ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Σ. ΤΟΥΜΠΗΣ

ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2026-2027

Οδηγίες (Διαβάστε τες!)

1. Περίληψη:
   (α΄) Υπάρχει μια ομάδα ασκήσεων για κάθε ένα κεφάλαιο του βιβλίου, και η καταληκτική ημερομηνία παράδοσής της θα είναι περίπου 5-10 μέρες μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου.
   (β΄) Η καταληκτική ημέρα παράδοσης κάθε ομάδας ανακοινώνεται στο μάθημα και αναρτάται στην ατζέντα του eClass τουλάχιστον μια εβδομάδα νωρίτερα.
   (γ΄) Οι λύσεις μιας ομάδας ασκήσεων αναρτώνται στο eClass λίγες μέρες μετά την ημερομηνία παράδοσης της επόμενης ομάδας ασκήσεων.
   (δ΄) Οι βαθμολογίες αναρτώνται στο eClass, και αυξάνουν, υπό προϋποθέσεις, την τελική βαθμολογία.
   (ε΄) Αρκετές από τις ασκήσεις είναι αρκετά δύσκολες. Η τελική εξέταση θα είναι πιο βατή από αυτές.
   (ς΄) Διαβάζετε προσεκτικά τις λύσεις, όταν αυτές αναρτώνται.
2. Επίδραση στον τελικό βαθμό:
   (α΄) Οι ασκήσεις προσφέρουν bonus 2 (στις 10) μονάδων, **εφόσον ο βαθμός στην τελική εξέταση είναι προβιβάσιμος**, δηλαδή 5 και άνω.
   (β΄) Δεν χρειάζεται να παραδώσετε όλες τις ομάδες ασκήσεων για να πάρετε το bonus. Μπορείτε να παραδώσετε τις μισές για να πάρετε μια μονάδα (εφόσον βέβαια είναι σωστές), κ.ο.κ. Ομοίως, δεν απαιτείται να παραδώσετε όλες τις ασκήσεις μιας ομάδας.
   (γ΄) **Δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε, για να πάρετε το bonus, εργασίες παρελθόντων ετών.**
3. Παράδοση (γενικές οδηγίες):
   (α΄) Μπορείτε να παραδώσετε τις ομάδες σας μόνο ηλεκτρονικά, μέσω του εργαλείου των Εργασιών του eclass.
   (β΄) Μπορείτε να παραδώσετε τις ομάδες ακόμα και αν η εγγραφή σας στο ΟΠΑ δεν έχει γίνει ακόμα, στέλνοντάς τες με μήνυμα email στον διδάσκοντα (αφορά φοιτητές εκ μεταγραφής και συναφείς περιπτώσεις.)
   (γ΄) Απαγορεύεται η τμηματική παράδοση μιας ομάδας (για παράδειγμα, η μισή μια μέρα και η μισή κάποια άλλη μέρα).
   (δ΄) Πριν την παράδοση, γράψτε, ευανάγνωστα, οπωσδήποτε το όνομά σας, τον αριθμό της ομάδας ασκήσεων, και, αν έχετε, τον αριθμό μητρώου σας, πάνω δεξιά στην πρώτη σελίδα. (Οι φοιτητές των κατατακτηρίων και ορισμένοι προερχόμενοι από μεταγραφές δεν έχουν αριθμούς μητρώου. Για αυτούς αρκεί να υπάρχει το όνομά τους.)
   (ε΄) Μπορείτε να γράφετε με μολύβι ή/και με στυλό οποιουδήποτε χρώματος εκτός κόκκινου.
   (ς΄) Μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα σας οποτεδήποτε πριν την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης.
4. Ηλεκτρονική παράδοση:
   (α΄) Η ηλεκτρονική παράδοση γίνεται αποκλειστικά μέσω του ειδικού εργαλείου του eClass, και ΟΧΙ με αποστολή email στο διδάσκοντα, με εξαίρεση άτομα που δεν έχουν ολοκληρώσει την εγγραφή τους.
   (β΄) Δεκτά είναι μόνο σκαναρισμένα (έστω και με κινητό τηλέφωνο) ή δακτυλογραφημένα έγγραφα (με χρήση MS WORD κτλ.), και όχι, για παράδειγμα, φωτογραφίες κακής ποιότητας.
   (γ΄) Αποφύγετε πάντως την δακτυλογράφηση των εργασιών. Μπορείτε να αξιοποιήσετε τον πεπερασμένο χρόνο σας πολύ καλύτερα.
   (δ΄) Παραδίδετε για κάθε εργασία **ένα μόνο ασυμπίεστο αρχείο PDF ή doc μεγέθους το πολύ 3MB** με ονομασία τον αριθμό μητρώου σας και τίποτα άλλο (π.χ. 3030666.pdf). Ιδιαιτέρως, ΜΗΝ παραδίδετε αρχεία zip που περιέχουν πολλές φωτογραφίες.
   (ε΄) Μην αφήνετε σχόλια στο eClass μέσω του σχετικού εργαλείου, εκτός αν είναι απόλυτη ανάγκη.

(ς΄) Προσοχή: ενδέχεται η δυνατότητα ηλεκτρονικής υποβολής των ασκήσεων μέσω του αντίστοιχου εργαλείου του eClass να ενεργοποιηθεί λίγες μόνο μέρες πριν την καταληκτική προθεσμία παράδοσης, και αρκετά μετά την ανακοίνωση αυτής της προθεσμίας.

