sqrt{7})(x-6) \leq 0\}, \quad A \cap \mathbb{Q}.$$

4. **(Supremum υποσυνόλου)** Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν για δύο σύνολα έχουμε $A \subset B$, τότε $\sup A < \sup B$.

5. **(Αυθαίρετα κοντινά σύνολα)** Έστω δύο μη κενά σύνολα A και B τέτοια ώστε για κάθε $x \in A$ και $y \in B$ έχουμε $x \leq y$, και επιπλέον για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A$, $y \in B$, τέτοια ώστε $y - x < \epsilon$. Να δείξετε ότι υπάρχουν τα $\sup A$, $\inf B$ και μάλιστα είναι ίσα.

6. **(Infimum αθροίσματος)** Έστω συναρτήσεις $f, g : B \to \mathbb{R}$ κάτω φραγμένες στο σύνολο B. Να δείξετε ότι
$$\inf\{f(x)+g(x) : x \in B\} \geq \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$
Πότε ισχύει η ισότητα;

7. **(Άθροισμα άρτιας και περιττής)** Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Οποιαδήποτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα μιας περιττής και μιας άρτιας συνάρτησης.

8. **(Αύξουσα σύνθεση)** Να δείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι (γνησίως) αύξουσες, τότε είναι (γνησίως) αύξουσα και η σύνθεσή τους $f \circ g$.

9. **(Φθίνουσα σύνθεση)** Να δείξετε ότι αν η f είναι (γνησίως) αύξουσα και η g είναι (γνησίως) φθίνουσα, τότε οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, εφόσον ορίζονται, είναι (γνησίως) φθίνουσες.

2η Ομάδα Ασκήσεων

10. **(Όριο απολύτου)** Να δείξετε, αποκλειστικά με χρήση του ορισμού του ορίου, ότι $\lim_{x\to 0}|x| = 0$.

11. **(Υπαρξη ορίου)** Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x^2)$ τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

12. **(Υπαρξη ορίου)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ και $\lim_{x\to x_1} g(x) = x_0$, τότε $\lim_{x\to x_1} f(g(x)) = L$.

13. **(Όριο αντίστροφης συνάρτησης)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, τότε και $\lim_{x\to x_0} 1/f(x) = 0$.

14. **(Όριο αντίστροφης συνάρτησης)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, τότε και $\lim_{x\to x_0} 1/f(x) = \infty$.

15. **(Αύξουσα συγκλίνουσα συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και υπάρχει το πεπερασμένο όριο $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$, τότε είναι φραγμένη άνω.

16. **(Όρια του** $\cos x$ **στο** $\pm\infty$**)** Να δείξετε, με χρήση του ορισμού του ορίου και όχι με γραφικά επιχειρήματα, ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\infty} \cos x$, $\lim_{x\to-\infty} \cos x$.

17. **(Ορισμός Ορίου)** Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to -4} \frac{17}{(x+4)^2} = \infty$ χρησιμοποιώντας τον **ορισμό** του αντίστοιχου ορίου.

18. **(Όριο)** Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+7} - ax \right),$$

όπου το $a \in \mathbb{R}$ είναι άγνωστη παράμετρος. Το όριο εξαρτάται από την τιμή του a, επομένως πρέπει να εξετάσετε διαφορετικές περιπτώσεις για την τιμή του a.

19. **(Βηματική συνάρτηση)** Δίνεται η βηματική συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Προσδιορίστε τα ακόλουθα όρια, ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν:

$$\lim_{x\to 0} \min\{u(x), u(-x)\}, \qquad \lim_{x\to 0} u(x^2), \qquad \lim_{x\to\infty} u\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to 0} u\left(\frac{1}{x}\right).$$

Δεν χρειάζεται να επικαλεστείτε τον ορισμό του ορίου.

20. **(Όρια)**

(α΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{\sqrt{x}},$$

όπου το *ακέραιο μέρος* $\lfloor x \rfloor$ του x είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος από τον x.

(β΄) Να βρείτε τιμές που μπορούν να πάρουν οι πραγματικές παράμετροι a, b ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin(x+b)}{x - \frac{\pi}{2}} = 10.$$

(Υπάρχουν πολλές σωστές απαντήσεις και αρκεί να βρείτε μια.)

(γ΄) Βρείτε *όλα* τα ζεύγη τιμών για τις παραμέτρους a, b ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin(x+b)}{x - \frac{\pi}{2}} = 10.$$

21. **(Όρια)** Να προσδιορίσετε τα παρακάτω όρια, εφόσον υπάρχουν:

(α΄) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{|\cos x|}{2} \right)^x$.

