ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, 2024-2025
Σ. ΤΟΥΜΠΗΣ

1η Ομάδα Ασκήσεων

1. **(Ένα σύνολο που δεν είναι πεδίο)** Έστω το σύνολο των αριθμών $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τους οποίους ορίζουμε $\oplus$ την πρόσθεση modulo 6 και $\odot$ τον πολλαπλασιασμό modulo 6. Δηλαδή, για να υπολογίσουμε την πρόσθεση (πολλαπλασιασμό) modulo 6 δύο στοιχείων προσθέτουμε (πολλαπλασιάζουμε) τα στοιχεία μεταξύ τους και κατόπιν λαμβάνουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 6. Είναι αυτό το σύνολο, εφοδιασμένο με αυτές τις πράξεις, πεδίο; Γιατί;

   Λύση: Το σύνολο δεν είναι πεδίο, διότι το 4 (που προφανώς δεν είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης) δεν έχει αντίστροφο. Πράγματι, παρατηρήστε πως

   $$4 \odot 0 = 0, \quad 4 \odot 1 = 4, \quad 4 \odot 2 = 2, \quad 4 \odot 3 = 0, \quad 4 \odot 4 = 4, \quad 4 \odot 5 = 2,$$

   επομένως δεν υπάρχει αριθμός που αν πολλαπλασιαστεί, modulo 6, με το 4 να δίνει μονάδα. Μπορείτε να βρείτε άλλους αριθμούς σε αυτό το σύνολο που δεν έχουν αντίστροφο;

2. **(Πρόσθεση αρχείων)** Δίνονται δύο σκληροί δίσκοι, έστω A και B, με χωρητικότητα 1 TB ο καθένας, εντελώς γεμάτοι με δεδομένα που δεν μπορούν να συμπιεστούν. Σας δίνεται και ένας τρίτος δίσκος, έστω C, κενός, της ίδιας χωρητικότητας. Πως μπορείτε να τον χρησιμοποιήσετε ώστε να μην χάσετε καθόλου δεδομένα των A, B, σε περίπτωση που χαθεί ένας (οποιοσδήποτε) από τους τρεις; Χρησιμοποιήστε πρόσθεση modulo 2 μεταξύ αντίστοιχων bits των δίσκων A και B.

   Λύση: Πρέπει να θέσουμε το n-οστό bit του δίσκου C ίσο με το άθροισμα modulo 2 των n-οστών bits των δίσκων A και B. Παρατηρήστε πως ισχύει το εξής:

A	B	$C = A \oplus B$	$A \oplus C$	$B \oplus C$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

   Επομένως:

   (α΄) Αν χαθούν τα περιεχόμενα του δίσκου A, τα ανακτούμε προσθέτοντας τα αντίστοιχα bits των δίσκων B, C (δείτε την πέμπτη στήλη του άνω πίνακα, και παρατηρήστε ότι είναι ίδια με την πρώτη).

   (β΄) Αν χαθούν τα περιεχόμενα του δίσκου B, τα ανακτούμε προσθέτοντας τα αντίστοιχα bits των δίσκων B, C (δείτε την τέταρτη στήλη του άνω πίνακα και παρατηρήστε ότι είναι ίδια με τη δεύτερη).

   (γ΄) Αν χαθούν τα περιεχόμενα του δίσκου C, τότε συνεχίζουμε να διαθέτουμε τα πλήρη δεδομένα των δίσκων A, B.

3. **(Εύρεση supremum και infimum)** Προσδιορίστε τα supremum, infimum, maximum και minimum των ακόλουθων συνόλων:

   $$[0, 1), \quad (0, 1], \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \dots\right\}, \quad A = \{x : (x - \sqrt{2})(x - 3) \leq 0\}, \quad A \cap \mathbb{Q}.$$

   Λύση:

   (α΄) Προφανώς $\inf[0, 1) = \min[0, 1) = 0$ και $\sup[0, 1) = 1$. Όμως, δεν υπάρχει το $\max[0, 1)$ διότι το 1 δεν ανήκει στο $[0, 1)$.

(β´) Ανάλογα, $\sup(0,1] = \max(0,1] = 1$ και $\inf(0,1] = 0$. όμως δεν υπάρχει το $\min(0,1]$ διότι το 0 δεν ανήκει στο σύνολο.

(γ´) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ούτε άνω, ούτε κάτω φραγμένο, άρα δεν έχει supremum, infimum, maximum ή minimum.

(δ´) Παρατηρήστε ότι το ελάχιστο στοιχείο αυτού του συνόλου είναι το πρώτο, επομένως έχουμε

$$\inf\left\{1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{4},\dots\right\} = \min\left\{1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{4},\dots\right\} = \frac{1}{2}.$$

Από την άλλη, υπάρχουν στοιχεία του συνόλου αυθαίρετα κοντά στο 1, χωρίς όμως το 1 να ανήκει στο σύνολο. Άρα το σύνολο δεν έχει maximum, αλλά

$$\sup\left\{1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{4},\dots\right\} = 1.$$

(ε´) Κατά τα γνωστά μας για τα τριώνυμα, το σύνολο μπορεί να γραφεί και ως $[\sqrt{2},3]$. Επομένως,

$$\inf A = \min A = \sqrt{2}, \qquad \sup A = \max A = 3.$$

(ς´) Αυτό που αλλάζει σε αυτή την περίπτωση είναι ότι το $\sqrt{2}$ δεν ανήκει στο σύνολο. Επομένως, έχουμε μεν

$$\inf A\cap\mathbb{Q} = \sqrt{2}, \qquad \sup A\cap\mathbb{Q} = \max A\cap\mathbb{Q} = 3,$$

αλλά δεν υπάρχει το $\min A\cap\mathbb{Q}$.

4. **(Supremum υποσυνόλου)** Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν για δύο *σύνολα* έχουμε $A \subset B$, τότε $\sup A < \sup B$.

   Λύση: Η πρόταση είναι λάθος. Πράγματι, έχουμε ότι $\{0,2\} \subset \{0,1,2\}$, όμως $\sup\{0,2\} = \sup\{0,1,2\} = 2$.

5. **(Αυθαίρετα κοντινά σύνολα)** Έστω δύο μη κενά σύνολα A και B τέτοια ώστε για κάθε $x \in A$ και $y \in B$ έχουμε $x \le y$, και επιπλέον για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x \in A$, $y \in B$, τέτοια ώστε $y - x < \epsilon$. Να δείξετε ότι υπάρχουν τα $\sup A$, $\inf B$ και μάλιστα είναι ίσα.