(ζ΄) Καταληκτική ώρα παράδοσης: **Παραδίδετε ηλεκτρονικά την ομάδα μέχρι τις 11:55μμ της ανακοινωμένης ημέρας παράδοσης.**

(η΄) **ΔΕΝ ΘΑ ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΘΟΥΝ ΕΡΓΑΣΙΕΣ ΠΟΥ ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΟΥΝ ΣΟΒΑΡΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΑΝΩ ΟΔΗΓΙΕΣ.**

5. Καθυστέρηση στην παράδοση:

(α΄) Μπορείτε να καθυστερήσετε την παράδοση των ομάδων ασκήσεων, χωρίς επίπτωση, βάσει του ακόλουθου κανόνα: Μπορείτε να καθυστερήσετε το πολύ ΤΡΕΙΣ ομάδες ασκήσεων, και να τις παραδώσετε όταν θα παραδίδατε και την επόμενη κάθε μιας από αυτές, αν οι ημερομηνίες παράδοσής τους διαφέρουν, ή την πρώτη που ακολουθεί με διαφορετική ημερομηνία παράδοσης, αν η ημερομηνία παράδοσής τους είναι κοινή. Επομένως, αν η ομάδα i έχει ημερομηνία παράδοσης την X_i και η ομάδα $i+1$ έχει ημερομηνία παράδοσης την X_{i+1}, τότε μπορείτε να παραδώσετε την ομάδα i στην ημερομηνία X_{i+1}, εφόσον $X_{i+1} > X_i$, αλλιώς στο πρώτο $X_k > X_i$. ΟΜΩΣ, δεν μπορείτε να παραδώσετε μια ομάδα σε κάποια ημερομηνία $X_l > X_k > X_i$.

(β΄) Μην ζητήσετε παράταση εκ των προτέρων: απλώς ο διορθωτής θα δει ότι παραδώσατε καθυστερημένα την ομάδα. Οι ομάδες ασκήσεων που παραδίδονται εκπρόθεσμα παραδίδονται όπως και οι άλλες.

6. Βαθμολόγηση:

(α΄) Η βαθμολόγηση θα είναι πρόχειρη, λόγω έλλειψης ανθρώπινων πόρων.

(β΄) Αν οι πράξεις που απαιτούνται για να προκύψει ένα αριθμητικό αποτέλεσμα είναι αρκετές, μπορείτε να δώσετε το εν λόγω αποτέλεσμα ως έκφραση που περιέχει παραγοντικά, συνδυασμούς, γινόμενα με πολλούς παράγοντες, αθροίσματα με πολλούς όρους, κτλ., χωρίς καμία βαθμολογική απώλεια.

7. Ανακοίνωση βαθμολογίας: Οι εργασίες θα διορθώνονται με καθυστέρηση τουλάχιστον ενός μήνα από την καταληκτική ημερομηνία παράδοσης. Η βαθμολογία θα αναρτάται περιοδικά στα έγγραφα του eClass. Αν έχετε ενστάσεις σχετικά με τη διόρθωση, στείλτε ένα αναλυτικό mail στον διδάσκοντα.

8. Συνεργασία:

(α΄) Μπορείτε να συνεργαστείτε όσο θέλετε, και να ανταλλάξετε προφορικά ιδέες, ακόμα και λύσεις. Αρκεί ο καθένας να γράψει μόνος του την λύση του, και να καταλαβαίνει τι γράφει.

(β΄) Απαγορεύεται να δείτε λύσεις ασκήσεων παλαιοτέρων ετών ή λύσεις των ίδιων ασκήσεων από το διαδίκτυο (και ιδιαιτέρως μεγάλα γλωσσικά μοντέλα όπως τα ChatGPT, Gemini, κοκ.) *πριν* παραδώσετε τις λύσεις σας.

(γ΄) **Εργασίες που παραβιάζουν τους προηγούμενους δύο κανόνες θα μηδενίζονται, και όλο το bonus του συγγραφέα τους θα τίθεται αμετάκλητα στο μηδέν.** Επομένως, άλλες εργασίες που έχει ήδη παραδώσει ή θα παραδώσει στο μέλλον δεν θα έχουν επίδραση στο τελικό του βαθμό.

9. Σημαντικά σχόλια:

(α΄) Προσπαθήστε να είστε κατά το δυνατόν σαφείς στις λύσεις σας. Δεν βοηθά μόνο τους διορθωτές, αλλά και εσάς να οργανώνετε τη σκέψη σας καλύτερα.

(β΄) Ενημερώστε άμεσα τον διδάσκοντα σε περίπτωση εύρεσης λάθους είτε στις εκφωνήσεις είτε στις λύσεις.

(γ΄) Ενημερώστε τον διδάσκοντα αν η παράδοση μιας ομάδας ασκήσεων συμπίπτει με την παράδοση ασκήσεων άλλων μαθημάτων του **ίδιου** εξαμήνου. (*Ενδεχομένως* να υπάρξει αλλαγή, αν η ύλη το επιτρέπει.)

(δ΄) Για την εύρυθμη λειτουργία του μαθήματος, προσπαθήστε να τηρήσετε κατά το δυνατόν όλες τις άνω οδηγίες.

(ε΄) **Βλέπετε το mail που σας έχει δώσει το ΟΠΑ (xx@aueb.gr).** Το έχετε για να επικοινωνούν μαζί σας οι διδάσκοντες, εκτός των άλλων και όταν υπάρχει πρόβλημα με την παράδοση κάποιας εργασίας.