(β΄) $\lim_{x\to\infty} |\cos x|^x$.

3η Ομάδα Ασκήσεων

22. **(Υπολογισμός ορίων)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

    (α′) $\lim_{x\to 0} \sin\sin x$.

    (β′) $\lim_{x\to 1} \tan\frac{x^2+1}{x^3+2}$.

23. **(Κοινό πρόσημο σε ανοικτή γειτονιά)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0) > 0$ (εναλλακτικά, $f(x_0) < 0$), τότε υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά I γύρω από το x_0, δηλαδή ένα διάστημα της μορφής $I = (a, b)$ με $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ (εναλλακτικά, $f(x) < 0$) παντού στο I.

24. **(Ύπαρξη ριζών πολυωνύμων)** Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

25. **(Υλοποίηση Μεθόδου Διχοτόμησης)** Να υλοποιήσετε την Μέθοδο της Διχοτόμησης σε μια γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας, και κατόπιν να την εκτελέσετε για να εντοπίσετε μια ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x - \cos x$, ξεκινώντας από το αρχικό διάστημα $[0, \pi]$ και εκτελώντας 20 επαναλήψεις. Ο κώδικας πρέπει να εξάγει σαν ενδιάμεσα αποτελέσματα τα διαδοχικά διαστήματα που εξετάζει. Να παραδώσετε στις λύσεις τον κώδικά σας και τα εξαγόμενα ενδιάμεσα και τελικά αποτελέσματα από αυτόν.

26. **(Άπειρες ρίζες)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Υπάρχει μη σταθερή συνεχής συνάρτηση με άπειρες ρίζες σε φραγμένο κλειστό διάστημα.

27. **(Συνέχεια Lipschitz φυσικών δυνάμεων)** Δείξτε ότι η $f(x) = x^n$, όπου $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε φραγμένο διάστημα και όχι Lipschitz συνεχής σε κάθε μη φραγμένο διάστημα. Χρησιμοποιήστε αποκλειστικά τον ορισμό της συνέχειας Lipschitz.

28. **(Συνέχεια Lipschitz συνημιτόνου)** Δείξτε ότι η $f(x) = A\cos(ax + b)$ όπου $A, a, b \in \mathbb{R}$, είναι Lipschitz συνεχής στο $\mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό της συνέχειας Lipschitz.

4η Ομάδα Ασκήσεων

29. **(Συνάρτηση Dirichlet)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $x^2 f_D(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 αλλά πουθενά αλλού. Η συνάρτηση Dirichlet $f_D(x)$ ορίζεται ως εξής:

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

30. **(Χρήση ορισμού)** Υπολογίστε την παράγωγο της εφαπτομένης $\tan x$ με χρήση του ορισμού της παραγώγου.

31. **(Χρήση ορισμού)** Υπολογίστε παντού την παράγωγο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $f(x) = \sqrt{|x|}$ με χρήση του ορισμού της παραγώγου.

32. **(Ύπαρξη δεύτερης παραγώγου)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη παντού στο $\mathbb{R}$ τότε πρέπει να έχει και δεύτερη παράγωγο παντού στο $\mathbb{R}$.

33. **(Ανισότητα παραγώγων)** Έστω συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $f(a) = g(a)$ και $f'(x) \geq g'(x)$ παντού σε ένα διάστημα $I = [a, b]$ ή $I = [a, \infty)$. Να δείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ παντού στο I.

34. **(Κριτήριο ακρότατου)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν $f'(x_0) = 0$, τότε η συνάρτηση $f(x)$ έχει τοπικό ακρότατο στο x_0.

35. **(Γνησίως μονότονη συνάρτηση $\Rightarrow$ θετική παράγωγος)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε $f'(x) > 0$ παντού στο (a, b).

36. **(Υπολογισμοί αόριστων ολοκληρωμάτων)** Υπολογίστε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

    (α΄) $\int x^2 \sin x \, dx$.

    (β΄) $\int x^2 \cos x \, dx$.