   Λύση: Καταρχάς, το A είναι μη κενό και φραγμένο άνω, από οποιοδήποτε $y \in B$ (που επίσης είναι μη κενό). Άρα, έχει supremum, από το Αξίωμα της Πληρότητας. Ομοίως, το B έχει infimum.

   Σχετικά με την ισότητα των $\sup A$, $\inf B$, θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε πρώτα πως $\sup A > \inf B$, και θα φτάσουμε σε άτοπο, και μετά θα υποθέσουμε ότι $\sup A < \inf B$, και θα φτάσουμε και πάλι σε άτοπο, οπότε το μόνο ενδεχόμενο είναι η ισότητα.

   Έστω, λοιπόν, πως $\sup A > \inf B$. Έστω $\epsilon > 0$ η θετική ποσότητα $\epsilon = \sup A - \inf B$. Έστω το $\epsilon/2$. Γνωρίζουμε ότι, αφού το $\sup A$ είναι supremum του A, θα υπάρχει κάποιο x τέτοιο ώστε

$$\sup A - \epsilon/2 < x \Rightarrow \sup A - \frac{\sup A - \inf B}{2} < x \Rightarrow \frac{\sup A + \inf B}{2} < x.$$

   Ανάλογα, επειδή το $\inf B$ είναι infimum του B, θα υπάρχει κάποιο y τέτοιο ώστε

$$y < \inf B + \epsilon/2 \Rightarrow y < \inf B + \frac{\sup A - \inf B}{2} \Rightarrow y < \frac{\sup A + \inf B}{2}.$$

   Επομένως, $y < x$ που είναι άτοπο, διότι εξ υποθέσεως για κάθε ζεύγος x, y, άρα και για το συγκεκριμένο, θα πρέπει να έχουμε $y \ge x$.

   Έστω τώρα πως $\sup A < \inf B$. Έστω $\epsilon > 0$ η θετική ποσότητα $\epsilon = \inf B - \sup A$. Έστω οποιοδήποτε $x \in A$ και ένα οποιοδήποτε $y \in B$. Θα έχουμε $x \le \sup A$ αφού το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A, και $y \ge \inf B$ διότι το $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του B. Άρα, αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει

$$y - x \ge \inf B - \sup A = \epsilon.$$

Και αυτό είναι άτοπο, διότι θα έπρεπε, σύμφωνα με την υπόθεση, για το συγκεκριμένο $\epsilon > 0$ να υπάρχουν $y \in B, x \in A$ τέτοια ώστε $y - x < \epsilon$, όμως από τα άνω προκύπτει ότι για το συγκεκριμένο $\epsilon > 0$, ισχύει ότι $y - x \geq \epsilon$ για *κάθε* ζεύγος x, y.

6. **(Infimum αθροίσματος)** Έστω συναρτήσεις $f, g : B \to \mathbb{R}$ κάτω φραγμένες στο σύνολο B. Να δείξετε ότι
$$\inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} \geq \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$
Μπορείτε να βρείτε μια γενική περίπτωση όπου ισχύει η ισότητα?

Λύση: Παρατηρήστε πως
$$f(y) \geq \inf\{f(x) : x \in B\}$$
για κάθε $y \in B$, εξ ορισμού του $\inf\{f(x) : x \in B\}$. Ανάλογα,
$$g(y) \geq \inf\{g(x) : x \in B\}$$
για κάθε $y \in B$, και αν προσθέσουμε κατά μέλη,
$$f(y) + g(y) \geq \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$
Άρα, η ποσότητα στα δεξιά είναι κάτω φράγμα όλων των $f(y) + g(y)$, και επομένως θα είναι μικρότερη ή ίση του *μέγιστου* κάτω φράγματος όλων των $f(y)+g(y)$, δηλαδή του $\inf\{f(y)+g(y) : y \in B\}$, επομένως προκύπτει το ζητούμενο.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω πως ισχύει το ανάποδο, δηλαδή
$$\inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} < \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$
Έστω μάλιστα $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε
$$\inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} + \epsilon = \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$
Κατά τα γνωστά για το infimum, θα υπάρχει κάποιο x_1 τέτοιο ώστε
$$\begin{aligned}\inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} &\leq f(x_1) + g(x_1)\\ &< \inf\{f(x) + g(x) : x \in B\} + \epsilon = \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.\end{aligned}$$
Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί ξέρουμε πως
$$f(x_1) \geq \inf\{f(x) : x \in B\}, \qquad g(x_1) \geq \inf\{g(x) : x \in B\},$$
και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει πως
$$f(x_1) + g(x_1) \geq \inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\}.$$
Σχετικά με το τελευταίο ερώτημα, η ισότητα ισχύει, εκτός των άλλων, και οποτεδήποτε οι συναρτήσεις λαμβάνουν τις ελάχιστες τιμές τους και επιπλέον τις λαμβάνουν στο ίδιο σημείο x_0. Μπορείτε να βρείτε άλλες περιπτώσεις;

7. **(Άθροισμα άρτιας και περιττής συνάρτησης)** Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Οποιαδήποτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα μιας περιττής και μιας άρτιας συνάρτησης.

Λύση: Η πρόταση είναι αληθής. Πράγματι, έστω οι συναρτήσεις
$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

οι οποίες είναι η μεν πρώτη άρτια και η δε δεύτερη περιττή αφού:

$$\begin{aligned} f_e(-x) &= \frac{f(-x)+f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = f_e(x), \\ f_o(-x) &= \frac{f(-x)-f(-(-x))}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -f_o(x). \end{aligned}$$

Όμως, έχουμε

$$f_e(x)+f_o(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x),$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

8. **(Αύξουσα σύνθεση)** Να δείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι (γνησίως) αύξουσες, τότε είναι (γνησίως) αύξουσα και η σύνθεσή τους $f \circ g$ στο σύνολο όπου αυτή ορίζεται.

   Λύση: Στην περίπτωση συναρτήσεων f, g που είναι γνησίως αύξουσες, πολύ απλά παρατηρούμε πως

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2)) \Rightarrow f \circ g(x_1) < f \circ g(x_2),$$

   άρα και η σύνθεση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

   Η απόδειξη για την περίπτωση συναρτήσεων που είναι απλώς αύξουσες είναι ανάλογη:

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) \leq f(g(x_2)) \Rightarrow f \circ g(x_1) \leq f \circ g(x_2),$$

   άρα και η σύνθεση $f \circ g$ είναι αύξουσα.