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Επιμεριστική ιδιότητα)** Να αποδείξετε ότι η ένωση επιμερίζει την τομή και η τομή επιμερίζει την ένωση: για κάθε $A,\ B,\ C \subseteq \mathbb{R}$,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

   Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ότι δύο σύνολα A, B είναι ίσα αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

2. **(Άθροισμα Minkowski)** Εκτός από την ένωση και την τομή, μπορούμε να ορίσουμε και το *άθροισμα* δύο συνόλων. Συγκεκριμένα, ορίζουμε το άθροισμα Minkowski $A + B$ δύο συνόλων A, B, ως το νέο σύνολο που αποτελείται από όλους τους αριθμούς z που μπορούν να γραφούν ως το άθροισμα $a + b$ ενός αριθμού a που ανήκει στο A και ενός αριθμού b που ανήκει στο B. Πιο συνοπτικά:

$$A + B \triangleq \{z \in \mathbb{R} : z = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}.$$

   Με δεδομένο τον άνω ορισμό, προσδιορίστε τα ακόλουθα αθροίσματα Minkowski:

$$(0,1) + (0,1), \quad (0,1) + \mathbb{Z}, \quad \mathbb{N} + \mathbb{N}.$$

3. **(Ένα σύνολο που δεν είναι πεδίο)** Έστω το σύνολο των αριθμών $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τους οποίους ορίζουμε $\oplus$ την πρόσθεση modulo 6 και $\odot$ τον πολλαπλασιασμό modulo 6. Δηλαδή, για να υπολογίσουμε την πρόσθεση (πολλαπλασιασμό) modulo 6 δύο στοιχείων προσθέτουμε (πολλαπλασιάζουμε) τα στοιχεία μεταξύ τους και κατόπιν λαμβάνουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 6. Είναι αυτό το σύνολο, εφοδιασμένο με αυτές τις πράξεις, πεδίο; Γιατί;

4. **(Ιδιότητες μεγίστου και ελαχίστου)** Οι αριθμοί $\max\{a, b\}$, $\min\{a, b\}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, ορίζονται ως εξής:

$$\max\{a,b\} = \begin{cases} a, & a \geq b, \\ b, & a < b, \end{cases} \qquad \min\{a,b\} = \begin{cases} a, & a \leq b, \\ b, & a > b. \end{cases}$$

   Παρατηρήστε ότι $\max\{a, b\} \leq c$ ανν $a \leq c$ και $b \leq c$. Αντιστοίχως, $\min\{a, b\} \geq c$ ανν $a \geq c$ και $b \geq c$.

   Να δείξετε ότι ισχύουν οι παρακάτω δύο ιδιότητες, όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας όλες τις ιδιότητες των ανισοτήτων που σας είναι γνωστές, και λαμβάνοντας περιπτώσεις.

   (α΄) $\max\{a + b, c + d\} \leq \max\{a, c\} + \max\{b, d\}$,

   (β΄) $-\min\{a, b\} = \max\{-a, -b\}$.

5. **(Εύρεση supremum και infimum)** Προσδιορίστε τα supremum, infimum, maximum και minimum των ακόλουθων συνόλων:

$$[0,1), \qquad \mathbb{Q}, \qquad \left\{1 - \frac{1}{2},\ 1 - \frac{1}{3},\ 1 - \frac{1}{4}, \dots\right\}, \qquad A = \{x : (x - \sqrt{2})(x - 3) \leq 0\}, \qquad A \cap \mathbb{Q}.$$

6. **(Infimum υποσυνόλου)** Να αποδείξετε το δεύτερο σκέλος της Πρότασης 1.8.

7. **(Supremum αθροίσματος Minkowski)** Έστω δύο μη κενά και φραγμένα άνω σύνολα A και B με suprema $\sup A$ και $\sup B$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το άθροισμα Minkowski $A + B$ έχει επίσης supremum, τον αριθμό $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

2η Ομάδα Ασκήσεων

8. **(Άθροισμα άρτιας και περιττής)** Να δείξετε οτι οποιαδήποτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα μιας περιττής και μιας άρτιας συνάρτησης.

9. **(Γνησίως φθίνουσα συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $B \subseteq A$ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in B$, έχουμε

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

10. **(Υπερβολικές τριγωνικές συναρτήσεις – ορισμός και βασικές ιδιότητες)** Το υπερβολικό ημίτονο $\sinh x$, το υπερβολικό συνημίτονο $\cosh x$, η υπερβολική εφαπτομένη $\tanh x$ και η υπερβολική συνεφαπτομένη $\coth x$, όλα με $x \in \mathbb{R}$, ορίζονται, αντιστοίχως, ως

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

(α΄) Να αποδείξετε ότι οι $\sinh x,\ \tanh x,\ \coth x$ είναι περιττές συναρτήσεις, ενώ η $\cosh x$ είναι άρτια.

(β΄) Να αποδείξετε τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x, \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x,$$

$$\sinh 2x = \frac{2\tanh x}{1 - \tanh^2 x}, \quad \cosh 2x = \frac{1 + \tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x}, \quad \tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}.$$

Παρατηρήστε ότι όλες οι άνω ιδιότητες είναι ανάλογες αντίστοιχων ιδιοτήτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Αυτό δεν είναι τυχαίο, καθώς οι τριγωνομετρικές και οι υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνδέονται στενά, αλλά για να μελετήσουμε τη σχέση τους χρειαζόμαστε γνώσεις μιγαδικής ανάλυσης.

(Δεν έχουμε ακόμα ορίσει αυστηρά την εκθετική συνάρτηση e^x. Αυτό θα γίνει σε κατοπινό κεφάλαιο. Επειδή όμως η συνάρτηση αυτή, καθώς και η αντίστροφή της, $\log x$, του φυσικού λογαρίθμου, σας είναι γνωστές από το Λύκειο, θα τις δούμε πριν τον αυστηρό ορισμό τους σε αυτήν και σε ορισμένες ακόμα ασκήσεις. Θα συμβολίζουμε, επίσης, την εκθετική συνάρτηση και ως $\exp x$.)

11. **(Εξίσωση κύκλου)** Να δείξετε ότι το σύνολο των σημείων

$$\left\{ [r, \theta] :\ r = 2\cos\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta < \frac{\pi}{2} \right\}, \tag{1}$$

δηλαδή όλα τα σημεία του επιπέδου για τα οποία $-\frac{\pi}{2} \le \theta < \frac{\pi}{2}$ και επιπλέον, με δοσμένο το θ, έχουμε $r = 2\cos\theta$, είναι ένας κύκλος με ακτίνα 1 και κέντρο το σημείο $(1, 0)$.