37. **(Αόριστο Ολοκλήρωμα)** Να υπολογίσετε το ακόλουθο αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int x^2 \arctan x \, dx.$$

Ακολούθως, παραγωγίστε το αποτέλεσμα για να επαληθεύσετε ότι είναι σωστό. Δίνεται ότι $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

5η Ομάδα Ασκήσεων

38. **(Υπολογισμός τιμών της εφαπτόμενης)** Υπολογίστε προσεγγιστικά τις τιμές $\tan x$ για τις ακόλουθες τιμές του x:

$$\pi/4 - 0.1, \quad \pi/4 - 0.01, \quad \pi/4 - 0.001, \quad \pi/4, \quad \pi/4 + 0.001, \quad \pi/4 + 0.01, \quad \pi/4 + 0.1.$$

Χρησιμοποιήστε μόνο την τιμή της $\tan x$ και της παραγώγου της στη θέση $x_0 = \pi/4$. Συγκρίνετε, με χρήση ενός αναλυτικού πίνακα, τις τιμές που βρήκατε με τις ακριβείς.

39. **(Απροσδιοριστίες $0/0$)** Να δείξετε ότι τα ακόλουθα όρια εμφανίζουν και τα τρία απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^4}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2}.$$

Κατόπιν, να υπολογίσετε τα άνω όρια ή να δείξετε ότι δεν υπάρχουν.

40. **(Χρήση Κανόνα L'Hôpital)** Να υπολογίσετε το ακόλουθο όριο με χρήση του Κανόνα του L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x + \sin^2 x + \sin x}{x^3 + x^2 + x}.$$

41. **(Κυρτή σύνθεση)** Να δείξετε ότι αν η g είναι αύξουσα και κυρτή και η h είναι κυρτή, τότε η σύνθεση $g \circ h$ είναι κυρτή. Μην υποθέσετε παραγωγισιμότητα των g, h!

42. **(Υλοποίηση Μεθόδου Νεύτωνα)** Υλοποιήστε τη Μέθοδο του Νεύτωνα σε μια γλώσσα προγραμματισμού της προτίμησής σας. Η ρουτίνα που θα δημιουργήσετε πρέπει, κατ' ελάχιστον, να επιστρέφει αριθμητικά δεδομένα για κάθε επανάληψη της μεθόδου και την τελική εκτίμηση για τη ρίζα της δοσμένης συνάρτησης, δεν είναι όμως απαραίτητο να παράγει κάποιο σχήμα. Τα ορίσματα εισόδου πρέπει να περιλαμβάνουν τουλάχιστον το αρχικό σημείο όπου υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης και τη ζητούμενη ακρίβεια. Δεν χρειάζεται να δίνεται ως όρισμα η συνάρτηση της οποία ζητείται η ρίζα.

43. **(Αριθμητικό παράδειγμα)** Χρησιμοποιήστε την υλοποίηση της Άσκησης 42 για να εντοπίσετε μια ρίζα της συνάρτησης $f(x) = 2 - \sin x + x^5$ με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

44. **(Κανόνας L'Hôpital)**

    (α΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

(β΄) Έστω πως η συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο στο x. Να δείξετε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x).$$

6η Ομάδα Ασκήσεων

45. **(Μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in\mathbb{Q}\cap[-1,1],\\ -\frac{1}{2}, & x\in(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap[-1,1].\end{cases}$$

δεν είναι ολοκληρώσιμη. Υπολογίστε το κάτω και το άνω ολοκλήρωμά της.

46. **(Μετατόπιση συνάρτησης)** Έστω $a,b,c\in\mathbb{R}$ με $a<b$. Να δείξετε, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό του ολοκληρώματος, ότι αν είναι ολοκληρώσιμη η $f(x)$ στο διάστημα $[a,b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη και η $f(x-c)$ στο διάστημα $[a+c,b+c]$, με

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

47. **(Ολοκλήρωμα συνεχούς συνάρτησης)** Να δείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και επιπλέον $f\geq 0$ σε αυτό το διάστημα και $\int_a^b f=0$, τότε υποχρεωτικά $f=0$ παντού στο $[a,b]$.

48. **(Ολοκλήρωμα Γινόμενου)** Να αποδείξετε ότι ισχύει η ακόλουθη ισότητα, ή να βρείτε αντιπαράδειγμα:

$$\int_a^b fg=\left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right).$$

Θεωρήστε ότι όλα τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην παραπάνω ισότητα υπάρχουν.

49. **(Ανισότητα Cauchy-Schwarz)** Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες. Να δείξετε ότι ισχύει η ακόλουθη ανισότητα, γνωστή ως ανισότητα των Cauchy-Schwarz.

$$\left|\int_a^b fg\right|\leq\left[\int_a^b f^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_a^b g^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

(Υπόδειξη: εξετάστε το τριώνυμο $\int_a^b (f(x)+\theta g(x))\,dx$ του θ.)