9. **(Φθίνουσα σύνθεση)** Να δείξετε ότι αν η f είναι (γνησίως) αύξουσα και η g είναι (γνησίως) φθίνουσα, τότε οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι (γνησίως) φθίνουσες στα σύνολα όπου αυτές ορίζονται.

   Λύση: Στην περίπτωση που η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα, παρατηρήστε πως

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Rightarrow f \circ g(x_1) > f \circ g(x_2),$$

   επομένως η $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επιπλέον

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2)) \Rightarrow g \circ f(x_1) > g \circ f(x_2),$$

   άρα και η $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

   Στην περίπτωση που η f είναι απλώς αύξουσα και η g είναι απλώς φθίνουσα, τότε ανάλογα έχουμε πως

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) \geq f(g(x_2)) \Rightarrow f \circ g(x_1) \geq f \circ g(x_2),$$

   επομένως η $f \circ g$ είναι φθίνουσα, και επιπλέον

   $$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq (x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \geq g(f(x_2)) \Rightarrow g \circ f(x_1) \geq g \circ f(x_2),$$

   άρα και η $g \circ f$ είναι φθίνουσα.

2η Ομάδα Ασκήσεων

10. **(Όριο απολύτου)** Να δείξετε, αποκλειστικά με χρήση του ορισμού του ορίου, ότι $\lim_{x\to 0}|x| = 0$.

    Λύση: Έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε $\delta = \epsilon > 0$. Παρατηρήστε πως

    $$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow 0 < |x| < \epsilon \Rightarrow 0 < |f(x) - 0| < \epsilon,$$

    και επομένως εξ ορισμού $\lim_{x\to 0}|x| = 0$.

11. **(Ύπαρξη ορίου)** Αποδείξτε την ακόλουθη πρόταση ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x^2)$ τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to 0} f(x)$.

    Λύση: Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει. Ο λόγος είναι ότι μπορεί η $f(x)$ να έχει διαφορετικά πλευρικά όρια στο 0, κάτι που κρύβει ο τετραγωνισμός του x. Σαν ένα συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα, εξετάστε την συνάρτηση Heaviside

    $$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

    για την οποία ξέρουμε ότι δεν έχει όριο $\lim_{x\to 0} u(x)$ στο 0. Όμως, το όριο $\lim_{x\to 0} u(x^2)$ υπάρχει. Πράγματι, η $u(x^2) = 1$, όπως προκύπτει αν πάρουμε τις περιπτώσεις $x > 0$, $x < 0$ και $x = 0$, επομένως $\lim_{x\to 0} u(x^2) = 1$.

12. **(Ύπαρξη ορίου)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ και $\lim_{x\to x_1} g(x) = x_0$, τότε $\lim_{x\to x_1} f(g(x)) = L$.

    Λύση: Η ιδιότητα δεν ισχύει, και το πρόβλημα είναι η ενδεχόμενη έλλειψη συνέχειας της f στο x_0. Ένα απλό αντιπαράδειγμα είναι το

    $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = 0.$$

    Παρατηρήστε πως

    $$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} f(g(x)) = \lim_{x\to 0} f(0) = 1.$$

13. **(Όριο αντίστροφης συνάρτησης)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, τότε και $\lim_{x\to x_0} 1/f(x) = 0$.

    Λύση: Η πρόταση ισχύει. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε $M = 1/\epsilon > 0$, και παρατηρούμε πως, από τον ορισμό του δοσμένου ορίου στο άπειρο, θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

    $$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} = \epsilon \Rightarrow -\frac{1}{M} < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \frac{1}{M} = \epsilon.$$

14. **(Όριο αντίστροφης συνάρτησης)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, τότε και $\lim_{x\to x_0} 1/f(x) = \infty$.

    Λύση: Η δοσμένη πρόταση δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η μεν $f(x) = x$ συγκλίνει στο 0 καθώς $x \to 0$, όμως η $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$ έχει όρια

    $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty,$$

    και επομένως δεν έχει όριο για $x \to 0$. Η μη ύπαρξη του ορίου ουσιαστικά οφείλεται στο ότι καθώς το $x \to x_0$, η συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να λαμβάνει ταυτοχρόνως και θετικές και αρνητικές τιμές.

15. **(Αύξουσα συγκλίνουσα συνάρτηση)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και υπάρχει το πεπερασμένο όριο $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$, τότε είναι φραγμένη άνω.

   Λύση: Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη άνω από το L. Πράγματι, έστω πως $f(x_0) > L$ για κάποιο x_0, και έστω πως $\epsilon = f(x_0) - L > 0$. Τότε, επειδή η συνάρτηση είναι αύξουσα, θα έχουμε

   $$x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) = L + \epsilon. \tag{1}$$

   Θα φτάσουμε σε άτοπο. Πράγματι, για το άνω $\epsilon > 0$, λόγω του δοσμένου ορίου θα υπάρχει κάποιο X τέτοιο ώστε

   $$x > X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \Rightarrow f(x) < L + \epsilon.$$

   Αυτό, όμως, είναι άτοπο, γιατί αντιβαίνει την (1).

16. **(Όρια του $\cos x$ στο $\pm\infty$)** Να δείξετε, με χρήση του ορισμού του ορίου και όχι με γραφικά επιχειρήματα, ότι δεν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\infty} \cos x$, $\lim_{x\to-\infty} \cos x$.

   Λύση: Καταρχάς, πρέπει να είναι διαισθητικά προφανές ότι το όριο δεν μπορεί να υπάρχει. Αιτία είναι οι "ταλαντώσεις" που κάνει το συνημίτονο για αυθαίρετα μεγάλα ορίσματα. Θα αποδείξουμε, αυστηρά, ότι δεν υπάρχει όριο με απαγωγή σε άτοπο. Έστω πως υπάρχει το όριο, έστω L, και έστω πως $L \geq 0$. Επιλέγουμε $\epsilon = \frac{1}{2}$. Για αυτό το ϵ, δεν υπάρχει X τέτοιο ώστε όποτε $x > X$ να έχουμε και $|f(x) - L| < \epsilon$, αφού για κάθε X υπάρχουν $x > X$ για τα οποία $\cos x = -1$, και επομένως, για αυτά τα x (αφού έχουμε υποθέσει $L \geq 0$),

   $$|\cos x - L| > \frac{1}{2}.$$

   επομένως, το όριο δεν μπορεί να είναι $L \geq 0$. Ανάλογα μπορούμε να αποκλείσουμε και την περίπτωση $L < 0$.