3η Ομάδα Ασκήσεων

12. **(Όριο $\Rightarrow$ φράγμα)** Έστω $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ανοικτή γειτονιά (a, b) περί το x_0, δηλαδή $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < x_0 < b$, και *θετικός* $P \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοια ώστε

$$x \in (a, b) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > P,$$

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι πιο ισχυρό από το

$$x \in (a, b) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > 0,$$

διότι στην πρώτη περίπτωση οι τιμές του x δεν μπορούν να πλησιάσουν αυθαίρετα κοντά στο 0. Διαισθητικά, η ιδιότητα μας λέει ότι αν σε κάποιο x_0 το όριο είναι θετικό, τότε υπάρχει μια γειτονιά γύρω από το x_0 στην οποία οι τιμές της συνάρτησης κρατιούνται μακρυά από το 0.

13. **(Όριο γινομένου)** Δείξτε ότι αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και η $g(x_0)$ είναι φραγμένη σε μια ανοιχτή γειτονιά του x_0, τότε θα έχουμε και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

14. **(Όριο ενός supremum)** Να υπολογίσετε το ακόλουθο όριο:

$$\lim_{h \to 0^+} \sup_{\{0 < x < h\}} \sin\frac{1}{x}.$$

Παρατηρήστε οτι η συνάρτηση $g(h) = \sup_{\{0<x<h\}} \sin\frac{1}{x}$ της οποίας το όριο θέλουμε να υπολογίσουμε λαμβάνει, στη θέση h, το supremum όλων των τιμών που λαμβάνει η συνάρτηση $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ στο διάστημα $(0, h)$.

15. **(Όριο ενός λόγου)** Να υπολογίσετε το ακόλουθο όριο:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}.$$

16. **(Όριο ρητής συνάρτησης)** Να δείξετε, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό του ορίου, ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{10x}{x+5} = 10.$$

17. **(Περιοδική συνάρτηση)** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $T > 0$. Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου στο άπειρο, ότι η f δεν μπορεί να έχει όριο το ∞ καθώς $x \to \infty$.

18. **(Όριο)** Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+7} - ax\right),$$

όπου το $a \in \mathbb{R}$ είναι άγνωστη παράμετρος. Το όριο εξαρτάται από την τιμή του a, επομένως πρέπει να εξετάσετε διαφορετικές περιπτώσεις για την τιμή του a.

19. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια, αν υπάρχουν:

(α΄) $\lim_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$,

(β΄) $\lim_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$,

(γ΄) $\lim_{x\to 0} x^4 e^{\frac{1}{x^2}}$.

20. **(Μικρό όμικρον)** Στην Πληροφορική συχνά χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο συμβολισμό: αν $f(n)$ και $g(n)$ είναι δύο θετικές ακολουθίες, τότε γράφουμε $f(n) = o(g(n))$ αν ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, δηλαδή αν για μεγάλες τιμές του n, η ακολουθία $f(n)$ είναι πολύ μικρότερη της ακολουθίας $g(n)$. Παρατηρήστε ότι το $o(\cdot)$ ΔΕΝ εκφράζει κάποια άγνωστη συνάρτηση, αλλά είναι ένας απλός συμβολισμός, με τον οποίο μπορούμε να γράψουμε συνοπτικά μια σχέση μεταξύ δύο ακολουθιών.

Για κάθε μια από τις ακόλουθες προτάσεις, είτε αποδείξτε ότι είναι σωστή, είτε δώστε ένα αντιπαράδειγμα που να δείχνει ότι είναι λάθος:

(α΄) Αν $f(n)$ είναι ένα πολυώνυμο του n και $g(n) = e^n$, τότε $f(n) = o(g(n))$.

(β΄) Αν $f_1(n) = o(g(n))$ και $f_2(n) = o(g(n))$, τότε και $f_1(n)f_2(n) = o(g(n))$.

(γ΄) Αν $f(n) = o(g(n))$ και $g(n) = o(h(n))$, τότε και $f(n) = o(h(n))$.

(δ΄) Αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, τότε $a_n = o(1)$.

4η Ομάδα Ασκήσεων

21. **(Η $|x|$ είναι παντού συνεχής)** Χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό της συνέχειας της Πρότασης 4.1, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παντού συνεχής.

22. **(Συνεχής συνάρτηση με πεπερασμένο όριο στο άπειρο)** Να δείξετε ότι αν μια συνεχής συνάρτηση $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ έχει το πεπερασμένο όριο $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$, τότε είναι φραγμένη άνω και κάτω. Πριν προχωρήσετε στη λύση, βεβαιωθείτε ότι έχετε κατανοήσει την γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

23. **(Συνεχής ρητή συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα I και λαμβάνει μόνο ρητές τιμές στο I, τότε είναι σταθερή στο I. Πριν προχωρήσετε στη λύση, βεβαιωθείτε ότι έχετε κατανοήσει την γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

24. **(Αντίστροφη υπερβολικού ημίτονου)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του υπερβολικού ημίτονου

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$ και έχει πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Επίσης, να δείξετε ότι η αντίστροφή της είναι η

$$\operatorname{arcsinh} y = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right), \qquad y \in \mathbb{R},$$

όπου $\log x$ είναι ο φυσικός λογάριθμος του x. Κατόπιν, σχεδιάστε και τις δύο συναρτήσεις.

25. **(Συνέχεια Lipschitz ρίζας)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ είναι Lipschitz συνεχής σε όλα τα διαστήματα της μορφής $[a, b]$ όπου $a, b > 0$ ή $a, b < 0$, αλλά όχι Lipschitz συνεχής σε διαστήματα της μορφής $[a, b]$ όπου $a < 0, b > 0$. Μπορείτε να βγάλετε ένα γενικό κανόνα για όλες τις δυνατές περιπτώσεις διαστημάτων που υπάρχουν; (Δεν χρειάζεται να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.)