50. **(Περίπου μηδενική συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν $\int_a^b g^2=0$, τότε για κάθε f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ θα έχουμε $\int_a^n fg=0$. Βεβαιωθείτε ότι αντιλαμβάνεστε την γεωμετρική ερμηνεία αυτής της ιδιότητας.

7η Ομάδα Ασκήσεων

51. **(Γενίκευση του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Λογισμού)** Έστω συνάρτηση $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Έστω παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f_1,f_2:[c,d]\to\mathbb{R}$ με $f_1([c,d]),f_2([c,d])\subseteq(a,b)$. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in(c,d)$ έχουμε

$$\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} G(t)\,dt\right)'=G(f_2(x))f_2'(x)-G(f_1(x))f_1'(x).$$

Επίσης, να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος, εξετάζοντας τι θα συμβεί αν το x μεταβληθεί κατά μια πολύ μικρή ποσότητα Δx.

52. **(Ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης)** Έστω ολοκληρώσιμη $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ περιττή. Να δείξετε ότι $\int_{-a}^{a} f = 0$.

53. **(Ολοκλήρωμα άρτιας συνάρτησης)** Έστω ολοκληρώσιμη $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ άρτια. Να δείξετε ότι $\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$.

54. **(Υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις)** Ορίζουμε τις υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις υπερβολικό ημίτονο $\sinh x$, υπερβολικό συνημίτονο $\cosh x$, υπερβολική εφαπτόμενη $\tanh x$, και υπερβολική συνεφαπτομένη $\coth x$, ως

$$\sinh x = \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}, \quad \cosh x = \frac{\exp x + \exp(-x)}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Οι άνω συναρτήσεις καλούνται τριγωνομετρικές λόγω της ομοιότητας που έχουν πολλές από τις ιδιότητές τους με αντίστοιχες ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Υπολογίστε τις παραγώγους των άνω συναρτήσεων, και εκφράστε τες χρησιμοποιώντας αποκλειστικά άλλες υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

55. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα της $x^n e^{-x}$)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

56. **(Ζεύγος αόριστων ολοκληρωμάτων)** Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int e^{-x} \sin x \, dx, \qquad \int e^{-x} \cos x \, dx.$$

57. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα της $\log x$)** Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα του λογαρίθμου, $\int_0^\infty \log x \, dx$.

8η Ομάδα Ασκήσεων

58. **(Λουλουδάκι)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου

$$R = \{(r, \theta) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le |\sin k\theta/3|\},$$

όπου $k \in \mathbb{N}^*$. Τι παρατηρείτε? Μπορείτε να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος?

59. **(Περιστροφή περί τον άξονα των x)** Να προσδιορίσετε τον όγκο που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = |\cos kx|$ μεταξύ των σημείων $x = 0$ και $x = 2\pi$ περί τον άξονα των x. Το $k \in \mathbb{N}^*$. Τι παρατηρείτε? Μπορείτε να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος?

60. **(Περιστροφή περί τον άξονα των y)** Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται αν περιστρέψουμε το χωρίο μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x^2$ μεταξύ του $x = 0$ και το $x = 1$ περί τον άξονα των y.

61. **(Μήκος έλλειψης)** Να δώσετε μια έκφραση για το μήκος της έλλειψης που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε σε κλειστή μορφή το ολοκλήρωμα που προκύπτει. (Αν το καταφέρετε, έχετε κάνει λάθος.)

62. **(Μήκος παραβολής)** Να υπολογίσετε το μήκος της παραβολής που περιγράφεται από την εξίσωση $y = ax^2$ μεταξύ των σημείων $(0, 0)$ και $(1, a)$. *(Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 59.)*

63. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα I)** Να υπολογίστε το ακόλουθο καταχρηστικό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$$

64. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα II)**

(α΄) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx.$$

Υπόδειξη: υπολογίστε τα $A, B \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$.

(β΄) Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx.$$

65. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα III)** Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx.$$

Παρατηρήστε πως το ολοκλήρωμα είναι καταχρηστικό και επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση τείνει στο ∞ στο αριστερό άκρο ολοκλήρωσης, αλλά και γιατί το άλλο άκρο ολοκλήρωσης είναι το ∞.

66. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα IV)**

(α΄) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx.$$

(Υπόδειξη: ποια είναι η παράγωγος της $\tan x$*;)*

(β΄) Να προσδιορίσετε της τιμή του καταχρηστικού ολοκληρώματος

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2 x}.$$