17. **(Ορισμός Ορίου)** Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to-4} \frac{17}{(x+4)^2} = \infty$ χρησιμοποιώντας τον **ορισμό** του αντίστοιχου ορίου.

   Λύση: Έστω $M > 0$. Παρατηρούμε πως

   $$f(x) > M \Leftrightarrow \frac{17}{(x+4)^2} > M \Leftrightarrow (x+4)^2 < \frac{17}{M} \Leftrightarrow |x+4| < \sqrt{\frac{17}{M}}.$$

   Επομένως, θέτουμε $\delta = \sqrt{\frac{17}{M}} > 0$ και παρατηρούμε πως

   $$|x - (-4)| < \delta \Rightarrow |x+4| < \sqrt{\frac{17}{M}} \Rightarrow f(x) > M.$$

   Αν, πάλι, $M < 0$, τότε για οποιοδήποτε $\delta > 0$, π.χ. για $\delta = 1$, ισχύει ότι $|x - (-4)| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. Επομένως το όριο ισούται με ∞, σύμφωνα με τον σχετικό ορισμό.

18. **(Όριο)** Να υπολογίσετε την τιμή του ορίου

   $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+7} - ax\right),$$

   όπου το $a \in \mathbb{R}$ είναι άγνωστη παράμετρος. Το όριο εξαρτάται από την τιμή του a, επομένως πρέπει να εξετάσετε διαφορετικές περιπτώσεις για την τιμή του a.

   Λύση: Παρατηρήστε πως

   $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+7} - ax\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{9+\frac{7}{x^2}} - a\right).$$

Επομένως, αν $a > 3$ το όριο είναι $-\infty$, διότι η συνάρτηση εντός της παρένθεσης συγκλίνει σε ένα αρνητικό πραγματικό αριθμό. Αντίθετα, αν $a < 3$ το όριο είναι ∞, γιατί η συνάρτηση εντός της παρένθεσης συγκλίνει σε ένα θετικό πραγματικό αριθμό. Τέλος, στην περίπτωση που $a = 3$, το άνω όριο εμφανίζει απροσδιοριστία, αλλά ειδικά για αυτή την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-3x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+7}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+7}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+7}+3x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{7}{\left(\sqrt{9x^2+7}+3x\right)} = 0.$$

Συνοψίζοντας,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+7}-ax\right) = \begin{cases} -\infty, & a > 3, \\ 0, & a = 3, \\ \infty, & a < 3. \end{cases}$$

19. **(Βηματική συνάρτηση)** Δίνεται η βηματική συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Προσδιορίστε τα ακόλουθα όρια, ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν:

$$\lim_{x\to 0}\min\{u(x), u(-x)\}, \qquad \lim_{x\to 0} u(x^2), \qquad \lim_{x\to\infty} u\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to 0} u\left(\frac{1}{x}\right).$$

Δεν χρειάζεται να επικαλεστείτε τον ορισμό του ορίου.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε ότι $\min\{u(x), u(-x)\} = 0$ για όλα τα x, επομένως $\lim_{x\to 0}\min\{u(x), u(-x)\} = 0$.

(β΄) Παρατηρούμε ότι

$$u(x^2) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

επομένως

$$\lim_{x\to 0} u(x^2) = 1.$$

(γ΄) Παρατηρούμε ότι $u\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, για $x > 0$, ενώ η συνάρτηση δεν ορίζεται για $x \le 0$. Επομένως $\lim_{x\to 0} u\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

(δ΄) Παρατηρούμε ότι για $x > 0$ έχουμε $u\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, ενώ για $x < 0$ έχουμε $u\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, επομένως το δοσμένο όριο δεν υπάρχει, γιατί δεν ισούνται τα πλευρικά όρια.

20. **(Όρια)**

(α΄) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}},$$

όπου το *ακέραιο μέρος* $\lfloor x\rfloor$ του x είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος από τον x.

(β΄) Να βρείτε τιμές που μπορούν να πάρουν οι πραγματικές παράμετροι a, b ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\sin(x+b)}{x-\frac{\pi}{2}} = 10.$$

(Υπάρχουν πολλές σωστές απαντήσεις και αρκεί να βρείτε μια.)

(γ΄) Βρείτε *όλα* τα ζεύγη τιμών για τις παραμέτρους a, b ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin(x+b)}{x-\frac{\pi}{2}} = 10.$$

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$0 \le x - \lfloor x \rfloor < 1 \Rightarrow 0 \le \frac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}},$$

και με χρήση του Κριτηρίου της Παρεμβολής προκύπτει πως

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}} = 0.$$

(β΄) Μια επιλογή είναι η $a = 10$, $b = -\frac{\pi}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση, πράγματι

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{10\sin(x-\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = 10,$$

χρησιμοποιώντας το γνωστό όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(γ΄) Αφού το όριο είναι πεπερασμένο και ο παρονομαστής μηδενίζεται για $x \to \frac{\pi}{2}$, θα πρέπει και ο αριθμητής να μηδενίζεται. Πρέπει, λοιπόν, $b = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Για όλες αυτές τις τιμές του b, με χρήση του άνω όριο προκύπτει ότι πρέπει $a = 10$.

21. **(Όρια)** Να προσδιορίσετε τα παρακάτω όρια, εφόσον υπάρχουν:

(α΄) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x$.

(β΄) $\lim\limits_{x\to\infty} |\cos x|^x$.

Λύση:

(α΄) Παρατηρούμε πως

$$0 \le \frac{|\cos x|}{2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le \left(\frac{|\cos x|}{2}\right)^x \le \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

και επειδή $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$, από το Κριτήριο της Παρεμβολής τελικά η συνάρτηση τείνει στο 0 καθώς $x \to \infty$.

(β΄) Σε αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε πως για όλα τα $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, με $k \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση λαμβάνει την τιμή 0, ενώ για όλα τα $x = 2k\pi$, με $k \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση λαμβάνει την τιμή 1. Επομένως, το όριο δεν υπάρχει.

3η Ομάδα Ασκήσεων

22. **(Υπολογισμός ορίων)** Να υπολογίσετε τα ακόλουθα όρια:

 (α΄) $\lim_{x\to 0} \sin\sin x$.

 (β΄) $\lim_{x\to 0} \cos\sin x$.

 (γ΄) $\lim_{x\to 1} \tan\frac{x^2+1}{x^3+2}$.