26. **(Υλοποίηση Μεθόδου Διχοτόμησης)** Να υλοποιήσετε τη Μέθοδο της Διχοτόμησης σε μια γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας. Το πρόγραμμα που θα υλοποιήσετε θα πρέπει να δέχεται ως εισόδους:

    (α΄) Ένα αρχικό διάστημα στο οποίο είναι γνωστό ότι υπάρχει μια ρίζα.

    (β΄) Το μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα στη θέση της ρίζας.

    (γ΄) Την μέγιστη επιτρεπτή απόλυτη τιμή της συνάρτησης στο σημείο που επιστρέφεται ως εκτίμηση της ρίζας.

    Η συνάρτηση $f(x)$ της οποίας αναζητείται η ρίζα μπορεί να δίνεται είτε σαν όρισμα (προτιμότερο), είτε να υλοποιείται εντός του προγράμματος (αν δεν ξέρετε πως να την περάσετε στην συνάρτηση ως όρισμα).

    Το πρόγραμμα πρέπει να παρέχει ως έξοδο την εκτίμηση για τη ρίζα, καθώς και να εκτυπώνει ενδιάμεσα αποτελέσματα, σε επτά στήλες, με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών στοιχείων, όπως και στο Παράδειγμα 4.9, ως εξής:

    (α΄) Η πρώτη στήλη να δείχνει την επανάληψη n.

    (β΄) Η δεύτερη στήλη να δείχνει το αριστερό άκρο a του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης.

    (γ΄) Η τρίτη στήλη να δείχνει το δεξί άκρο b του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης.

    (δ΄) Η τέταρτη στήλη να δείχνει το μέσο m του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης.

    (ε΄) Η πέμπτη στήλη να δείχνει την τιμή $f(a)$.

    (ς΄) Η έκτη στήλη να δείχνει την τιμή $f(b)$.

    (ζ΄) Η έβδομη στήλη να δείχνει την τιμή $f(m)$.

27. **(Αριθμητικός υπολογισμός ρίζας της συνάρτησης $f(x) = 2\cos x - x$)** Χρησιμοποιήστε το πρόγραμμα που αναπτύξατε στην προηγούμενη άσκηση, με τέτοιες παραμέτρους εισόδου ώστε να εκτελούνται τουλάχιστον 10 επαναλήψεις και με αρχικό διάστημα το $[1, 3]$, προκειμένου να προσδιορίσετε την θετική ρίζα της εξίσωσης $2\cos x = x$. (Πόσες ρίζες έχει η συνάρτηση;)

5η Ομάδα Ασκήσεων

28. **(Εφαπτόμενη και συνεφαπτόμενη)** Να δείξετε ότι

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

    με χρήση του ορισμού της παραγώγου και γνωστών τριγωνομετρικών ορίων.

29. **(Παράγωγος της $\operatorname{arccot}(y)$)** Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης της αντίστροφης συνεφαπτομένης είναι η

$$(\operatorname{arccot} y)' = -\frac{1}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

30. **(Χρήση κριτηρίου για συνάρτηση Lipschitz)** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

    (α΄) Να υπολογίστε την παράγωγο της f παντού στο $\mathbb{R}$ και να δείξετε ότι η παράγωγος είναι συνεχής παντού στο $\mathbb{R}$.

    (β΄) Είναι η f Lipschitz συνεχής σε όλα τα φραγμένα διαστήματα της μορφής $[-M, M]$, όπου $M > 0$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

31. **(Υπολογισμοί αόριστων ολοκληρωμάτων)** Υπολογίστε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα. Σε όλες τις περιπτώσεις, επιβεβαιώστε ότι βρήκατε το σωστό αποτέλεσμα, παραγωγίζοντάς το.

    (α΄) $\displaystyle\int x^2 \sin x \, dx.$

(β΄) $\int \arcsin x \, dx$.

(γ΄) $\int \sin^2 x \, dx$.

(δ΄) $\int \tan^2 x \, dx$.

(ε΄) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}} \, dx$.

6η Ομάδα Ασκήσεων

32. **(Προσεγγιστικοί υπολογισμοί)** Υπολογίστε τις ακόλουθες ποσότητες προσεγγιστικά εκτελώντας μόνο τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις και υπολογίζοντας, όπου χρειάζεται, ρίζες που είναι ακέραιοι, και κατόπιν εκτιμήστε το αριθμητικό σφάλμα $E(x)$, χρησιμοποιώντας υπολογιστή:

$$\sqrt[4]{17}, \;\; \tan(-0.02), \;\; \cos(0.03).$$

33. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x - e^{-x})}{\log(\cos x)}, \quad \lim_{x\to\infty} \arctan\left(\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}\right).$$

34. **(Ιδιότητα κυρτών συναρτήσεων)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα I, τότε είναι αδύνατο να βρεθούν τρία σημεία $x_0 < x_1 < x_2$ εντός του I τέτοια ώστε $f(x_1) > f(x_0)$ και $f(x_1) > f(x_2)$.

35. **(Ιδιότητα κυρτών συναρτήσεων)** Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της κυρτότητας συνάρτησης, ότι αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή, τότε είναι κυρτή και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(ax + b)$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Μην υποθέσετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

36. **(Κυρτή σύνθεση)** Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις. Δείξτε ότι αν η g είναι αύξουσα, τότε και η σύνθεση $g \circ f$ είναι κυρτή.