 Λύση:

 (α΄) Η συνάρτηση του ημιτόνου είναι συνεχής, επομένως μπορούμε να περάσουμε το όριο εντός της, δύο φορές, και, πολύ απλά, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} \sin\sin x = \sin\lim_{x\to 0} \sin x = \sin\sin\lim_{x\to 0} x = \sin\sin 0 = \sin 0 = 0.$$

 (β΄) Ανάλογα, αφού και η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι συνεχής,

$$\lim_{x\to 0} \cos\sin x = \cos\lim_{x\to 0} \sin x = \cos\sin\lim_{x\to 0} x = \cos\sin 0 = \cos 0 = \pi/2.$$

 (γ΄) Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να περάσουμε και πάλι το όριο εντός της εφαπτομένης, απλώς πρέπει να βεβαιωθούμε εκ των υστέρων ότι το όριο που δημιουργείται εντός της εφαπτομένης δεν ισούται με κάποια τιμή εκτός του πεδίου ορισμού της (σε όλες τις τιμές εντός του πεδίου ορισμού της, η εφαπτομένη είναι συνεχής συνάρτηση). Σε αυτή την περίπτωση, όπως προκύπτει, δεν υπάρχει τέτοιο πρόβλημα:

$$\lim_{x\to 1} \tan\frac{x^2+1}{x^3+2} = \tan\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^3+2} = \tan\frac{1+1}{1+2} = \tan 2/3.$$

23. **(Κοινό πρόσημο σε ανοικτή γειτονιά)** Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0) > 0$ (εναλλακτικά, $f(x_0) < 0$), τότε υπάρχει μια ανοικτή γειτονιά I γύρω από το x_0 (δηλαδή ένα διάστημα της μορφής $I = (a, b)$ με $x_0 \in (a, b)$) τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ (εναλλακτικά, $f(x) < 0$) παντού στο I.

 Λύση: Υποθέτουμε ότι $f(x_0) > 0$. Η απόδειξη στην περίπτωση που $f(x_0) < 0$ είναι ανάλογη και παραλείπεται.

 Έστω, λοιπόν, το $\epsilon = f(x_0) > 0$. Από τον ορισμό της συνέχειας έχουμε ότι για εκείνο το ϵ θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon = f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) > -f(x_0) \Rightarrow f(x) > 0.$$

 Επομένως, το ζητούμενο διάστημα είναι το $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

24. **(Υπαρξη ριζών πολυωνύμων)** Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

 Λύση: Περιληπτικά, το αποτέλεσμα ισχύει γιατί για τα πολυώνυμα περιττού βαθμού συμβαίνει πάντα κάτι από τα δύο:

 (α΄) Είτε λαμβάνουν πολύ αρνητικές τιμές καθώς το όρισμά τους λαμβάνει πολύ αρνητικές τιμές και πολύ θετικές τιμές καθώς το όρισμά τους λαμβάνει πολύ θετικές τιμές,

 (β΄) είτε λαμβάνουν πολύ θετικές τιμές καθώς το όρισμά τους λαμβάνει πολύ αρνητικές τιμές και πολύ αρνητικές τιμές καθώς το όρισμά τους λαμβάνει πολύ θετικές τιμές.

Το τι από τα δύο συμβαίνει εξαρτάται από το συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου. Επειδή, επιπλέον, είναι και συνεχείς συναρτήσεις, θα πρέπει κάπου να μηδενίζονται.

Αναλυτικά, έστω

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

όπου $a_n \neq 0$ και n περιττός. Έστω, επίσης, πως $a_n > 0$. (Η απόδειξη για την περίπτωση $a_n < 0$ είναι ανάλογη και για αυτό παραλείπεται.) Όταν $x > 0$, μπορούμε να γράψουμε το $P(x)$ ως

$$P(x) = x^n \left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right]. \tag{2}$$

Σχετικά με το όριο του $P(x)$ στο ∞, χρησιμοποιώντας την (2) έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} P(x) &= \left(\lim_{x\to\infty} x^n\right) \times \lim_{x\to\infty} \left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right] \\
&= \left(\lim_{x\to\infty} x^n\right) \times \left[\lim_{x\to\infty} a_n + \lim_{x\to\infty} \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \lim_{x\to\infty} \frac{a_1}{x^{n-1}} + \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{x^n}\right] \\
&= \left(\lim_{x\to\infty} x^n\right) \times [a_n + 0 + \cdots + 0] = \infty \times a_n = \infty.
\end{aligned}$$

Στα άνω, χρησιμοποιήσαμε τα γνωστά όρια

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^n &= \infty, \qquad n \in \mathbb{N}^*, \\
\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} &= 0, \qquad n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

και το ότι $a_n > 0$. Επομένως, τελικά $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$. Από τον ορισμό του ορίου άμεσα προκύπτει, λοιπόν, πως θα υπάρχει κάποιο b τέτοιο ώστε $P(b) > 0$. Πράγματι, έστω κάποιο $M > 0$, για παράδειγμα το $M = 1$. Θα υπάρχει κάποιο X τέτοιο ώστε $P(x) > M > 0$ για κάθε $x > X$, άρα και για το $b = X + 1$.

Σχετικά με το όριο του $P(x)$ στο $-\infty$, και πάλι χρησιμοποιώντας την (2) έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} P(x) &= \left(\lim_{x\to-\infty} x^n\right) \times \lim_{x\to-\infty} \left[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right] \\
&= \left(\lim_{x\to-\infty} x^n\right) \times \left[\lim_{x\to-\infty} a_n + \lim_{x\to-\infty} \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \lim_{x\to-\infty} \frac{a_1}{x^{n-1}} + \lim_{x\to-\infty} \frac{a_0}{x^n}\right] \\
&= \left(\lim_{x\to-\infty} x^n\right) \times [a_n + 0 + \cdots + 0] = (-\infty) \times a_n = -\infty.
\end{aligned}$$

Στα άνω, χρησιμοποιήσαμε τα γνωστά όρια

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} x^n &= -\infty, \qquad n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}^*, \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} &= 0, \qquad n \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

και το ότι $a_n > 0$. Επομένως, τελικά $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$. Από τον ορισμό του ορίου άμεσα προκύπτει, λοιπόν, παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση, πως θα υπάρχει κάποιο a τέτοιο ώστε $P(a) < 0$.

Τελικά, λοιπόν, $P(a) < 0$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ και $P(b) > 0$ για κάποιο $b \in \mathbb{R}$, άρα από το Θεώρημα του Bolzano προκύπτει πως θα υπάρχει κάποιο x_0 τέτοιο ώστε $P(x_0) = 0$.

25. **(Υλοποίηση Μεθόδου Διχοτόμησης)** Να υλοποιήσετε τη Μέθοδο της Διχοτόμησης σε μια γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας, και κατόπιν να την εκτελέσετε για να εντοπίσετε μια ρίζα της συνάρτησης $f(x) = x - \cos x$, ξεκινώντας από το αρχικό διάστημα $[0, \pi]$ και εκτελώντας 20 επαναλήψεις. Να παραδώσετε στις λύσεις τον κώδικά σας και τα εξαγόμενα αποτελέσματα στη μορφή ενός πίνακα τεσσάρων στηλών ως εξής:

n	a	b	$f(m)$
1	0	3.141592653589793	1.570796326794897
2	0	1.570796326794897	0.078291382210901
3	0	0.785398163397448	-0.531180450812563
4	0.392699081698724	0.785398163397448	-0.242420989754459
5	0.589048622548086	0.785398163397448	-0.085787060389970
6	0.687223392972767	0.785398163397448	-0.004640347169852
7	0.736310778185108	0.785398163397448	0.036607387839811
8	0.736310778185108	0.760854470791278	0.015928352815780
9	0.736310778185108	0.748582624488193	0.005630132459280
10	0.736310778185108	0.742446701336650	0.000491415300264
11	0.736310778185108	0.739378739760879	-0.002075336486523
12	0.737844758972993	0.739378739760879	-0.000792178079270
13	0.738611749366936	0.739378739760879	-0.000150435742050
14	0.738995244563908	0.739378739760879	0.000170476193345
15	0.738995244563908	0.739186992162393	0.000010016828910
16	0.738995244563908	0.739091118363150	-0.000070210305791
17	0.739043181463529	0.739091118363150	-0.000030096950742
18	0.739067149913340	0.739091118363150	-0.000010040113991
19	0.739079134138245	0.739091118363150	-0.000000011655809
20	0.739085126250698	0.739091118363150	0.000005002583233

Πίνακας 1: Η εκτέλεση του Μεθόδου της Διχοτόμησης για την Άσκηση 25, και συγκεκριμένα για τη συνάρτηση $f(x) = x - \cos x$ με αρχικό διάστημα το $[a, b] = [0, \pi]$.

(α΄) Η πρώτη στήλη να δείχνει την επανάληψη.

(β΄) Η δεύτερη στήλη να δείχνει το αριστερό άκρο του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης,

(γ΄) Η τρίτη στήλη να δείχνει το δεξί άκρο του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης,

(δ΄) Η τέταρτη στήλη να δείχνει την τιμή της συνάρτησης στο μέσου του τρέχοντος διαστήματος στην αρχή της επανάληψης,

Λύση: Τα αποτελέσματα που εξάγει ο κώδικας, στη μορφή της εκφώνησης, εμφανίζονται στον Πίνακα 1. Παρατηρήστε ότι στην προτελευταία επανάληψη βρήκαμε μια τιμή για την συνάρτηση μικρότερη από αυτή της τελευταίας επανάληψης! Αυτό είναι κάτι που η μέθοδος επιτρέπει να συμβεί.

26. **(Άπειρες ρίζες)** Ισχύει η ακόλουθη πρόταση; Υπάρχει συνεχής συνάρτηση, που δεν είναι σταθερή σε κανένα διάστημα που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, η οποία έχει άπειρες ρίζες σε φραγμένο κλειστό διάστημα.

Λύση: Η πρόταση είναι αληθής. Πράγματι, ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \end{cases}$$

η οποία προφανώς δεν είναι σταθερή.

Η συνέχεια της f στο $[-1, 1] \setminus \{0\}$ προκύπτει άμεσα από γνωστά θεωρήματα. Η συνέχεια της f στο 0 προκύπτει από το Κριτήριο της Παρεμβολής, παρατηρώντας πως

$$\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1 \Rightarrow \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|.$$

Πράγματι, αφού έχουμε $\lim_{x\to 0}|x| = \lim_{x\to 0} -|x|$, θα έχουμε και

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

άρα τελικά η f είναι παντού συνεχής στο $[-1,1]$.

Παρατηρήστε, επιπλέον, ότι η $f(x)$ μηδενίζεται σε άπειρα σημεία εντός του $[-1,1]$, και συγκεκριμένα σε όλα τα x για τα οποία ισχύει η $\frac{1}{x} = k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}^*$, δηλαδή σε όλα τα

$$x = \frac{1}{k\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}^*.$$

Επομένως, η f ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις της εκφώνησης.

27. **(Συνέχεια Lipschitz φυσικών δυνάμεων)** Δείξτε ότι η $f(x) = x^n$, όπου $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε φραγμένο διάστημα και όχι Lipschitz συνεχής σε κάθε μη φραγμένο διάστημα. Χρησιμοποιήστε αποκλειστικά τον ορισμό της συνέχειας Lipschitz.

    Λύση: Καταρχάς, έστω ένα φραγμένο διάστημα I, και έστω $|x| \leq M$ για κάθε $x \in I$, όπου $M > 0$. Το M είναι βέβαιο ότι υπάρχει, αφού το I είναι φραγμένο. Έστω τώρα $x, y \in M$. Παρατηρήστε πως

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |x^n - y^n| = |x-y||x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}| \\ &\leq |x-y|\left(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|y| + \cdots + |x||y|^{n-2} + |y|^{n-1}|\right) \\ &\leq |x-y|(n-1)M^{n-1}.\end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα προέκυψε χρησιμοποιώντας την γνωστή ταυτότητα

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Η πρώτη ανισότητα προέκυψε χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, και η δεύτερη παρατηρώντας ότι, εξ υποθέσεως, $|x|, |y| \leq M$. Επομένως, πράγματι η $f(x)$ είναι Lipschitz συνεχής με $C = (n-1)M^{n-1}$. Παρατηρήστε ότι η ποσότητα αυτή ισούται με τη μέγιστη τιμή που λαμβάνει η απόλυτη τιμή της παραγώγου της δοσμένης συνάρτησης. Αυτό δεν είναι τυχαίο!