37. **(Υλοποίηση Μεθόδου Νεύτωνα)** Υλοποιήστε τη Μέθοδο του Νεύτωνα σε μια γλώσσα προγραμματισμού της προτίμησής σας, χρησιμοποιώντας, ως βάση, τον ψευδοκώδικα αυτής της παραγράφου. Τα ορίσματα εισόδου του προγράμματος που θα δημιουργήσετε πρέπει να περιλαμβάνουν τουλάχιστον το αρχικό σημείο όπου υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης και της παραγώγου της, το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων, και την ανοχή E_f στην τιμή της συνάρτησης. (Επομένως, το πρόγραμμα θα διακόπτεται είτε όταν βρεθεί x_n με $|f(x_n)| \leq E_f$, είτε όταν ολοκληρωθεί το μέγιστο πλήθος επαναλήψεων.) Είναι επιθυμητό, αλλά όχι απαραίτητο, να δίνονται ως ορίσματα και η συνάρτηση της οποία ζητείται η ρίζα καθώς και η παράγωγός της. Επομένως, αν δεν γνωρίζετε πώς να δίνετε συναρτήσεις ως ορίσματα, μπορείτε για κάθε συνάρτηση της οποίας τη ρίζα θέλετε να υπολογίσετε να τροποποιείτε ανάλογα τον κώδικά σας. Το πρόγραμμα θα πρέπει να επιστρέφει ένα πίνακα όπως αυτούς των παραδειγμάτων αυτής της παραγράφου, με ακρίβεια τουλάχιστον 8 δεκαδικών ψηφίων για κάθε επανάληψη της μεθόδου, δεν είναι όμως απαραίτητο να παράγει κάποιο σχήμα.

38. **(Τέσσερις ρίζες)** Χρησιμοποιήστε την υλοποίηση της προηγούμενης άσκησης για να βρείτε και τις τέσσερις ρίζες του ακόλουθου πολυωνύμου:

$$f(x) = x^4 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Πρέπει να εντοπίσετε 4 αρχικά σημεία x_0 τα οποία οδηγούν σε κάθε μία από τις ρίζες, εκτελώντας δοκιμαστικές εκτελέσεις του προγράμματος για διάφορα αρχικά σημεία. Σε κάθε περίπτωση, εκτελέστε 9 επαναλήψεις θέτοντας $E_f = 0$, και σχολιάστε την ταχύτητα σύγκλισης.

7η Ομάδα Ασκήσεων

39. **(Τριγωνομετρικό όριο)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3}$.

40. **(Παγίδα)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

41. **(Εμβαδόν τριγώνου)** Να επαναλάβετε τη μεθοδολογία του Παραδείγματος 7.4 προκειμένου να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, a]$ με ολοκλήρωμα $a^2/2$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 1.11.

42. **(Ανισότητα Cauchy-Schwarz)** Να δείξετε ότι η ανισότητα Cauchy-Schwarz (Παράδειγμα 7.7) ισχύει με ισότητα αν για τις δύο συναρτήσεις f, g έχουμε ότι η μια είναι πολλαπλάσιο της άλλης στο διάστημα $[a, b]$. Είναι αναγκαία αυτή η συνθήκη ώστε να ισχύει η ισότητα;

43. **(Περίπου μηδενική συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν $\int_a^b g^2 = 0$, τότε για κάθε f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ θα έχουμε $\int_a^b fg = 0$. Βεβαιωθείτε ότι αντιλαμβάνεστε την φυσική ερμηνεία αυτής της ιδιότητας.

8η Ομάδα Ασκήσεων

44. **(Περιοδικές Συναρτήσεις)** Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο T.

    (α΄) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου

    $$g(x) = \int_x^{x+T} f(t)\, dt$$

    είναι σταθερή. Κάντε ένα απλό σχήμα που να εξηγεί το αποτέλεσμα.

    (β΄) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

    $$h(x) = \int_0^x f(t)\, dt - x\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt\right)$$

    είναι επίσης περιοδική.

45. **(Trolling)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

    $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(a \sin x)\, dx.$$

46. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

    (α΄) $\int x^n (\log x)^2\ dx$, όπου το n είναι ακέραιος.

    (β΄) $\int \sin(a \log bx)\ dx$, όπου $a, b \neq 0$.

    (γ΄) $\int \cos(a \log bx)\ dx$, όπου $a, b \neq 0$.

    (δ΄) $\int \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$.

47. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

    (α΄) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{10 + 5e^{\frac{1}{x^3}}}$.

    (β΄) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

    (γ΄) $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

48. **(Όρια)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

    (α΄) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^n$.

    (β΄) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\sin x}$.

    (γ΄) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)}}$.

49. **(Ορισμένα Ολοκληρώματα)** Υπολογίστε τα ακόλουθα ορισμένα ολοκληρώματα:

(α΄) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx.$

(β΄) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2} \, dx.$ Μπορείτε να βρείτε το αποτέλεσμα χωρίς να κάνετε την ολοκλήρωση;

50. **(Ορισμένο Ολοκλήρωμα)**

(α΄) Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = xe^x$ και έστω $f^{-1}(y)$ η αντίστροφή της. Να υπολογίσετε το ακόλουθο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση με αντικατάσταση ή/και παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int_0^e f^{-1}(y) \, dy.$$

ΜΗΝ επιχειρήσετε να βρείτε τύπο για την αντίστροφη συνάρτηση.

(β΄) Μπορείτε να εξηγήσετε γραφικά το αποτέλεσμα του προηγούμενου σκέλους;

51. **(Ολοκλήρωμα)** Κάντε δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες προκειμένου να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x) e^x \, dx.$$

52. **(Αόριστα Ολοκληρώματα)** Να υπολογίσετε τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \, dx, \quad \int x^2 (\log x)^2 \, dx.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα, μπορείτε να δοκιμάσετε την αντικατάσταση $x = \cos\theta$ και για το δεύτερο ολοκλήρωμα μπορείτε να δοκιμάσετε διπλή παραγοντική ολοκλήρωση.

9η Ομάδα Ασκήσεων

53. **(Καταχρηστικό Ολοκλήρωμα)**

(α΄) Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx.$$

(β΄) Να υπολογίσετε το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx.$$

54. **(Καταχρηστικά Ολοκληρώματα)** Να προσδιορίσετε αν τα ακόλουθα καταχρηστικά ολοκλήρωματα απειρίζονται ή όχι, χωρίς κατ' ανάγκη να υπολογίσετε τις ακριβείς τιμές τους.