Έστω, τώρα, ένα μη φραγμένο διάστημα, για παράδειγμα το (a, ∞). (Οι υπόλοιπες περιπτώσεις μη φραγμένων διαστημάτων αντιμετωπίζονται ανάλογα.) Έστω $x, y \in (a, \infty)$. Παρατηρήστε πως

$$|f(x) - f(y)| = |x^n - y^n| = |x-y||x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}|.$$

Παρατηρήστε ότι το δεξί μέλος της άνω ισότητας μπορεί να γίνει ένα όσο μεγάλο πολλαπλάσιο της ποσότητας $|x-y|$ θέλουμε, αρκεί να επιλέξουμε αρκούντως μεγάλες τιμές για τα x, y. Επομένως, δεν μπορεί να φραχτεί από κάποιο $C|x-y|$, όπου $C \in \mathbb{R}$, και επομένως η συνάρτηση δεν είναι Lipschitz. (Αν δεν βρίσκετε το επιχείρημα αρκούντως αναλυτικό, υποθέστε ότι υπάρχει κάποιο C ώστε $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$, και καταλήξτε σε άτοπο επιλέγοντας αρκούντως μεγάλες τιμές των x, y.)

28. **(Συνέχεια Lipschitz συνημιτόνου)** Δείξτε ότι η $f(x) = A\cos(ax+b)$ όπου $A, a, b \in \mathbb{R}$, είναι Lipschitz συνεχής στο $\mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τον ορισμό της συνέχειας Lipschitz.

    Λύση: Έστω δύο οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}|f(x_1) - f(x_2)| &= |A\cos(ax_1+b) - A\cos(ax_2+b)| \\ &= A|\cos(ax_1+b) - \cos(ax_2+b)| \\ &= 2A\left|\sin\left(\frac{a(x_1+x_2)+2b}{2}\right)\sin\left(\frac{a(x_1-x_2)}{2}\right)\right| \\ &\leq 2A\left|\sin\left(\frac{a(x_1-x_2)}{2}\right)\right| \leq \frac{2Aa}{2}|x_1-x_2| = Aa|x_1-x_2|.\end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα προέκυψε με χρήση της τριγωνομετρικής ισότητας

$$\cos x - \cos y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

Η πρώτη ανισότητα προέκυψε από το ότι $|\sin x| \leq 1$, ενώ η δεύτερη από το ότι $|\sin x| \leq |x|$. Επομένως, η συνάρτηση $f(x)$ είναι πράγματι Lipschitz συνεχής, με $C = Aa$. Παρατηρήστε ότι η ποσότητα αυτή ισούται με τη μέγιστη τιμή που λαμβάνει η απόλυτη τιμή της παραγώγου της δοσμένης συνάρτησης.

4η Ομάδα Ασκήσεων

29. **(Συνάρτηση Dirichlet)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f_D(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $a = 0$ αλλά πουθενά αλλού. Η συνάρτηση Dirichlet $f_D(x)$ ορίζεται ως εξής:

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Λύση: Σχετικά με το σημείο $a = 0$, έχουμε:

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 f_D(x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x f_D(x).$$

Όμως, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι, αφού η $f_D(x)$ λαμβάνει τις τιμές 0 και 1, θα έχουμε

$$-|x| \leq x f_D(x) \leq |x|,$$

και με χρήση του Κριτηρίου της Παρεμβολής προκύπτει πως το παραπάνω όριο είναι ίσο με το 0, επομένως $g'(0) = 0$.

Σχετικά με τα υπόλοιπα σημεία $a \neq 0$, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x)$ δεν είναι συνεχής σε κανένα από αυτά. Πράγματι, έστω κάποιο $a \neq 0$ ρητό. Τότε $g(a) = a^2$. Έστω πως η συνάρτηση $g(x)$ είναι συνεχής στο a. Έστω το $\epsilon = a^2/2 > 0$. Για αυτό το $\epsilon > 0$ θα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in (a - \delta, a + \delta)$, τότε θα έχουμε και

$$|g(x) - g(a)| = |g(x) - a^2| < \epsilon = a^2/2 \Rightarrow g(x) > a^2 - a^2/2 = a^2/2 > 0.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι εντός του διαστήματος $(a - \delta, a + \delta)$ υπάρχουν και άρρητοι x, για τους οποίους $g(x) = x^2 f_D(x) = 0$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x)$ δεν μπορεί να είναι συνεχής σε άρρητα $a \neq 0$. Αφού, λοιπόν, η $g(x)$ δεν είναι συνεχής για $a \neq 0$, δεν μπορεί να είναι και παραγωγίσιμη για $a \neq 0$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

30. **(Χρήση ορισμού παραγώγου)** Υπολογίστε την παράγωγο της εφαπτομένης $\tan x$ με χρήση του ορισμού της παραγώγου και γνωστών τριγωνομετρικών ορίων, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τύπο για την παράγωγο πηλίκου συναρτήσεων.

Λύση: Παρατηρούμε πως

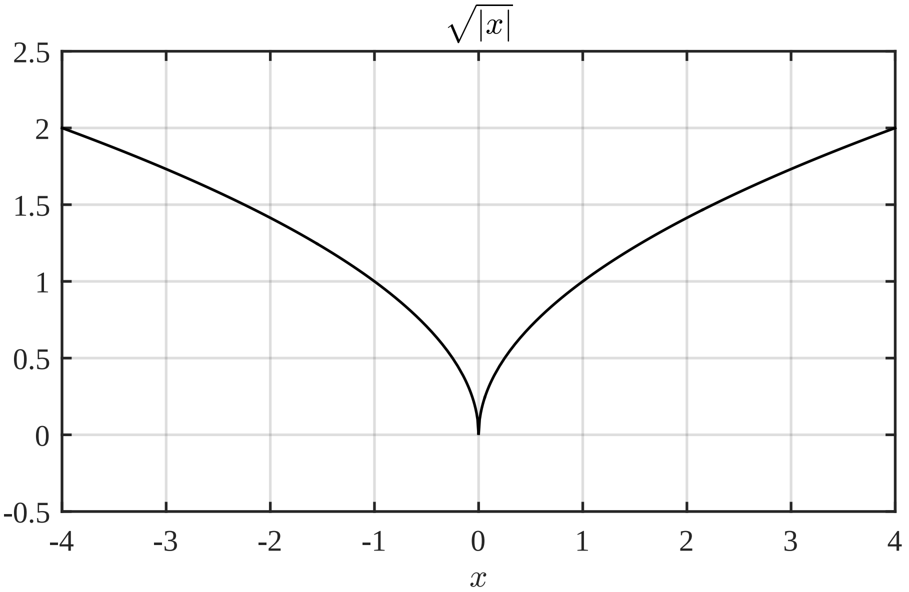
$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h)\cos x - \sin x \cos(x+h)}{h \cos(x+h) \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x+h-x)}{h \cos(x+h) \cos x} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \times \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x} = 1 \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

31. **(Χρήση ορισμού)** Υπολογίστε παντού την παράγωγο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $f(x) = \sqrt{|x|}$ με χρήση του ορισμού της παραγώγου.