(α΄) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, dx,$

(β΄) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \, dx \,,$

(γ΄) $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x^2} \, dx,$

(δ΄) $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} \, dx.$

55. **(Καταχρηστικό ολοκλήρωμα)**

(α΄) Να προσδιορίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \log|x-1| \, dx.$$

(β΄) Να υπολογίσετε την τιμή του καταχρηστικού ολοκληρώματος

$$\int_0^1 \log|x-1|\,dx.$$

56. **(Λουλουδάκι μείον λουλουδάκι)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου

$$R = \left\{[r,\theta] : a \le \theta \le b,\ \cos^2 2\theta \le r \le 2\cos^2 2\theta\right\}.$$

57. **(Ποτήρι)** Έστω ο κλάδος της υπερβολής

$$\frac{y^2}{a} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

για τον οποίο $y > 0$. Αν περιστρέψουμε τον κλάδο περί τον άξονα των y δημιουργούμε ένα κέλυφος που μοιάζει με ποτήρι. Πόσος όγκος νερού χρειάζεται για να γεμίσουμε το ποτήρι μέχρι το ύψος $y = A$; Εννοείται πως $A > a$.

58. **(Ίσοι όγκοι!)** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

(α΄) Έστω R_1 το χωρίο που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των x και του γραφήματος της f στο διάστημα $[-1,1]$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής που σχηματίζεται αν περιστρέψουμε το R_1 περί τον άξονα των x.

(β΄) Έστω R_2 το χωρίο που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των x και του γραφήματος της f στο διάστημα $[0,1]$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού εκ περιστροφής που σχηματίζεται αν περιστρέψουμε το R_2 περί τον άξονα των y.

(γ΄) Τι παρατηρείτε συγκρίνοντας τα αποτελέσματα; Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία.

59. **(Αστεράκι)** Να υπολογίσετε το μήκος της καμπύλης με παραμετρική μορφή

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \sin^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

10η Ομάδα Ασκήσεων

60. **(Επίλυση διαφορικών εξισώσεων)** Να υπολογίσετε τις γενικές λύσεις των ακόλουθων ΔΕ και τις ειδικές λύσεις που ικανοποιούν την επιπλέον συνθήκη που δίνεται. Ακολούθως, να επαληθεύσετε ότι οι γενικές λύσεις που βρήκατε πράγματι ικανοποιούν τη δοσμένη ΔΕ, αντικαθιστώντας τες σε αυτήν.

(α΄) $y'(x) + (\log x)y(x) = e^{-x\log x}$, όπου $x \in (0,\infty)$. Επίσης, να προσδιορίσετε το όριο των λύσεών της καθώς $x \to \infty$ και το όριο των λύσεών της καθώς $x \to 0^+$.

(β΄) $xy'(x) + (\log x)y(x) = \log x$, όπου $x > 0$. Επίσης, να προσδιορίσετε την ειδική λύση που διέρχεται από το σημείο $(1,2)$. Ποιο είναι το σύνολο των τιμών που λαμβάνει αυτή η λύση;

(γ΄) $y'(x) + \frac{1}{\cos^2 x}y(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ όπου $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Επίσης, να υπολογίσετε το όριο των λύσεών της καθώς $x \to \pi/2$ και καθώς $x \to -\pi/2$.

(δ΄) $y'(x) + \frac{2x}{\cos^2 x^2}y(x) = \frac{2x}{\cos^2 x^2}$, όπου $x \in \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$. Επίσης, να προσδιορίστε το όριο κάθε λύσης καθώς $x \to \pm\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

61. **(Επίλυση διαφορικών εξισώσεων)** Να υπολογίσετε τις γενικές λύσεις των ακόλουθων ΔΕ και τις ειδικές λύσεις που ικανοποιούν την επιπλέον συνθήκη που δίνεται. Ακολούθως, να επαληθεύσετε ότι οι γενικές λύσεις που βρήκατε πράγματι ικανοποιούν τη δοσμένη ΔΕ, αντικαθιστώντας τες σε αυτήν.

(α΄) $y\sqrt{y^2+2}y' = e^x$. Ακολούθως, να προσδιορίσετε την ειδική λύση που διέρχεται από το σημείο $(x_0, y_0) = (0,1)$.

(β΄) $\frac{dy}{dx} = (\cos^2 y)(1+x^3)$, όπου $x \in \mathbb{R}$, $y(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Ακολούθως, βρείτε τη μερική λύση που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(γ΄) $y'(x)\sin y(x) = e^x$. Ακολούθως, να προσδιορίσετε την ειδική της λύση που διέρχεται από το σημείο $(0,\pi)$. Ποιο είναι το όριο της άνω ειδικής λύσης καθώς $x \to -\infty$;

(δ΄) $(\tan y(x))y'(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

(ε΄) Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y'(x) + (\cos x)y(x) = e^{-\sin x} \log x,$$

στο διάστημα $x > 0$. Ποιο είναι το όριο των ειδικών λύσεων της άνω ΔΕ καθώς $x \to \infty$;

62. **(Διαφορικές Εξισώσεις)** Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y'(x) + y(x) = \cos(e^x).$$

(α΄) Να προσδιορίσετε τη γενική της λύση.

(β΄) Να βρείτε ποιες είναι οι δυνατές τιμές για το όριο των ειδικών λύσεων όταν $x \to \infty$.

(γ΄) Να βρείτε ποιες είναι οι δυνατές τιμές για το όριο των ειδικών λύσεων όταν $x \to -\infty$.

63. **(Διαφορικές εξισώσεις)**

(α΄) Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y'(x) + (1 + \tan x)y(x) = 10 \cos x$$

στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Να βρείτε τη γενική της λύση.