Λύση: Η δοσμένη συνάρτηση έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x|}$ της Άσκησης 31.

Έστω $x > 0$. Με χρήση του ορισμού έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|x+h|} - \sqrt{|x|}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}. \end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι, επειδή $x > 0$, για τιμές του h αρκούντως κοντά στο 0, ισχύει $|+h| = x + h$.

Έστω τώρα πως $x < 0$. Με παρόμοια βήματα έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|x+h|} - \sqrt{|x|}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{-x-h} - \sqrt{-x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{-x-h} - \sqrt{-x})(\sqrt{-x-h} + \sqrt{-x})}{h(\sqrt{-x-h} + \sqrt{-x})} = \lim_{h\to 0} \frac{-x-h+x}{h(\sqrt{-x-h} + \sqrt{-x})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(\sqrt{-x-h} + \sqrt{-x})} = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{|x|}}. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που $x = 0$, έχουμε

$$\frac{\sqrt{|h|} - \sqrt{|0|}}{h} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{h}}, & h > 0, \\ \frac{\sqrt{-h}}{-|h|} = \frac{\sqrt{-h}}{-\sqrt{|h|}\sqrt{|h|}} = \frac{\sqrt{-h}}{-\sqrt{-h}\sqrt{-h}} = -\frac{1}{\sqrt{-h}}, & h > 0. \end{cases}$$

Επομένως,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{|h|} - \sqrt{|0|}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty,$$

και

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{|h|} - \sqrt{|0|}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{-\sqrt{-h}} = -\infty.$$

Τα άνω πλευρικά όρια προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό του ορίου.

Συγκεντρωτικά,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{|x|}}, & x > 0, \\ -\frac{1}{2\sqrt{|x|}}, & x < 0, \end{cases} \qquad f'(0^+) = \infty, \qquad f'(0^-) = -\infty.$$

32. **(Υπαρξη δεύτερης παραγώγου)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη παντού στο $\mathbb{R}$ τότε πρέπει να έχει και δεύτερη παράγωγο, επίσης παντού στο $\mathbb{R}$.

    Λύση: Η πρόταση είναι λάθος. Το πρόβλημα είναι να βρούμε μια τέτοια συνάρτηση, καθώς οι συναρτήσεις που συνήθως εξετάζουμε έχουν αυτή την ιδιότητα. Ας εξετάσουμε την συνάρτηση

    $$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

    Εύκολα μπορούμε να δείξουμε πως η πρώτη παράγωγος της είναι η

    $$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0, \\ -2x, & x < 0, \end{cases}$$

    δηλαδή η $f(x) = |x|$, η οποία δεν είναι, με τη σειρά της, παραγωγίσιμη στο 0.

33. **(Ανισότητα παραγώγων)** Έστω συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $f(a) = g(a)$ και $f'(x) \geq g'(x)$ παντού σε ένα διάστημα $I = [a, b]$ ή $I = [a, \infty)$. Να δείξετε ότι $f(x) \geq g(x)$ παντού στο I.

    Λύση: Ορίζουμε τη συνάρτηση $h : I \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - g(x)$. Παρατηρήστε πως $h'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$ παντού στο I, επομένως η h είναι αύξουσα στο I, επομένως, για κάθε $x \in I$, έχουμε

    $$h(a) \leq h(x) \Rightarrow f(a) - g(a) \leq h(x) \Rightarrow 0 \leq f(x) - g(x) \Rightarrow f(x) \geq g(x),$$

    και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

34. **(Κριτήριο ακρότατου)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν $f'(x_0) = 0$, τότε η συνάρτηση $f(x)$ έχει τοπικό ακρότατο στο x_0.

    Λύση: Η πρόταση δεν ισχύει. Παρατηρήστε, για παράδειγμα, ότι για την συνάρτηση $f(x) = x^3$ έχουμε $f'(0) = 0$, αλλά η συνάρτηση δεν έχει ακρότατο στο 0.

35. **(Γνησίως μονότονη συνάρτηση $\Rightarrow$ θετική παράγωγος)** Αποδείξτε την ακόλουθη ή βρείτε αντιπαράδειγμα: Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε $f'(x) > 0$ παντού στο (a, b).

    Λύση: Η πρόταση είναι λάθος. Για παράδειγμα η συνάρτηση

    $$f(x) = x^3$$

    είναι μεν γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$, έχει όμως μηδενική παράγωγο στο 0.

36. **(Υπολογισμοί αόριστων ολοκληρωμάτων)** Υπολογίστε τα ακόλουθα αόριστα ολοκληρώματα:

    (α΄) $\int x^2 \sin x \, dx$.

    (β΄) $\int x^2 \cos x \, dx$.

Λύση: Καταρχάς, θα υπολογίσουμε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\int x\sin x\,dx, \qquad \int x\cos x\,dx.$$

Σχετικά με το πρώτο ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= \int x(-\cos x)'\,dx = -x\cos x - \int x'(-\cos x)'\,dx\\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Εντελώς ανάλογα, έχουμε για το δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int x'(\sin x)\,dx\\ &= x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε πως:

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,dx &= \int x^2(-\cos x)'\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx\\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C,\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx &= \int x^2(\sin x)'\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx\\ &= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.\end{aligned}$$

37. **(Αόριστο Ολοκλήρωμα)** Να υπολογίσετε το ακόλουθο αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int x^2\arctan x\,dx.$$

Ακολούθως, παραγωγίστε το αποτέλεσμα για να επαληθεύσετε ότι είναι σωστό. Δίνεται ότι $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\begin{aligned}\int x^2\arctan x\,dx &= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)'\arctan x\,dx = \frac{x^3}{3}\arctan x - \int \frac{x^3}{3(x^2+1)}\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\int x\left(\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\right)dx\\ &= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\int x\,dx + \frac{1}{6}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\int \left(\log(1+x^2)\right)'\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

Πράγματι, με παραγώγιση παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\log(1+x^2) + C\right)' &= x^2\arctan x + \frac{x^3}{3(1+x^2)} - \frac{x}{3} + \frac{2x}{6(1+x^2)}\\ &= x^2\arctan x + \frac{x^3 - x - x^3 + x}{3(1+x^2)} = x^2\arctan x.\end{aligned}$$