(β΄) Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$y'(x) = e^{y(x)}.$$

Να βρείτε τη γενική της λύση, και να δείξετε ότι όλες οι ειδικές λύσεις τείνουν στο ∞ όταν το x τείνει πλευρικά σε κάποια πεπερασμένη τιμή.

64. **(Διαφορικές Εξισώσεις)**

(α΄) Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση

$$f'(x) + (\log x)f(x) = e^{-x \log x}.$$

(β΄) Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση

$$f''(x) = \sin x + 2x.$$

65. **(Μέθοδος Euler)** Υλοποιήστε τη Μέθοδο του Euler σε γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας. Η ρουτίνα που θα δημιουργήσετε θα λύνει αριθμητικά διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

υλοποιώντας τον ψευδοκώδικα της Παραγράφου 10.5 ή ισοδύναμο, πάντως με τα ίδια ορίσματα εισόδου. Κατ' εξαίρεση η συνάρτηση f μπορεί να δίνεται είτε ως όρισμα στη ρουτίνα (προτιμότερο), είτε να υλοποιείται εντός της ρουτίνας (αν δεν ξέρετε πως να περνάτε συναρτήσεις ως ορίσματα άλλων συναρτήσεων). Η έξοδος πρέπει να δίνεται με ακρίβεια τουλάχιστον 4 δεκαδικών ψηφίων, και πρέπει να περιλαμβάνει ένα πίνακα με τρεις στήλες, μια στήλη για την επανάληψη i, μια στήλη για την τιμή του $x(i)$ στο οποίο υπολόγισε η ρουτίνα προσεγγιστικά την τιμή της συνάρτησης για εκείνη την επανάληψη, και τέλος μια στήλη για την προσεγγιστική τιμή $y(i)$.

66. **(Μέθοδος Euler)** Χρησιμοποιήστε την ρουτίνα της Άσκησης 65 για να υπολογίσετε αριθμητικά τη λύση της ΔΕ

$$y' = y(1 - y),$$

με αρχικές συνθήκες $x_0 = 0$, $y_0 = 0.5$. Εκτελέστε 10 επαναλήψεις με βήμα $\Delta x = 0.5$, και άλλες 10 επαναλήψεις με βήμα $\Delta x = -0.5$.

11η Ομάδα Ασκήσεων

67. **(Ίσες παράγωγοι)** Να δείξετε ότι αν δύο πολυώνυμα βαθμού μέχρι n έχουν ίσες όλες τις παραγώγους τους από μηδενικής μέχρι n τάξης σε ένα δοσμένο σημείο x_0, τότε είναι ίσα. Θεωρήστε $n \in \mathbb{N}$, με την παράγωγο μηδενικής τάξης μιας συνάρτησης να είναι η ίδια η συνάρτηση.

68. **(Υπολογισμός πολυωνύμων Taylor)** Να προσδιορίσετε τα ακόλουθα πολυώνυμα Taylor:

(α΄) Το πολυώνυμο Taylor δευτέρου βαθμού της συνάρτησης $f_1(x) = x^3 + x^2 + 4x + 6$ στο $x_1 = 2$.

(β΄) Το πολυώνυμο Taylor τρίτου βαθμού της συνάρτησης $f_2(x) = \arctan x$ στο $x_2 = 2$.

Σε κάθε περίπτωση, σχεδιάστε τόσο τη συνάρτηση όσο και το πολυώνυμο Taylor, αν προτιμάτε με χρήση υπολογιστή.

69. **(Προσδιορισμός του e)** Να αποδείξετε ότι η σταθερά e μπορεί να προσεγγιστεί από το κλάσμα $\frac{685}{252}$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-4} χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο Taylor της Δίνεται ότι $e \leq 4$, και καμία άλλη πληροφορία για την τιμή του e. Στην επίλυση αυτής της άσκησης επιτρέπονται μόνο προσθέσεις, πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις, εφόσον το αποτέλεσμα της διαίρεσης είναι ακέραιος αριθμός. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Taylor και το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης στο σημείο $x_0 = 0$.

12η Ομάδα Ασκήσεων

70. **(Σειρές)** Να προσδιορίσετε αν οι ακόλουθες σειρές συγκλίνουν ή όχι:

$$\sum \frac{n^4 + e^n}{(2n)!}, \quad \sum \frac{\sqrt{n+10} - \sqrt{n}}{n^2 + \log n}.$$

71. **(Σειρές)** Δίνεται η σειρά

$$\sum \left(\frac{\lambda}{10}\right)^n \frac{1}{n^2},$$

όπου η παράμετρος $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Για ποιες τιμές της παραμέτρου λ συγκλίνει η σειρά;

72. **(Σύγκλιση σειρών)** Να προσδιορίσετε αν αποκλίνουν ή συγκλίνουν οι ακόλουθες σειρές:

(α΄) $\sum \dfrac{\cos(1/n)}{\cos(1/n) + 1}$.

(β΄) $\sum \dfrac{n^2 \log n + n \cos n}{n^{4-1/n}}$.

(γ΄) $\sum \dfrac{1}{n^5 - n^3 + 2}$.

(δ΄) $\sum \exp\left(-\dfrac{1 + n^2 \log n}{n}\right)$.

(ε΄) $\sum \sin(e^{-n})$.

(ς΄) $\sum \dfrac{(n+1)e^{5n+1}}{n!}$.

(ζ΄) $\sum \dfrac{e^n + \log n}{(n^2+2)e^n + 10}$.

73. **(Ιδιότητες σειρών)**

(α΄) Να δείξετε ότι αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, τότε δεν μπορεί να συγκλίνει και η σειρά $\sum e^{-a_n}$.

(β΄) Να δείξετε ότι αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, και $a_n > 0$, τότε θα συγκλίνει και η σειρά $\sum (a_n)^2$.